

三種の不変量による周期的極小曲面の モジュライ空間の幾何構造について

庄田 敏宏*

関西大学 システム理工学部 数学科

祝還暦・小池直之教授

3次元 Euclid 空間内の三重周期的極小曲面 $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, 界面活性剤の膜の数学的モデルであることが知られており, 数学以外分野, 物理学, 化学, 結晶学などで研究されている対象である. 周期性を表す 3 方向の線型独立なベクトルによる格子 Λ で全空間なる $\mathbb{R}^3$ の商集合をとると, $\tilde{f}$ は 3 次元平坦トーラス $\mathbb{R}^3/\Lambda$ 内の向き付けられた閉極小曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Lambda$ で表し直される. 後者は閉曲面という古典的な状況であるので, 複素構造の変形理論を始めとした壮大な理論が確立されている対象であり, 議論が円滑に展開できるため, 主に後者を扱うものとする.

平坦トーラス内の閉極小曲面全体のモジュライ空間の研究は, Pirola [14], Arezzo-Pirola [1] によるものと, 江尻 [3], [4] によるものがある. 前者は変形理論の観点からのアプローチで, 後者は調和写像論・カタストロフィー理論・複素ラグランジュ部分多様体論を組み合わせたものである. 本稿では後者の理論による研究成果を紹介するが, モジュライ空間の定式化の方法は前者の方が予備知識が少なく導入できるため, 前者の設定を織り交ぜながら議論する. 概略は次節に譲るが, モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は複素代数多様体, 即ち, 正則関数たちの零点集合の構造をもち, さらに, 何らかの非退化性を導入することができる. $\mathcal{M}$ はその非退化点全体の集合による連結成分に分割され, その各連結成分において, 三種類の幾何的値, 即ち, Morse 指数・退化次数・符号数は一定値となる. この三種の幾何的値によって, モジュライ空間 $\mathcal{M}$ の構造を解明するというのが, 我々の共同研究の趣旨である.



*本講演内容は, 科学研究費 (基盤研究 (C) 一般「幾何学的不変量による周期的極小曲面のモジュライ空間の研究」課題番号: 20K03616) の援助を受けた研究成果であり, 江尻典雄氏との共同研究の結果に基づくものである.

1 幾何的量

種数 γ なる向き付けられた閉曲面 M から 3 次元平坦トーラス内へのはめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Lambda$ に対して、誘導計量により面積汎関数 $A(f)$ が定義される:

$$A(f) = \int_M dv.$$

$\{f_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ を $f_0 = f$ なる f の任意の変形とすると、極小はめ込みとは、面積汎関数の臨界点、即ち、

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(f_t) = 0$$

なるはめ込み f のことである。なお、良く知られている考察にて、 $f(M)$ における単位法線ベクトル場 N と M 上滑らかな関数 u を用いて、

$$\left. \frac{df_t}{dt} \right|_{t=0} = uN$$

として議論を限定させても一般性を失わないことが知られている、このとき、面積汎関数の第 2 変分は、Laplacian Δ および Gauss 曲率 K を用いて、以下で与えられる:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} A(f_t) = \int_M [(\Delta - 2K)u]u dv.$$

これにより、2 階の楕円型偏微分作用素の固有値問題 $(\Delta - 2K + \lambda)u = 0$ が得られる。 $\Delta - 2K$ を **Jacobi 作用素**、 λ を**固有値**、 u を固有値 λ の**固有関数**という。Jacobi 作用素の負の固有値の個数を重複度も込みで数えたものを極小曲面の **Morse 指数**といい Ind で表す。また、0 固有値の重複度を極小曲面の**退化次数**といい、 Nul で表す。

次に、極小曲面を与える閉曲面 M に、誘導計量と適合した等温座標によって、Riemann 面の構造を入れて議論する。このとき、3 次元平坦トーラス $\mathbb{R}^3/\Lambda$ 内の極小はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Lambda$ は次のように表される:

$$f(p) = \Re \int_{p_0}^p {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

ただし、 $p_0 \in M$ は定点であり、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は M 上の正則微分で次を満たすものである:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ には共通零点がない,} \quad (1)$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0, \quad (2)$$

$$\left\{ \Re \int_C {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid C \in H_1(M, \mathbb{Z}) \right\} \text{ は } \Lambda \text{ に含まれ, かつ, } \mathbb{R}^3 \text{ の格子になる.} \quad (3)$$

(3) は M 上の標準ホモロジー基底によって記述し直される．実際, $\{A_j, B_j\}_{j=1}^\gamma$ を M 上の標準ホモロジー基底とすると,

$$\Omega_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} \int_{A_1} \omega_1 & \dots & \int_{A_\gamma} \omega_1 & \int_{B_1} \omega_1 & \dots & \int_{B_\gamma} \omega_1 \\ \int_{A_1} \omega_2 & \dots & \int_{A_\gamma} \omega_2 & \int_{B_1} \omega_2 & \dots & \int_{B_\gamma} \omega_2 \\ \int_{A_1} \omega_3 & \dots & \int_{A_\gamma} \omega_3 & \int_{B_1} \omega_3 & \dots & \int_{B_\gamma} \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{\mathbb{R}} := \Re(\Omega_{\mathbb{C}})$$

が定義される． $\Omega_{\mathbb{C}}$ は $3 \times 2\gamma$ 複素行列であり, これを**複素周期行列**という．また, $\Omega_{\mathbb{R}}$ は $3 \times 2\gamma$ 実行列であり, これを**実周期行列**という．(3) は実周期行列によって, 次のように書き直される：

(3) $\Leftrightarrow \Omega_{\mathbb{R}}$ の 2γ 個の列ベクトルが Λ に含まれるような格子を定める．

以上の考察から,

$$\mathcal{M} := \{(M, \{A_j, B_j\}_{j=1}^\gamma, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ は (1) と (2) を満たす}\}$$

と定め, $\mathcal{M}$ 上の**周期写像** π を

$$\pi : \mathcal{M} \ni (M, \{A_j, B_j\}_{j=1}^\gamma, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \Omega_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^{6\gamma} \cong \mathbb{C}^{3\gamma} \times \mathbb{C}^{3\gamma} \cong T^*\mathbb{C}^{3\gamma}$$

で定義する． $(z_1, \dots, z_{3\gamma}, w_1, \dots, w_{3\gamma})$ を $\mathbb{C}^{3\gamma} \times \mathbb{C}^{3\gamma}$ 上の標準的な局所複素座標とすると, $T^*\mathbb{C}^{3\gamma}$ には

$$\omega_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^{3\gamma} dw_j \wedge dz_j$$

によって, 複素シンプレクティック多様体の構造が与えられる．さらに, $\eta := -i\omega_{\mathbb{C}}(*, **)$ は $T^*\mathbb{C}^{3\gamma}$ 上の符号数 $(3\gamma, 3\gamma)$ のエルミート形式を定める．なお, 符号数とは正の固有値の個数と負の固有値の個数を重複度も込みで数えたものの組である． $T^*\mathbb{C}^{3\gamma}$ 上のエルミート形式 η を周期写像 π によって引き戻したものが非退化であるとき, $\mathcal{M}$ 上にエルミート形式が定義され, その符号数を (p, q) とする．このとき, この非退化点の集合は複素 3γ 次元の多様体になる．したがって, $p + q = 3\gamma$ である．この符号数を極小曲面の**符号数**という．

以上の議論は, Cortés [2], 江尻 [3], [4] の内容である．

2 結果

1990 年代に物理学者たちによって種数 3 の変形族が数多く構成された [11], [10]．なお, Gauss-Bonnet の定理により, 種数 3 がこの場合の最小種数となることが判る．我々の最初のプロジェクトは, これらの三種の幾何的量を計算することであった．鍵になる計算が複雑な楕円積分を成分にもつ 18 次実対称行列の固有値に関するものなので, 手計算では対応できず, 数値計算を使用してあるものの, 次の結果を得た．

定理 ([5], [7], [8]).

H 族, rPD 族, tP/tD 族, tCLP 族, rG 族, tG 族, mPCLP/mDCLP 族の非退化点集合は, 次の 3 つの場合で構成される:

$$(\text{Ind}, \text{Nul}, (p, q)) = (1, 3, (4, 5)), (2, 3, (5, 4)), (3, 3, (6, 3)).$$

注意 1.

上述の通り, Morse 指数が 1, 2, 3 の 3 つしか登場しないことから, おそらく Morse 指数はこの 3 つしかないであろうと予想を立て, これを “One-two-three conjecture” と名付けた.

注意 2.

上述の H 族, rPD 族, tP/tD 族において, Morse 指数が 1 の場合の安定性 (Ross [15] によって考察された体積保存安定性) を示したのが [6] である.

次なるプロジェクトは高種数の場合であり, その第一段階として種数 4 の場合を扱った. しかし, 種数 3 の場合と比べて議論がかなり難解になる上に, 具体例が少ない. 有名な例としては, 1970 年に Schoen [16] によって発見された I-WP 曲面というものがあるが, 昨年はその幾何的量を数学的に特定した:

定理 ([9]).

I-WP 曲面において, $(\text{Ind}, \text{Nul}, (p, q)) = (7, 3, (10, 2))$ となる.

今回, 報告するのは, [17], [12], [18] で与えている種数 4 の具体例における三種の幾何的量を数学的に特定したことである.

定理.

M を $w^3 = z^6 - 1$ なる種数 4 の Riemann 面とする. このとき,

$$f(p) = \int_{p_0}^p {}^t(1 - z^2, i(1 + z^2), 2z) \frac{dz}{w^2}$$

は 3 次元平坦トーラス内の極小はめ込みを定める. この極小曲面において, $(\text{Ind}, \text{Nul}, (p, q)) = (5, 3, (8, 4))$ となる.

注意 3.

この具体例の Morse 指数と退化次数は, Montiel-Ros [13] による結果を用いれば, システムティックに求めることができるが, 今回の結果はその手法とは異なる手法である.

参考文献

- [1] C. Arezzo and G. P. Pirola, *On the existence of periodic minimal surfaces*, J. Algebraic. Geom. **8** (1999), 765–785.

- [2] V. Cortés, *On Hyper Kähler Manifolds associated to Lagrangian Kähler Submanifolds of $T^*\mathbb{C}^n$* , Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 3193–3205.
- [3] N. Ejiri, *A differential-geometric Schottky problem, and minimal surfaces in tori*, Contemp. Math. **308** (2002), 101–144.
- [4] N. Ejiri, *A generating function of a complex Lagrangian cone in $\mathbb{H}^n$* , Comm. Anal. Geom. **30** (2022), 1955–2009.
- [5] N. Ejiri and T. Shoda, *The Morse index of a triply periodic minimal surface*, Differential Geom. Appl. **58** (2018), 177–201.
- [6] N. Ejiri and T. Shoda, *Stability of triply periodic minimal surfaces*, Differential Geom. Appl. **67** (2019), 101555.
- [7] N. Ejiri and T. Shoda, *The existence of rG Family and tG Family, and their geometric invariants*, Mathematics **8** (2020), 1693; doi:10.3390/math8101693.
- [8] N. Ejiri and T. Shoda, *The geometric invariants for mPCLP/mDCLP family*, Hokkaido Math. J. **51** (2022), 487–530.
- [9] N. Ejiri and T. Shoda, *The Morse index and the signature of a minimal surface in a flat torus*, submitted.
- [10] A. Fogden, M. Haeberlein, and S. T. Hyde, *Generalizations of the gyroid surface*, J. Phys. I France **3** (1993), 2371–2385.
- [11] A. Fogden, and S. T. Hyde, *Parametrization of triply periodic minimal surfaces II. Regular class solutions*, Acta. Cryst. (1992), **A48**, 575–591.
- [12] S. Fujimori, T. Shoda, *Triplically periodic minimal surfaces of genus 4*, EG-Models, http://www.eg-models.de/models/Surfaces/Minimal_Surfaces/2005.10.001/_direct_link.html.
- [13] S. Montiel and A. Ros, *Schrödinger operator associated to a holomorphic map*, Global Differential Geometry and Global Analysis, Lecture note in Math. **1481** (1991), 147–174.
- [14] G. P. Pirola, *The infinitesimal variation of the spin abelian differentials and periodic minimal surfaces*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 393–426.
- [15] M. Ross, *Schwarz’ P and D surfaces are stable*, Differential Geom. Appl. **2** (1992), no. 2, 179–195.

- [16] A. Schoen, *Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections*, NASA. TN. D-**5541** May (1970).
- [17] T. Shoda, *New components of the moduli space of minimal surfaces in 4-dimensional flat tori*, J. London Math. Soc. (2) **70** (2004), no. 3, 797–816.
- [18] T. Shoda, *An example of Jacobian variety and its applications to minimal surfaces*, Results Math. **56** (2009), 23–39.

3 昔ばなし (番外編)

筆者の HP に“ふところ手帖”という箇所がある。座頭市の作者である子母澤寛の作品から拝借した名前であるが、そこに“昔ばなし”と銘打って、筆者がかつて接した数学者たちとのエピソードが綴られている。純粋数学では、研究者間のふとした会話から新しい発想が生み出されることがしばしばある。また、その時代その時代の体験談が意外に今後の研究の指針のきっかけになることがあるため、若い世代が接する機会がなかったメンバーとのエピソードを残すという意図であった。自己満足の筆であったが、結構な人数の同業者たちが興味深く読んでくれていることを知らされたのは、その視野が正しかった証左と思われる。今回は東京理科大学の小池直之教授の還暦祝いを趣旨とする研究会の記録集ということで、小池教授に関連した昔ばなしを番外編として記す。

1994 年 4 月に東京理科大学理学部一部数学科に入学し、1998 年 3 月に卒業、1998 年 4 月に大岡山 (当時の名称は、東京工業大学理工学研究科数学専攻修士課程) に進学して、師・宮岡礼子の門下に入った。2021 年 4 月に関西大学システム理工学部数学科に着任して今日に至るので、実に学部を卒業して四半世紀以上になる。そのときに生まれた層が今や大学院に進学しているという月日が流れた。1994 年当時、東京理科大学は“6 年制大学”といわれていた。進級が厳しいのか、学生たちが麻雀やら何やらにのめり込んで勉強をしないのか、留年を 2 回くらいしてから卒業する者が多かったことからくる名称であることを色々な人から聞いたものである。自分たちの代はそこまで厳しくはなかったように思うが、実際に留年する同期の桜や先輩たちもいたので、間違いとはいえないであろう。

1994 年 4 月、学部 1 年生の数学の授業は解析学、代数学、幾何学の 3 つであり、“関門科目”といわれていた。これを合格しないと進級できないので、“関門”という名前がついたそうである。解析学は宮島静雄教授が担当し、東大出版会から出ている「解析入門 (杉浦光夫著)」の 1 変数の微積分の箇所を通年で終わらせるペースで進む講義であった。容赦なく落第させる教授で、ある年は落第した学生たちと現役の学生たちで教室が溢れてしまって教務課からお叱りを受けたという噂が学生間では出回っていた。講義内容が完全に頭に入っていたのか、何も見ないで講義をして、鬼のペースで進んでいく。途中で持参した水筒で喉を潤す場面が定番であった。代数学は線形代数の講義で、担当者は眞田克典講師であった。丁寧な講義で学生の理解を考えながら進めていた印象である。幾何学は集合論で、担当者は根本洋明非常勤講師であった。本務校は日本大学生物資源科学部で、出身が東京理科大学であった。野田 (当時の名称、東京理科大学理工学部) で佐々木重夫教授の指導を受けた後、神楽坂 (東京理科大学理学部) にて山口誠一教授の下で学位を取った。講義中に「理科大時代の教授から「非常勤講師をやれ」といわれたので「こちらにも予定がある」と反論したのだが、「もう登録しちまった」といわれてやむなく講師

をしている」とぼやいていた。幾何学に限らず、様々な分野の観点から講義をする印象で興味深かった。奇しくも、約 360 年の間、解決されなかったフェルマーの最終定理が証明されたというニュースがあった年で、そのときは 1 時間くらいその話をしていた。

大学 2 年生のときの幾何学の講義で山口教授の講義を受けた。参考文献は「微分幾何学概説 (安達忠次著)」の曲面論の箇所だったか。このずいぶん後に「曲線と曲面の微分幾何 (小林昭七著)」を読んで、曲面論と多様体論のつながりが明快であることに感動したため、あまり良くない勉強のルートだったかと当時は思ったものである。しかし、数学科に着任する際、曲線論と曲面論の講義を担当するということで、そのバックグラウンドを学ばんと「A treatise on the Differential Geometry of curves and surfaces (Luther Pfahler Eisenhart 著, 1909 年)」に目を通した。古い書籍なので今と書法が異なり、また、解読しにくい箇所があるので、自力で解釈して読み進めた。しばらくして、「微分幾何学概説」と同じ書き方だなと読み返してみると、Eisenhart の書籍の内容が現代版の書法でクリアに書かれていることに驚いた。安達忠次教授の世代は Eisenhart の書籍で勉強して、その内容を解読したものと推測される。「曲線論・曲面論は多様体論のための入口である」という見方をしておらず、曲線や曲面そのものの内容をまとめている。このあたりは学問の進展のプロセスを感じる。空間曲線の捩率が“ねじれ”を表す理由も詳細に説明されており、曲率の発想を再認識した。「曲線と曲面の微分幾何」にも数行だけそのことが書かれているので、当然のことながら、小林昭七教授も Eisenhart の書籍の内容を理解した上で著書では省略したものと推察される。大学 3 年生の微分幾何学の講義や大学 4 年生ゼミでの内容、および大学 4 年生のときの幾何学の講義内容は HP の方の“昔ばなし”に譲る。筆者は 4 年生ゼミでは山口教授の門下にいた。

筆者の在学時は小池教授が助手だった時期で、接点は大学 1 年生および 3 年生の演習、大学 4 年生ゼミの内容の質問、その他、大学院進学の際の相談を始め多々あった。当時は若宮校舎という、数学のスタッフの研究室のための建物があった。小池教授の研究室はその 4 階の角部屋で、3 名の助手 (岡田紀夫、小池直之、飯田洋市) のシェアルームであった。1997 年当時、山口教授の下には修士に 3 名、博士に 1 名のゼミ生が在籍しており、新しい結果を小池教授が出させる仕組みだったので、非常に多忙を極めた時期であったと推察される。そのような中、学部生に質問や相談に来られても迷惑だったことであろう。

山口誠一研の大学院ゼミの後には、毎回、研究室 (若宮校舎 3 階で 2 部屋分のスペースがあった) にて飲み会が開かれた。山口教授が安部直人 (当時) 助教授に内線電話をかけて「あー、俺だ。終わった (ガチャン ← 電話を切る音)」と召喚した。山口教授はスーパーニッカの水割りを、小池教授は体重を気にし出した時期らしく、いいちこ (焼酎 ← カロリーが低いといわれていた) を、男子学生は山口教授に合わせてスーパーニッカを、女子学生はカクテル系を飲ん

でいた。酒やつまみは、山口教授が万札を学生に渡し、神楽坂校舎の目の前の大通り沿いにある酒屋で買ってくるものだから、チーズやサラミなどの乾きものしか食べ物がない。ちなみに、その際の釣銭は“山口封筒”なる封筒に貯金されていたらしく、院生が管理していたそうなのだが、おそらく山口教授は「釣りは要らねェ」と、その存在を知らなかったのではなかろうか。飲み会の雰囲気はというと、張り詰めた雰囲気学生は声が出せない状況の中、山口・安部・小池の三者のみの声が部屋に響き渡るというものであった。酒が入っていくと、絶好調になった山口教授は「○○○を俺の前に引きずり出せ!!」「いくら俺がお前を教授に推してやってもお前がちっとも論文を書かないから○○に先を越されるんだ!!」というように、今ではICレコーダーで録音された後にネットにアップされて大問題になる発言ばかりであった。学生の目の前なのだがお構いなく、それだけその会話を学生たちは漏らさないと信頼していたのであろうか。

山口誠一研では、毎年、ゼミ合宿をやっていた。軽井沢に施設があったらしく、いつもはそこを利用していたようであるが、筆者の代は生協で紹介されていたこともあって、河口湖でゼミ合宿を行った。山口誠一門下は助手、学生共に強制参加の雰囲気があったが、小池教授は最後まで参加表明を渋っていた。合宿に出発する数日前になってようやく参加表明をしたものの、河口湖に着いてから、何回か「庄田君、駅はどちらの方向かな？」なる質問をされた。今やスマホで何でも調べられるわけであるが、1997年当時は携帯電話が出始めのときで、もっている人の方が圧倒的に少ない時代であった。事前に下調べをしない限り、駅の場所などはホテルのフロントに聞かないと把握できない事情であったことを補足しておく。あまりに聞かれるものだから、

庄田予想。

小池教授は逃亡(途中帰宅)を企てている。

が頭をよぎったのであるが、今回の研究会が終わってから小池教授より「庄田予想は正しい」と確認が取れた。しかし、ここで山口教授から思わぬ台詞が飛び出る。

山口発言。

「小池、俺と相部屋で良いじゃねェか」

小池教授が「は？よっよっよろしいんですか？」とタジタジであったのは、日本古来の協調性であり、Noがいえぬ“真っ当な日本人気質”であったろう。結局、最終日まで山口教授と相部屋のゼミ合宿生活を過ごしたのであった。ただただ、あのときはご愁傷様でした、と述べて筆を置くことにする。