

ベクトル束によるエルミート対称空間の特徴づけ

明治大学理工学部 長友康行 (Yasuyuki Nagatomo)
Department of Mathematics, Meiji University

1. INTRODUCTION

本講演の目的は次の二つの定理を紹介することである。 M を多様体としたとき、複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^N$ をファイバーとする M 上の自明束 $M \times \mathbf{C}^N \rightarrow M$ を $\underline{\mathbf{C}}^N$ と表すことにする。

以下、 M を完備ケーラー多様体とし、 $V \rightarrow M$ を M 上の、 $\mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ により大域的に生成される正則ベクトル束とする。したがって、次の正則ベクトル束の完全列が存在する：

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } ev \rightarrow \underline{\mathbf{C}}^N \xrightarrow{ev} V \rightarrow 0.$$

$\mathbf{C}^N$ がエルミート内積を持つとき、 V に誘導されるエルミート計量を h とする。 (V, h) をエルミート束という。(1.1) の第 2 基本形式を $B \in \Gamma(T^{0,1} \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ とする ([5] 参照)。

定理 1.1. $\mathbf{C}^N$ が以下の条件を満たすエルミート内積を持つと仮定する。

- (i) (V, h) は平坦な部分束を持たない。
 - (ii) (1.1) の第 2 基本形式 B が次を満たす：
 - (ii-a) B^*B のトレースは定数倍を除いてケーラー計量と一致する。
 - (ii-b) $\nabla B \in \Gamma(T^* \otimes T^* \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ は $(0, 2)$ 成分を持たない。
- このとき、 M は古典型かつコンパクト型のエルミート対称空間であり、 V は等質ベクトル束となる。また、 (V, h) のエルミート接続は標準接続である。

定理 1.2. $\mathbf{C}^N$ が以下の条件を満たすエルミート内積を持つと仮定する。

- (i) (V, h) は平坦部分束を持たず、 (V, h) の曲率は平行である。
 - (ii) (1.1) の第 2 基本形式 B が次を満たす：
 - (ii-a) B^*B のトレースは定数倍を除いてケーラー計量と一致する。
 - (ii-b) $\nabla^2 B \in \Gamma(T^* \otimes T^* \otimes T^* \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ は $(0, 3)$ 成分を持たない。
- このとき、 M はコンパクト型のエルミート対称空間であり、 V は等質ベクトル束となる。また、 (V, h) のエルミート接続は標準接続である。

定理内で使用されている用語に関してはこれ以後の章で定義するか、または適当な参考文献を挙げることにする。証明は高橋の定理および do Carmo-Wallach 理論の一般化 [6], [7] に基づき、中川-高木の結果 [8] を拡張することによる。

2. PRELIMINARIES

2.1. グラスマン多様体の幾何学. $Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を N 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^N$ 内の p 次元部分空間のなすグラスマン多様体とし、 $S \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を同語反復束とする。 $S \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ は自明束 $\underline{\mathbf{C}}^N = Gr_p(\mathbf{C}^N) \times \mathbf{C}^N$ の部分束であるので、正則ベクトル束の完全列を得る：

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow S \xrightarrow{i} Gr_p(\mathbf{C}^N) \times \mathbf{C}^N \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 0.$$

$Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を**普遍商束**という [1]。このとき、 $Gr_p(\mathbf{C}^N)$ の正則接束 $T_{1,0}$ は $S^* \otimes Q$ と同一視される:

$$T_{1,0} := T_{1,0} Gr_p(\mathbf{C}^N) \cong S^* \otimes Q.$$

次に $\mathbf{C}^N$ のエルミート内積を固定する。すると、

- S にエルミート計量 h_S とエルミート接続 ∇^S が誘導される。
- Q にもエルミート計量 h_Q とエルミート接続 ∇^Q が誘導される。
 ∇^S, ∇^Q は**標準接続**といわれる。
- $T_{1,0}$ にはエルミート計量 $h_{S^*} \otimes h_Q$ が誘導される。この計量を **Fubini-Study 計量** という。このとき、標準接続より誘導される接続がリーマン接続となる。 $Gr_p(\mathbf{C}^N)$ のケーラー形式を ω_N と表す。 ∇^Q の曲率形式を R^Q とおけば、

$$\omega_N = \sqrt{-1} \text{trace } R^Q$$

が成り立つ。

2.2. 複素射影空間 CP^N への正則等長はめ込み。 複素射影空間を $Gr_N(\mathbf{C}^{N+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{C}^{N+1})$ として考える。すると次数 1 の正則直線束 $\mathcal{O}(1)$ が普遍商束と考えられ、Fubini-Study 計量 ω_N は $\mathcal{O}(1)$ の標準接続の曲率となる。(より正確には $R^{\mathcal{O}(1)}$ をその曲率とすると、 $\omega_N = \sqrt{-1} R^{\mathcal{O}(1)}$ が成り立つ。)

• **中川-高木写像**

次に中川-高木の結果 [8] を紹介する。

M を完備ケーラー多様体とし、 $f: M \rightarrow CP^N$ を正則等長はめ込みとする。 α を f の (部分多様体としての) 第 2 基本形式とする。

定理 2.1. (中川-高木) 正則等長はめ込み $f: M \rightarrow CP^N$ の第 2 基本形式 α が $\alpha \neq 0$ かつ、 $\nabla \alpha = 0$ を満たすならば、 M は次のうちいずれかである。

- (1) CP^m , (2) $Gr_2(\mathbf{C}^m)$, (3) $Gr_2(\mathbf{R}^m)$, (4) $SO(10)/U(5)$,
(5) $E_6/\text{Spin}(10) \times U(1)$, (6) $CP^m \times CP^n$.

CP^N への正則等長はめ込みを記述するため、小平埋め込みを復習する。

そのために**誘導写像**を定義する。 $V \rightarrow M$ を正則ベクトル束とし、 W をその正則切断のなすベクトル空間であるとする。このとき**評価写像**といわれる束写像が定義される:

$$ev: M \times W \rightarrow V, \quad ev(x, t) = t(x) \in V_x,$$

ただし、 V_x は $x \in M$ 上の $V \rightarrow M$ のファイバーを表す。各 $x \in M$ に対して、 $ev_x: W \rightarrow V_x$ という線形写像を考えれば、評価写像 ev が全射であるとき、正則写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ が以下のように定義される ($p = \dim W - \text{rank } V$):

$$f(x) = \text{Ker } ev_x \subset W.$$

f を $(V \rightarrow M, W)$ もしくは (V, W) による**誘導写像**という ([1] 参照)。 $V \rightarrow M$ が正則直線束であり、 f が埋め込みであるとき、誘導写像は小平埋め込みである。

以下では対称空間に対応する対称対 (G, K) を考え、 $W(\varpi)$ を最高ウェイトとしてウェイト ϖ をもつ G の既約ユニタリー表現とする。(基本ウェイト ϖ_i の番号付けは [2] にしたがう。) したがって、そのエルミート内積は G 不変内積である。

定理 2.2. (中川-高木) 定理 2.1 における正則等長はめ込み f は次のいずれかによる小平埋め込みである。

- (1) $(\mathcal{O}(2) \rightarrow CP^m, S^2 \mathbf{C}^{m+1})$, (2) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow Gr_2(\mathbf{C}^m), W(\varpi_2))$,
(3) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow Gr_2(\mathbf{R}^n), W(\varpi_1))$,
(4) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow SO(10)/U(5), W(\varpi_4) \text{ or } W(\varpi_5))$,
(5) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow E_6/\text{Spin}(10) \times U(1), W(\varpi_1) \text{ or } W(\varpi_6))$,
(6) $(\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(1) \rightarrow CP^m \times CP^n, \mathbf{C}^{m+1} \otimes \mathbf{C}^{n+1})$.

なお、塚田先生はこの結果を次のように一般化された [9]: エルミート対称空間への第 2 基本形式が平行な ($\nabla\alpha = 0$) 正則等長はめ込みは全測地的であるか中川–高木写像である。

定理 1.1 と定理 1.2 を証明するために、定理 2.1 と定理 2.2 を複素グラスマン多様体への正則等長はめ込みに一般化することを考える。そのために再度複素射影空間への正則等長はめ込みを考察する。

f を (M, ω) から、 $(Gr_N(\mathbf{C}^{N+1}), \omega_N)$ への正則等長はめ込みとすれば、 $f^*\omega_N = \omega$ が成り立つので、 $f^*\mathcal{O}(1) \rightarrow M$ の引き戻し接続の曲率は平行 ($\nabla R^{f^*\mathcal{O}(1)} = 0$) となる。

また、 f の第 2 基本形式の $(2, 0)$ -成分を α と表すことにすると、Gauss-Codazzi-Ricci の方程式から

$$\nabla\alpha = 0 \iff \partial\alpha = 0$$

となる。ここで、 $\partial\alpha = 0$ は任意の $Z \in T_{1,0}M$ に対して、 $\nabla_Z\alpha = 0$ が成り立つことを意味する。

定義 2.3. $f : (M, \omega) \rightarrow (Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ をケーラー多様体から複素グラスマン多様体への正則等長はめ込みとする。

普遍商束の引き戻し束に誘導された接続の曲率が平行 ($\nabla R^{f^*Q} = 0$) であるときに、 f は**平行曲率条件**を満たすという。

f の第 2 基本形式の $(2, 0)$ -成分を α と表したとき、 $\alpha \neq 0$ であり、かつ α が反正則である、すなわち $\partial\alpha = 0$ であるとき、 f は**反正則第 2 基本形式**をもつという。

終域が複素射影空間ではない複素グラスマン多様体であれば、 $\nabla\alpha = 0 \implies \partial\alpha = 0$ は成り立つが、両者は同値な条件ではない。

したがって中川–高木の定理では、完備ケーラー多様体から複素射影空間 $Gr_{N-1}(\mathbf{C}^N)$ への平行曲率条件 ($\nabla R^{f^*\mathcal{O}(1)} = 0$) を満たし、反正則第 2 基本形式 ($\partial\alpha = 0 \iff \nabla\alpha = 0$) をもつ正則等長はめ込みが分類されたとも考えられる。

例. コンパクト対称対 $(SU(m+1), U(m))$ と対応する対称空間 $\mathbf{C}P^m$ 上の次数 2 の直線束 $\mathcal{O}(2) \rightarrow \mathbf{C}P^m$ を考える。 $\mathbf{C}^{m+1}$ を $SU(m+1)$ の標準表現とすれば、Bott-Borel-Weil の定理から、

$$H^0(\mathbf{C}P^m; \mathcal{O}(2)) = S^2\mathbf{C}^{m+1*}$$

が成り立つ。 $SU(m+1)$ の $S^2\mathbf{C}^{m+1*}$ への表現を $U(m)$ に制限することにより、 $S^2\mathbf{C}^{m+1*}$ の既約分解を得る:

$$S^2\mathbf{C}^{m+1*} = S^2\mathbf{C}^{m*} \oplus \mathbf{C}^{m*} \otimes \mathbf{C}_{-1} \oplus \mathbf{C}_{-2},$$

ここで、 $\mathbf{C}^{m*}$ は $U(m)$ の標準表現 $\mathbf{C}^m$ の双対表現であり、 $\mathbf{C}_k$ は $U(m)$ のウェイト k の 1 次元表現である。すると直線束 $\mathcal{O}(2)$ は等質ベクトル束として、

$$\mathcal{O}(2) = SU(m+1) \times_{U(m)} \mathbf{C}_{-2}$$

と表され、 $\mathcal{O}(2)$ と $S^2\mathbf{C}^{m+1*}$ による $Gr_{N-1}(S^2\mathbf{C}^{m+1*}) = P(S^2\mathbf{C}^{m+1})$ への小平埋め込みは

$$f_0([g]) = g(S^2\mathbf{C}^{m*} \oplus \mathbf{C}^{m*} \otimes \mathbf{C}_{-1})$$

となる。ただし、 $g \in SU(m+1)$ である。 f_0 は定理 2.2 の (1) に当たる中川–高木写像である。

f_0 による普遍商束の引き戻し束は $\mathcal{O}(2)$ となり、誘導接続は標準接続となる。したがって、 f_0 は**平行曲率条件**を満たす。

双対空間を考えることにより、

$$S^2\mathbf{C}^{m+1} = \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}^m \otimes \mathbf{C}_1 \oplus S^2\mathbf{C}^m$$

を得る。等質束 $V = \mathrm{SU}(m+1) \times_{\mathrm{U}(m)} S^2 \mathbf{C}^m$ に対して、Bott-Borel-Weil の定理から、

$$H^0(\mathbf{C}P^m; V) = S^2 \mathbf{C}^{m+1}$$

を得る。そこで、 f_0 の ‘ 双対写像 ’ $f_0^* : \mathbf{C}P^m \rightarrow \mathrm{Gr}_{m+1}(S^2 \mathbf{C}^{m+1})$ が

$$f_0^*([g]) = g(\mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}^m \otimes \mathbf{C}_1)$$

と定義される。 f_0^* も平行曲率条件を満たす。

一方、 $f_0^\dagger : \mathbf{C}P^m \rightarrow \mathbf{P}(S^2 \mathbf{C}^{m+1*})$ が

$$f_0^\dagger([g]) = g\mathbf{C}_2$$

と定義される。 $f_0^\dagger$ は平行曲率条件を満たさない。

しかしながら、 $f_0, f_0^*, f_0^\dagger$ すべてが反正則第 2 基本形式をもつ。

3. グラスマン多様体への写像

定理 3.1. M を完備ケーラー多様体とするとき、次の二つの条件 (I), (II) は同値である。

(I) M 上の、 $\mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ により大域的に生成される正則ベクトル束 $V \rightarrow M$ が存在し、 $\mathbf{C}^N$ が以下の条件を満たすエルミート内積を持つ。:

(i) (V, h) は平坦な部分束を持たない。

(ii) ベクトル束の完全列 (1.1) の第 2 基本形式 $B \in \Gamma(T^{0,1} \otimes V^* \otimes \mathrm{Ker} \, ev)$ が次を満たす:

(ii-a) B^*B のトレースは定数倍を除いてケーラー計量と一致する。

(ii-b) $\nabla B \in \Gamma(T^* \otimes T^* \otimes V^* \otimes \mathrm{Ker} \, ev)$ は $(0, 2)$ 成分を持たない。

(II) 全測地的正則等長はめ込み $f : M \rightarrow \mathrm{Gr}_p(\mathbf{C}^N)$ が存在する。

定理 3.2. M を完備ケーラー多様体とするとき、次の二つの条件 (I), (II) は同値である。

(I) M 上の、 $\mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ により大域的に生成される正則ベクトル束 $V \rightarrow M$ が存在し、 $\mathbf{C}^N$ が以下の条件を満たすエルミート内積を持つ。:

(i) V の誘導計量 h に関して、 (V, h) は平坦部分束を持たず、かつ (V, h) の曲率は平行である。

(ii) (1.1) の第 2 基本形式 $B \in \Gamma(T^{0,1} \otimes V^* \otimes \mathrm{Ker} \, ev)$ が次を満たす:

(ii-a) B^*B のトレースは定数倍を除いてケーラー計量と一致する。

(ii-b) $\nabla^2 B \in \Gamma(T^* \otimes T^* \otimes T^* \otimes V^* \otimes \mathrm{Ker} \, ev)$ は $(0, 3)$ 成分を持たない。

(II) 平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもつ正則等長はめ込み $f : M \rightarrow \mathrm{Gr}_p(\mathbf{C}^N)$ が存在する。

そこで、主定理を証明するために、完備ケーラー多様体から複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_p(\mathbf{C}^N)$ への平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもつ正則等長はめ込みを分類することにする。そこで中川-高木の結果の証明を我々の立場から説明する。

(G, K) をエルミート対称対とし、 $G \rightarrow G/K$ を主 K 束とみなす。対応するリー代数の直交分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ とする。ただし、 $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) は G (resp. K) のリー代数である。このとき、 G の左移動 L を利用して $L_g \mathfrak{m}$ ($g \in G$) として得られる接分布を水平部分空間とする接続が定義される。この接続を標準接続という。 V_0 を K のユニタリー表現空間としたとき、等質ベクトル束 $V \rightarrow G/K$ を

$$V = G \times_K V_0$$

と定義する。 V_0 が K の既約表現であるならば、 $V \rightarrow G/K$ は既約等質ベクトル束といわれる。標準接続から定義される $V \rightarrow G/K$ の共変微分も標準接続ということにする。

● 中川–高木の結果の証明の概要

まず、Gauss-Codazzi 方程式を使用して、 M がコンパクト型エルミート対称空間 G/K であることを導く。

$H^2(G/K; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ が成り立つので、一般化して、 $b_2 = 1$ を満たす旗多様体 N から射影空間への正則等長はめ込みを分類する。故に、小平埋め込みの分類に帰着され、正の直線束 $L \rightarrow N$ と $H^0(N; L)$ およびその内積を特定すればよい。

存在: N 上の直線束はすべて等質束なので、Bott-Borel-Weil の定理から、 $H^0(N; L)$ は G 既約表現空間となる。したがって、 $(L, H^0(N; L))$ による小平埋め込みは同変写像であり、同変性から正則等長はめ込みとなる。また $\nabla^k \alpha$ も計算可能である。

一意性: Calabi の複素射影空間への正則等長はめ込みに関する剛性定理より、分類が完成する。

● 問題点

平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもつ正則等長はめ込み $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ に対して同じ論法を用いようとする時の問題点は以下のとおりである。

- (1) M がエルミート対称空間であることを示す必要がある。
- (2) 普遍商束の引き戻し f^*Q は直線束ではないので、等質ベクトル束であることを示す必要がある。
- (3) Calabi の剛性定理はもはや使えない。
- (4) $\nabla^k \alpha$ を計算する。

以下、いくつかの用語を準備することにする [6]。

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を正則写像とすると、評価写像 $ev : \underline{\mathbf{C}}^N \rightarrow Q$ の引き戻しにより、 $f^*ev : \underline{\mathbf{C}}^N \rightarrow \Gamma(f^*Q)$ が定義される。

定義 3.3. $f^*ev : \underline{\mathbf{C}}^N \rightarrow \Gamma(f^*Q)$ が単射であるとき、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を**充満**であるという。

以後 f^*ev も ev と表す。

さらに $\mathbf{C}^N$ 上のエルミート内積を固定し、ケーラー多様体 $(Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ を考える。 $Gr_p(\mathbf{C}^N)$ 上のベクトル束の完全列 (2.1) を引き戻して、 M 上の正則ベクトル束の完全列

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow U \xrightarrow{i} M \times \mathbf{C}^N \xrightarrow{\pi} V \rightarrow 0.$$

を得る； $U := f^*S$, $V := f^*Q$ である。

定義 3.4. $V = f^*Q$ の平坦な部分束 V_0 と $\mathbf{C}^N$ の部分空間 $\mathbf{C}^r \neq \{0\}$ が存在し、 ev を $M \times \mathbf{C}^r$ に制限した束写像 $ev : \underline{\mathbf{C}}^r \rightarrow V$ が V_0 へのベクトル束としての同型写像であるとき、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ は**自明因子**をもつという。

4. ベクトル束の等質性

$f : (M, \omega) \rightarrow (Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ を正則等長はめ込みとし、ベクトル束の完全列 (3.1) の第 2 基本形式を

$$A \in \Omega^{1,0}(\text{Hom}(U, V)), \quad B \in \Omega^{0,1}(\text{Hom}(V, U))$$

とおく。

$$A_X = \pi d_X i, \quad B_X = i^* d_X \pi^*, \quad X \in TM,$$

ただし、 i^* , π^* はそれぞれ i , π の随伴写像を表す。

一点 $x \in M$ を固定し、線形写像 $B_x : T_{0,1}M_x \otimes V_x \rightarrow U_x$ を $B_x(\bar{Z} \otimes v) = (B_{\bar{Z}}v)_x$ と定義する。

$$N_{1x} := \text{Im } B_x \subset U_x$$

とおく。

定理 4.1. f が平行曲率条件を満たすならば、 $N_1 = \cup_{x \in M} N_{1x}$ は $U \rightarrow M$ の部分束となる。

次に線形写像 $(\nabla B)_x : T_{0,1}M_x \otimes T_{0,1}M_x \otimes V_x \rightarrow U_x$ を $(\nabla B)_x(\bar{Z} \otimes \bar{W} \otimes v) = (\nabla_{\bar{Z}}K)(\bar{W})v_x$ と定義し、

$$N_{2x} := \text{Im } \nabla B_x \subset U_x$$

とおく。

定理 4.2. f が平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもつならば、 $N_2 = \cup_{x \in M} N_{2x}$ は $U \rightarrow M$ の部分束となる。

定理 4.3. M を単連結なケーラー多様体とし、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を充満な自明因子を持たない正則等長はめ込みとする。

f が平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもつならば、ベクトル束 $U \rightarrow M$ はベクトル束の直交直和として $U = N_1 \oplus N_2$ と分解される。

定理 4.3 の仮定の下、次の直交直和分解:

$$M \times \mathbf{C}^N = N_2 \oplus N_1 \oplus V.$$

から定義される評価写像

$$ev_2 : M \times \mathbf{C}^N \rightarrow N_2 \oplus V$$

は全射束写像となる。

したがって、誘導写像 $\tilde{f} : M \rightarrow Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ が $\tilde{f}(x) = \text{Ker}(ev_2)_x \subset \mathbf{C}^N$ として定義される ($n_1 = \text{rank } N_1$)。 $\tilde{f}$ を f に対する**第 2 写像** という。第 2 写像はもはや正則写像ではないが、次が成り立つ。

定理 4.4. 定理 4.3 の仮定の下、第 2 写像 $\tilde{f} : M \rightarrow Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ は $\nabla d\tilde{f} = 0$ を満たすはめ込みとなる。

$Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ には Fubini-Study 計量が存在する。 $\tilde{g}$ を $\tilde{f} : M \rightarrow Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ による M 上の誘導計量とする。

補題 4.5. 定理 4.3 の仮定の下、 $\tilde{g}$ の Levi-Civita 接続は (M, ω) の Levi-Civita 接続と一致する。

定理 4.4 と補題 4.5 から、 $\tilde{f} : (M, \tilde{g}) \rightarrow Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ は全測地的はめ込みとなる。

系 4.6. (M, ω) は局所対称空間となる。

定理 4.7. (M, ω) を完備ケーラー多様体とし、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を充満な自明因子を持たない正則等長はめ込みとする。

f が平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもつならば、普遍商束の引き戻し束 $(V, h) \rightarrow M$ はコンパクト型エルミート対称空間上の等質ベクトル束となり、その引き戻し接続は標準接続となる。

注意. 部分多様体論における Gauss-Codazzi 方程式から、 M が局所対称空間であることをいうこともできる。しかし、写像を特定するためには、 $V \rightarrow M$ が等質ベクトル束であることも示しておきたいので、第 2 写像を利用した。

5. CALABI の剛性定理の一般化

定義 5.1. $f_i : M \rightarrow (Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ ($i = 1, 2$) に対して、 $S \in \mathrm{SU}(N)$ が存在して、 $f_2 = S \circ f_1$ を満たすとき、 f_1 と f_2 は**像同値**であるという。

定理 5.2. [3](Calabi) $f : (M, \omega) \rightarrow (\mathbf{C}P^n, \omega_N)$ が充満な正則等長はめ込みならば、次元 n は一意的であり、 f は像同値を除いて一意的である。

ところが、一般の複素グラスマン多様体への正則等長はめ込みに対しては上の剛性定理は成立しない。そこで、別のアプローチを試みる。

定義 5.3. エルミート正則ベクトル束 $(V, h) \rightarrow M$ のエルミート接続の曲率形式 R が

$$(5.1) \quad h(R(Z, \bar{Z})v, v) > 0 \quad \forall Z \in T_{1,0}M_x \setminus \{0\}, \forall v \in V_x \setminus \{0\},$$

を満たすならば、 (V, h) を正のエルミート正則ベクトル束であるという。 $>$ を $\geq$ で置き換えたときに (5.1) が成り立つならば、 (V, h) を半正のエルミート正則ベクトル束であるという。

注意. 正則ベクトル束 $V \rightarrow M$ に対して、エルミート計量 h が存在して、 (V, h) が正 (resp. 半正) となるならば、 $V \rightarrow M$ を**正** (resp. **半正**) の正則ベクトル束であるという [4]。

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_n(\mathbf{C}^{n+1}) = \mathbf{C}P^n$ を充満な正則等長はめ込みとする。このとき、 $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbf{C}P^n$ の M への引き戻し束は正の直線束でありその曲率形式は $R^{f^*\mathcal{O}(1)} = -\sqrt{-1}\omega$ となる。逆に正則写像 $f : (M, \omega) \rightarrow Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ に対して、 $f^*\mathcal{O}(1) \rightarrow M$ の曲率形式が $R^{f^*\mathcal{O}(1)} = -\sqrt{-1}\omega$ を満たしているならば (したがって、 $f^*\mathcal{O}(1) \rightarrow M$ は正である)、 f は定数倍を除いて正則等長はめ込みである。

定義 5.4. (V, h, ∇) を順に M 上のベクトル束とその計量および計量を保つ接続とする。 f を M から $(Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ への写像とする。 f による普遍商束の引き戻し束 $(f^*Q, f^*h_Q, \nabla^{f^*Q})$ が (V, h, ∇) と同型であるとき、 f は (V, h, ∇) に対するゲージ条件を満たすという。

(V, h) を複素多様体上のエルミート計量を持つ正則ベクトル束 (エルミート正則ベクトル束) とすれば、エルミート接続といわれる接続 ∇ が一意的に存在する。このとき、正則写像 $f : M \rightarrow (Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ が (V, h, ∇) に対するゲージ条件を満たすとき、省略して f は (V, h) に対するゲージ条件を満たすという。

すると上記の Calabi の剛性定理は次のように言い換えられる。

定理 5.5. (Calabi) (M, ω) をケーラー多様体、 $(L, h) \rightarrow M$ をそのエルミート接続の曲率が $-\sqrt{-1}\omega$ となる (正の) 直線束であるとする。

このとき、充満な正則写像 $f : M \rightarrow \mathbf{C}P^n = Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ が (L, h) に対するゲージ条件を満たすならば、次元 n は一意的であり、 f は像同値を除いて一意的である。

この定理は次のように一般化される。

定理 5.6. [7] (M, ω) をケーラー多様体、 $(V, h) \rightarrow M$ を正のエルミート正則ベクトル束であるとする。

このとき、充満な正則写像 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ が (V, h) に対するゲージ条件を満たすならば、 N は一意的であり、 f は像同値を除いて一意的である。

系 5.7. (V, h) をケーラー多様体 M 上の半正のエルミート正則ベクトル束であるとする。また、正の直線束 $(L, h_L) \rightarrow M$ に対するゲージ条件を満たす複素射影空間への充満な正則写像 $\tilde{f} : M \rightarrow Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ が存在すると仮定する。

このとき、充満な正則写像 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ が (V, h) に対するゲージ条件を満たすならば、 N は一意的であり、 f は像同値を除いて一意的である。

注意. 正則写像 $f : M \rightarrow (Gr_p(\mathbf{C}^N), \omega_N)$ に対して、ベクトル束の Gauss-Codazzi 方程式より、普遍商束の引き戻し束 (f^*Q, f^*h_Q) は半正となる。

定理 5.6 をコンパクトエルミート対称空間に適用するために、次を必要とする。

補題 5.8. (G, K) をコンパクト型のエルミート対称対とし、 (V, h) をそのエルミート接続が標準接続である既約等質ベクトル束とする。

このとき、 $V \rightarrow G/K$ の G 不変接続は標準接続に限る。

系 5.9. (G, K) を既約なコンパクト型のエルミート対称対とし、 (V, h) をそのエルミート接続が標準接続である既約等質ベクトル束とする。

f が G/K から複素グラスマン多様体への $(V^{\oplus r}, h^{\oplus r})$ に対するゲージ条件を満たす充満な正則写像ならば、 f は像同値を除いて $(\oplus^r V, H^0(G/K_0; \oplus^r V))$ による誘導写像である。また、 (V, h) は半正の正則ベクトル束である。

6. 主定理の証明の概略

(G, K) をエルミート対称対とし、 W を G の既約ユニタリー表現とする。 W 内の最低ウェイトベクトルと K から生成される W の K 部分空間を $V_0 \subset W$ とおく。 V_0 は K 既約表現空間となる。このとき、等質ベクトル束 $V \rightarrow G/K$ を

$$V = G \times_K V_0$$

と定義すれば、Bott-Borel-Weil の定理から $H^0(G/K; V) = W$ が成り立つ。したがって、 (V, W) による誘導写像 $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$ が

$$f([g]) = gV_0^\perp.$$

と定義される。この f を $(G/K, W)$ による**標準写像**という。標準写像は G 同変写像となる。

標準写像 f による普遍商束の引き戻しは G/K 上の既約等質ベクトル束 $V \rightarrow G/K$ となるが、引き戻し接続は G 不変接続となるので、補題 5.8 より、標準接続となる。したがって、標準写像 f は平行曲率条件 $(\nabla R^{f^*Q} = 0)$ を満たす。

K の中心を $U(1)$ とすれば、 $K = K_0 U(1)$ と表せる。表現の部分群 K への制限により、 G 既約表現空間 W を K 表現空間とみなせば、

$$(6.1) \quad W = N_l \otimes \mathbf{C}_{i(l)} \oplus N_{l-1} \otimes \mathbf{C}_{i(l-1)} \oplus \cdots \oplus N_0 \otimes \mathbf{C}_{i(0)},$$

という K 表現空間としての分解（既約分解ではない）を得る。ただし、 N_j ($j = 0, 1, \dots, l$) は K_0 表現空間であり、 $\mathbf{C}_k$ は $U(1)$ のウェイト k の 1 次元既約表現である。また、 $i(0) < i(1) < \cdots < i(l-1) < i(l)$ を満たしているとする。 $V_0 = N_0 \otimes \mathbf{C}_{i(0)}$ である。分解 (6.1) は $(G/K, W)$ に対する l 階の**法分解**といわれる。

定理 6.1. (G, K) をエルミート対称対とし、 W を G の既約表現とする。 $(G/K, W)$ による標準写像を f とおく。

(i) f が全測地的部分多様体である ($\alpha = 0$) ためには W が $(G/K, W)$ に対する 1 階の法分解をもつことが必要十分である。

(ii) f が反正則第 2 基本形式をもつ ($\alpha \neq 0, \partial\alpha = 0$) ためには W が $(G/K, W)$ に対する 2 階の法分解をもつことが必要十分である。

定義 6.2. 標準写像 f による普遍商束の引き戻し束上の誘導接続のホロノミー群が各ファイバー上で既約であれば、 f を既約型という。そうでないとき、 f を直和型という。

定理 6.3. (M, ω) を完備ケーラー多様体とし、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を充満な自明因子を持たない正則等長はめ込みとする。

$f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ が全測地はめ込みであり、既約型であるならば、 f は以下の標準写像の一つである。

- (1) $(\mathbf{C}P^n, W(\varpi_i))$ ($i = 1, \dots, n$)
- (2) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_n))$ f は恒等写像である。
- (3) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_1))$ f は恒等写像の双対写像である。
- (4) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n+1}), W(\varpi_n))$
- (5) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_{n-1}))$, $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_n))$
- (6) $(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), W(\varpi_1))$,
- (7) $(\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n), W(\varpi_1))$

f が直和型であれば、 f は上の表にある既約型の標準写像 f_j ($j = 1, \dots, l$) を用いて、

$$f = f_1 \times \dots \times f_l,$$

と表される。

注意. より正確には、 $f_i(x) = \mathrm{Ker} \, ev_{ix} \subset W_i$ ($i = 1, \dots, l$) であるとき、直和型標準写像 $f = f_1 \times \dots \times f_l$ は、

$$ev_x = (ev_{1x}, \dots, ev_{lx}) : W_1 \oplus \dots \oplus W_l \rightarrow V_{1x} \oplus \dots \oplus V_{lx}$$

を用いて、 $f(x) = \mathrm{Ker} \, ev_x$ と定義される。

定理 6.4. (M, ω) を完備ケーラー多様体とし、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を充満な自明因子を持たない正則等長はめ込みとする。

f が平行曲率条件を満たし、反正則第 2 基本形式をもち、かつ既約型であるならば、 f は以下の標準写像の一つである。

- (1) $(M, \mathfrak{g})$, $M = G/K$: コンパクト型のエルミート対称空間,
- (2)* $(\mathbf{C}P^n, W(\varpi_i + \varpi_j) \text{ or } W(\varpi_{n+1-i} + \varpi_{n+1-j}))$, $i \leq j$,
- (3) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(2\varpi_1) \text{ or } W(2\varpi_n))$, $2 \leq p \leq n-1$.
- (4)* $(Gr_2(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_i) \text{ or } W(\varpi_{n+1-i}))$, $2 \leq i \leq n-1$.
- (5) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_2) \text{ or } W(\varpi_{n-1}))$, $3 \leq p \leq n-2$.
- (6)* $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n+1}), W(\varpi_i))$, $1 \leq i \leq n-1$.
- (7) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n+1}), W(2\varpi_n))$,
- (8)* $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_i))$, $1 \leq i \leq n-2$.
- (9) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(2\varpi_{n-1}) \text{ or } W(2\varpi_n))$, ($n : \text{odd}$).
- (10) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(2\varpi_{n-1}))$, ($n : \text{even}$).
- (11) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(2\varpi_n))$, ($n : \text{even}$).
- (12) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_{n-1} + \varpi_n))$,
- (13) $(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), W(\varpi_2))$, (14) $(\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n), W(2\varpi_1))$,
- (15)* $(\mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5), W(\varpi_4) \text{ or } W(\varpi_5))$.
- (16) $(\mathrm{SO}(12)/\mathrm{U}(6), W(\varpi_5))$. (17) $(\mathrm{SO}(12)/\mathrm{U}(6), W(\varpi_6))$.
- (18)* $(E_6/\mathrm{Spin}(10) \times \mathrm{U}(1), W(\varpi_1) \text{ or } W(\varpi_6))$.
- (19) $(E_6/\mathrm{Spin}(10) \times \mathrm{U}(1), W(\varpi_2))$, (20) $(E_7/E_6 \times \mathrm{U}(1), W(\varpi_1))$.
- (21)* $(M_1 \times M_2, W(\lambda_1) \otimes W(\lambda_2))$, 各 $i = 1, 2$ に対して、 $(M_i, W(\lambda_i))$ は定理 6.3 内の (1), $\dots$, (7) のいずれかである。

f が直和型であれば、 f は上の表にある既約型の標準写像 f_j ($j = 1, \dots, l$) を用いて、

$$f = f_1 \times \dots \times f_l,$$

と表される。

注意. *がついている写像は中川–高木写像である。ただし、(2) では $i = j = 1$ 、(4) では $i = 2$ 、(6),(8) では $i = 1$ 、(21)* では M_1, M_2 いずれも複素射影空間かつ $\lambda_i = \varpi_1$ のときのみ、中川–高木写像である。

REFERENCES

- [1] R. Bott and L.W.Tu, “Differential forms in algebraic topology”, Springer, New York (1995)
- [2] N. Bourbaki, “Groupes et algèbres de Lie”, Hermann, Paris (1975)
- [3] E.Calabi, *Isometric Imbedding of Complex Manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1–23
- [4] P.Griffiths, *Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles*, Global Analysis, Univ.Tokyo Press, Tokyo (1969), 185–251
- [5] S.Kobayashi, “Differential Geometry of Complex Vector Bundles”, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987)
- [6] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmann manifolds*, arXiv:mathDG/1408.1504
- [7] Y.Nagatomo, *Holomorphic maps into Grassmann manifolds (Harmonic maps into Grassmann manifolds III)*, Annals of Global analysis and Geometry **60** (2021), 33–63
- [8] H.Nakagawa and R.Takagi, *On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 638–667
- [9] K.Tsukada, *Parallel Kaehler Submanifolds of Hermitian Symmetric Spaces*, Math.Z **190** (1985), 129–150

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MEIJI UNIVERSITY, HIGASHI-MITA, TAMA-KU, KAWASAKI-SHI, KANAGAWA 214-8571, JAPAN

Email address: yasunaga@meiji.ac.jp