ヒルベルト空間への極作用における例外軌道の非存在

森本 真弘 （東京都立大学）

G をリー群，M を完備リーマン多様体とする．G の M への proper な等長作用が **極 (polar)** であるとは，M の連結完備部分多様体 Σ が存在して，Σ が各 G 軌道と交わりかつ各交点で直交することをいう．この Σ は作用の**断面 (section)** と呼ばれる．特に Σ が誘導計量に関して平坦であるとき，作用は**超極 (hyperpolar)** と呼ばれる．

極作用の 1 つの重要性質として，次の事実が知られている．これは，Alexandrino-Töben [1] 及び Alexandrino [2] によって，より一般に葉層構造の枠組みで示された（Grove-Ziller [6] も参照）：

定理 1 ([1], [2])**.** G を連結リー群，M を単連結な完備リーマン多様体とする．このとき G の M への任意の極作用は，例外軌道（主軌道でない最大次元軌道）を持たない．

ただし，彼らよりも先に，Podesta-Thorbergsson [10] は M が単連結なリーマン対称空間の場合で，Berndt-Console-Olmos [3] は M がユークリッド空間の場合で，Gorodski-Thorbergsson [5] は作用が (polar 表現より一般に) taut 表現の場合で本定理を示している．M が一般の単連結な完備リーマン多様体の場合を扱う上記定理の証明は，さほど容易ではない．

さて，以上の事実において多様体は有限次元であることが想定されているが，一般に，M が無限次元リーマン・ヒルベルト多様体の場合においても，**proper Fredholm (PF) 作用** [8] と呼ばれるリー群作用の枠組みにおいて，極作用を定義することができる．特に，M が可分なヒルベルト空間 V の場合には，極作用の様々な例が知られている [8, 11, 9, 12]．私は最近，上の定理を，M が可分ヒルベルト空間の場合に拡張した：

定理 2 ([7])**.** $\mathcal{L}$ を連結ヒルベルト・リー群，V を可分なヒルベルト空間とする．このとき，$\mathcal{L}$ の V への任意の極作用は，例外軌道（主軌道でない余次元最小軌道）を持たない．

この定理の証明は，可分ヒルベルト空間内の等径部分多様体論 [8, 11, 4] に基づく：まず，任意の余次元最小軌道 N が V の等径部分多様体であること，つまり法束 $T^{\perp}N$ が平坦かつ平行法ベクトル場 ξ に対して N の形作用素 A_ξ の固有値が定数であることを示す．そして，ヒルベルト空間内の任意の連結等径部分多様体の法束の大域平坦性 [4] を用いて，N が主軌道であることを示す．この証明方針は，有限次元ユークリッド空間内の場合で Berndt-Console-Olmos [3] によって示されたものであり，簡潔で幾何学的な証明である．ヒルベルト空間内の場合においても同様の議論が成立する．

興味深いことに，定理 2 から次の事実が従う．これは定理 1 の特殊な場合であるが，証明方法が異なる．

系. G/K を単連結コンパクト・リーマン対称空間，H を G の連結閉部分群とする．このとき，H の G/K への任意の超極作用は，例外軌道（主軌道でない最大次元軌道）を持たない．

本研究は科研費（課題番号：20K22309），特別研究員奨励費（課題番号：23KJ1793）及び大阪公立大学数学研究所（文科省共同利用・共同研究拠点 JPMXP0619217849）の助成を受けたものである．

実際，超極作用 $H \curvearrowright G/K$ を「持ち上げる」ことにより，ある無限次元リー群 $P(G, H\times K)$ による，あるヒルベルト空間 $V_{\mathfrak{g}}$ への極作用が得られ，この作用に対し定理を適応することで系が従う．ここで，$V_{\mathfrak{g}} := L^2([0,1], \mathfrak{g})$ は $[0,1]$ から G のリー代数 $\mathfrak{g}$ への L^2 道全体の成す可分ヒルベルト空間であり，

$$P(G, H \times K) := \{g \in H^1([0,1], G) \mid (g(0), g(1))) \in H \times K\}$$

はソボレフ H^1 道全体の成すヒルベルト・リー群 $H^1([0,1], G)$ の部分群である．$H^1([0,1], G)$ 及び $P(G, H \times K)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ にゲージ変換

$$g * u := gug^{-1} - g'g^{-1}$$

で等長かつ PF に作用する．G/K への H 作用が超極であることと，$V_{\mathfrak{g}}$ への $P(G, H\times K)$ 作用が極であることは同値となり，ヒルベルト空間への極作用の重要な例を提供する [8, 11, 9, 12].

このように，無限次元空間に作用を「持ち上げる」ことで，有限次元空間への作用の新たな理解が得られることがある．上の系は，既に知られている事実の特殊な場合であるが，定理 2 を更に拡張することで，系の拡張や，更には定理 1 の別証明が可能ではないかと考えている．私は最近，Gorodski-Thorbergsson [5] の手法により，定理 2 が taut 作用の場合に一般化できることを確認した．この事実をもとに，現在，更なる研究を進めている．

参考文献

[1] M. M. Alexandrino, D. Töben, *Singular Riemannian foliations on simply connected spaces*, Differential Geom. Appl. **24** (2006), no. 4, 383–397.

[2] M. M. Alexandrino, *On polar foliations and the fundamental group*, Results Math. **60** (2011), 213–223.

[3] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and Holonomy*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 434. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. x+336 pp.

[4] E. Heintze, X. Liu, C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem*, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[5] C. Gorodski, G. Thorbergsson, *The classification of taut irreducible representations*, J. Reine Angew. Math. **555** (2003), 187–235.

[6] K. Grove, W. Ziller, *Polar manifolds and actions*, J. Fixed Point Theory Appl. **11** (2012), no. 2, 279–313.

[7] M. Morimoto, *Non-existence of exceptional orbits under polar actions on Hilbert spaces*, arXiv:2307.02782.

[8] R. S. Palais, C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **1353**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] U. Pinkall, G. Thorbergsson, *Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Math. Z. **205** (1990), no. 2, 279–286.

[10] F. Podestà, G. Thorbergsson, *Polar actions on rank-one symmetric spaces* J. Differential Geom. **53** (1999), no. 1, 131–175.

[11] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space.* J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 9–47.

[12] C.-L. Terng, *Polar actions on Hilbert space.* J. Geom. Anal. **5** (1995), no. 1, 129–150.