

概接触構造と類似の幾何構造をもつ一般 Sasaki-like 統計沈め込み

高野 嘉寿彦 (信州大学)

1 はじめに

Rao は 1945 年の論文 ([14]) で、フィッシャー情報量をリーマン計量とすることで統計的モデルが幾何学的に考察できることを示し、情報幾何学が誕生した。その後、甘利 ([3]), 甘利・長岡 ([4]) により統計多様体として発展 ([13]), 数学に限らず多くの分野に応用されている。情報幾何学における統計的モデルはリーマン計量としてフィッシャー計量をもち、確率分布の期待値から構成される振じれのない α 接続と呼ばれるアフライン接続をもつ。ここで、 α は実数である。特に、 $\alpha = 0$ のとき、レビ・チビタ接続であり、 $\alpha = 1$ のとき指数型接続または e 接続、 $\alpha = -1$ のとき混合型接続または m 接続という。 α 接続と $(-\alpha)$ 接続は計量に関して互いに双対である。

微分幾何学において (擬) リーマン沈め込みは、O'Neill ([11], [12]) と Gray ([9]) によって導入された概念であり、多くの研究成果を得ている ([6], [22], [23], etc.). 情報幾何学における統計沈め込みは安部・長谷川 ([1]) により定義された。

偶数次元ではケーラー多様体、奇数次元では佐々木多様体のようなある幾何構造をもつ代表的な研究対象がある。著者は、概複素構造や佐々木構造の $(1, 1)$ 型のテンソル場と計量に関して双対なテンソル場を定義した ([16], [17])。多項分布や負の多項分布などは離散型の、多次元正規分布やディレクレ分布などは連続型の代表的な統計的モデルである。これらの統計的モデルが偶数次元のとき e 接続及び m 接続に関して平行となる概複素構造を構成 ([18]) した。

統計多様体において、計量に関して $(1, 1)$ 型のテンソルと双対なもう一つの $(1, 1)$ 型のテンソル場を導入することができる。偶数次元の場合、概複素構造がアフライン接続に関して平行であることと、双対な概複素構造が双対なアフライン接続に関して平行であることは同値になる。このような概複素構造をもつ統計多様体を Kähler-like 統計多様体と定義 ([16]) した。同様に、奇数次元のとき、佐々木多様体と類似の構造をもつ Sasaki-like 統計多様体を定めることができる ([17])。また、全空間がこれらの空間である統計沈め込みについて考察した。

また、論文 [5] では cosymplectic-like 統計多様体とその沈め込みについて、[7] では局所 product-like 統計多様体をその超曲面について、[10] では古畑・長谷川の正則統計多様体における部分多様体の研究 ([8]) の概念を用いて反不変正則統計沈め込みを研究している。さらに、[15] では Kenmotsu-like 統計沈め込みの研究、[19] では局所 product-like 統計沈め込みの考察、四元数 Kähler-like 統計沈め込み ([20]) や para-Kähler-like 統計沈め込み ([21]) など、ある幾何構造をもつ統計多様体やその統計沈め込みの研究がある。

今回、全空間が Sasaki-like 統計多様体の統計沈め込みについて議論する。特に、構造ベクトル場が垂直である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みについて述べる。

2 統計多様体

最初に、 M を擬リーマン多様体、 ∇ を振じれがないアフライン接続とする。 ∇g が対称ならば (M, g, ∇) を統計多様体という。統計多様体に対してもう一つのアフライン接続 ∇^* を M 上のベクトル場 E, F, G に対して

$$(2.1) \quad Eg(F, G) = g(\nabla_E F, G) + g(F, \nabla_E^* G)$$

により定義する。 ∇ と ∇^* は g に関して互いに共役 (または双対) という。 ∇^* は振じれがなく、 $\nabla^* g$ は対称であり、 $(\nabla^*)^* = \nabla$ を満たす。明らかに、 (M, g, ∇^*) は統計多様体である。アフライン接続 ∇ 及び ∇^* に関する曲率テンソルをそれぞれ R 及び R^* とすると、 M 上のベクトル場 E, F, G, H に対して

$$(2.2) \quad g(R(E, F)G, H) = -g(G, R^*(E, F)H)$$

が成り立つ。ここで、 $R(E, F)G = [\nabla_E, \nabla_F]G - \nabla_{[E, F]}G$ である。これより $R = 0$ と $R^* = 0$ は同値である。 $R = 0$ のとき M は平坦であるという。アファイン接続 ∇ に関する曲率テンソル R が

$$R(E, F)G = c \{ g(F, G)E - g(E, G)F \}$$

を満たすとき、統計多様体 (M, g, ∇) を定曲率 c の（定曲率）空間という。

次の、

$$(2.3) \quad J^2 = -I$$

である $(1, 1)$ 型のテンソル場 J をもつ滑らか多様体を、概複素構造 J をもつ概複素多様体という。ここで、 I は恒等変換である。擬リーマン多様体 (M, g) において

$$(2.4) \quad g(JE, JF) = g(E, F)$$

を満たすとき、 (M, g, J) を概エルミート多様体という。概複素構造 J をもつ擬リーマン多様体 (M, g) において

$$(2.5) \quad g(JE, F) + g(E, J^*F) = 0$$

によりもう一つのテンソル場 J^* を考える。このとき、 (M, g, J) を概 Hermite-like 多様体という。 $(J^*)^* = J$, $(J^*)^2 = -I$ 及び

$$(2.6) \quad g(JE, J^*F) = g(E, F)$$

が成り立つ。これより

補題 A ([16]). (M, g, J) が概 Hermite-like 多様体であることと (M, g, J^*) が概 Hermite-like 多様体であることは同値である。

次に、概複素構造 J がアファイン接続 ∇ に関して平行であるとき、 (M, g, ∇, J) を Kähler-like 統計多様体という。式 (2.6) より

$$(2.7) \quad g((\nabla_G J)E, F) + g(E, (\nabla_G^* J^*)F) = 0$$

が成り立つから

補題 B ([16]). (M, g, ∇, J) が Kähler-like 統計多様体であることと (M, g, ∇^*, J^*) が Kähler-like 統計多様体であることは同値である。

注意 2.1. (M, g, ∇, J) を Kähler-like 統計多様体とする。 M がアファイン接続に関して定曲率空間であるとき、 M ($\dim M \geq 4$) は平坦である。

定数 c に対して曲率テンソル R が

$$(2.8) \quad R(E, F)G = \frac{c}{4} [g(F, G)E - g(E, G)F - g(F, JG)JE + g(E, JG)JF \\ + \{g(E, JF) - g(JE, F)\}JG]$$

を満たすとき、Kähler-like 統計多様体 (M, g, ∇, J) を定正則断面曲率 c の空間という。 R は $R(E, F)JG = JR(E, F)G$ 及び Bianchi の第一、第二恒等式を満たす。更に、

$$R^*(E, F)G = \frac{c}{4} [g(F, G)E - g(E, G)F - g(F, J^*G)J^*E + g(E, J^*G)J^*F \\ + \{g(E, J^*F) - g(J^*E, F)\}J^*G].$$

注意 2.2. M がケーラー多様体のとき、(2.8) を満たす M は定正則断面曲率 c の空間である ([23])。

次に、 M を $(2n+1)$ 次元多様体、 φ, ξ 及び η をそれぞれ M 上の $(1, 1)$ 型のテンソル場、ベクトル場及び 1 形式とする。次の条件

$$(2.9) \quad \eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 E = -E + \eta(E)\xi$$

を満たすとき、 M は概接触構造 (φ, ξ, η) をもつといい、そのような M を概接触多様体という。このとき $\varphi\xi = 0$, $\eta(\varphi E) = 0$ が成り立つ。

例 1. $\mathbb{R}^5$ を局所座標系 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ をもつ滑らかな多様体とし、

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (-x_4, 0, x_2, 0, 1)$$

とする。このとき、 $\mathbb{R}^5$ は概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触多様体である。1 形式 η は

$$\eta \wedge (d\eta)^2 = 2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \neq 0$$

を満たすから接触構造になる。

更に、

$$(2.10) \quad \eta(E) = \varepsilon g(\xi, E)$$

とおくと、 $g(\xi, \xi) = \varepsilon$ を得る。ここで、 $\varepsilon = -1$ または $+1$ であり、それぞれに対応して ξ は時間的または空間的という。

概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ擬リーマン多様体 (M, g) において

$$(2.11) \quad g(\varphi E, F) + g(E, \varphi^* F) = 0$$

によりもう一つの $(1, 1)$ 型のテンソル場 φ^* を定める。このとき、 (M, g) は概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体という。 $(\varphi^*)^* = \varphi$, $(\varphi^*)^2 E = -E + \eta(E)\xi$, $\varphi^* \xi = 0$, $\eta(\varphi^* E) = 0$ 及び

$$(2.12) \quad g(\varphi E, \varphi^* F) = g(E, F) - \varepsilon \eta(E) \eta(F)$$

が成り立つ。

補題 C ([17]). (M, g) が概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体であることと、概接触構造 (φ^*, ξ, η) をもつ概接触計量多様体であることは同値である。

例 2. $M^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_2 > 0, x_4 > 0\} \subset \mathbb{R}^5$ は例 1 の概接触構造 (φ, ξ, η) をもち、

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon x_4^2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon x_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon x_2^2 & 1 & \varepsilon x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\varepsilon x_4 & 0 & \varepsilon x_2 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{x_2 x_4} & -\frac{\varepsilon}{x_2 x_4} & -1 & \frac{1}{x_2^2 x_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{x_2 x_4} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{\varepsilon}{x_2 x_4} & 0 \\ -\frac{x_2^2 - \varepsilon}{x_2} & -\frac{\varepsilon}{x_2} & -x_4 & -\frac{\varepsilon x_2^2 - 1}{x_2^2 x_4} & 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 (M, g) は概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体であり、 (M, g) は概接触構造 (φ^*, ξ, η) をもつ。

次の条件を満たす Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ (M, g, ∇) を Sasaki-like 統計多様体という：

$$(2.13) \quad \nabla_E \xi = -\varepsilon \varphi E,$$

$$(2.14) \quad (\nabla_E \varphi) F = g(E, F) \xi - \varepsilon \eta(F) E.$$

式 (2.14) と $\eta(\varphi F) = 0$ を用いると $g(\nabla_E^* \xi, \varphi F) + \varepsilon g(E, F) - \eta(E) \eta(F) = 0$ となから、 $\nabla_E^* \xi = -\varepsilon \varphi^* E$ を得る。式 (2.11) より $g((\nabla_G \varphi) E, F) + g(E, (\nabla_G^* \varphi^*) F) = 0$ だから $(\nabla_G^* \varphi^*) F = g(G, F) \xi - \varepsilon \eta(F) G$ が得られる。これより

補題 2.1. (M, g, ∇) が Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体であることと、 (M, g, ∇^*) が Sasaki-like 構造 (φ^*, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体であることは同値である。

例 3. (M, g) を例 2 の概接触計量多様体とする。アファイン接続 ∇ を次のようにおく：

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1} \partial_1 &= -\varepsilon x_2 \partial_1 - \varepsilon x_4 \partial_3 - \varepsilon x_4 \partial_4 + \varepsilon x_2 x_4 \partial_5, \\
\nabla_{\partial_1} \partial_2 &= \nabla_{\partial_2} \partial_1 = -\varepsilon x_4 \partial_4, \\
\nabla_{\partial_1} \partial_3 &= \nabla_{\partial_3} \partial_1 = \nabla_{\partial_1} \partial_4 = \nabla_{\partial_4} \partial_1 = \varepsilon x_4 \partial_2, \\
\nabla_{\partial_1} \partial_5 &= \nabla_{\partial_5} \partial_1 = \varepsilon \partial_3 - \varepsilon x_2 \partial_5, \\
\nabla_{\partial_2} \partial_2 &= \nabla_{\partial_4} \partial_4 = \nabla_{\partial_5} \partial_5 = 0, \\
\nabla_{\partial_2} \partial_3 &= \nabla_{\partial_3} \partial_2 = \varepsilon x_2 \partial_4 + \partial_5, \\
\nabla_{\partial_2} \partial_4 &= \nabla_{\partial_4} \partial_2 = \partial_5, \\
\nabla_{\partial_2} \partial_5 &= \nabla_{\partial_5} \partial_2 = \varepsilon \partial_4, \\
\nabla_{\partial_3} \partial_3 &= -\varepsilon x_2 \partial_1 - \varepsilon x_4 \partial_3 + \varepsilon x_4 \partial_4 - \varepsilon x_2 x_4 \partial_5, \\
\nabla_{\partial_3} \partial_4 &= \nabla_{\partial_4} \partial_3 = -\varepsilon x_2 \partial_2, \\
\nabla_{\partial_3} \partial_5 &= \nabla_{\partial_5} \partial_3 = -\varepsilon \partial_1 - \varepsilon x_4 \partial_5, \\
\nabla_{\partial_4} \partial_5 &= \nabla_{\partial_5} \partial_4 = -\varepsilon \partial_2.
\end{aligned}$$

ここで、 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $\xi = \partial_5$ である。これより、 (M, g, ∇) は Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体である。

Sasaki-like 統計多様体において

$$(2.15) \quad R(E, F)\xi = \eta(F)E - \eta(E)F,$$

$$(2.16) \quad R(E, F)\varphi G - \varphi R(E, F)G = \varepsilon\{g(F, \varphi G)E - g(E, \varphi G)F - g(F, G)\varphi E + g(E, G)\varphi F\}$$

が成り立つ。これより

補題 2.2. (M, g, ∇) を Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体とする。 (M, g, ∇) が定曲率 c の空間ならば $c = \varepsilon$ である。即ち、

$$R(E, F)G = \varepsilon\{g(F, G)E - g(E, G)F\}.$$

アファイン接続 ∇ に関する曲率テンソル R が

$$\begin{aligned}
(2.17) \quad R(E, F)G &= \frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)\{g(F, G)E - g(E, G)F\} \\
&\quad + \frac{1}{4}(c - \varepsilon)[\varepsilon\eta(G)\{\eta(E)F - \eta(F)E\} + \{g(E, G)\eta(F) - g(F, G)\eta(E)\}\xi \\
&\quad - g(F, \varphi G)\varphi E + g(E, \varphi G)\varphi F + \{g(E, \varphi F) - g(\varphi E, F)\}\varphi G]
\end{aligned}$$

を満たすとき、Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体 (M, g, ∇) を定 φ 正則断面曲率 c の空間という ([2])。ここで c は定数である。 $c = \varepsilon$ ならば Sasaki-like 統計多様体は定曲率 ε の空間である。このとき、

$$\begin{aligned}
R^*(E, F)G &= \frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)\{g(F, G)E - g(E, G)F\} \\
&\quad + \frac{1}{4}(c - \varepsilon)[\varepsilon\eta(G)\{\eta(E)F - \eta(F)E\} + \{g(E, G)\eta(F) - g(F, G)\eta(E)\}\xi \\
&\quad - g(F, \varphi^* G)\varphi^* E + g(E, \varphi^* G)\varphi^* F + \{g(E, \varphi^* F) - g(\varphi^* E, F)\}\varphi^* G].
\end{aligned}$$

注意 2.3. M が佐々木多様体で $\varepsilon = 1$ ならば式 (2.17) を満たす M は定 φ 正則断面曲率 c をもつ空間である ([23])。

3 統計沈め込み

M と B を擬リーマン多様体とする。 π が最大階数をもち、 π_* は水平ベクトルの長さを保つとき、全射 $\pi: M \rightarrow B$ を擬リーマン沈め込みといい、 M を全空間、 B を底空間という。 $\dim M = m$, $\dim B = n$ とする。各点 $x \in B$ に対して、誘導計量 $\bar{g}$ をもつ擬リーマン部分多様体 $\pi^{-1}(x)$ をファイバーといい、 $\bar{M}_x$ または単に $\bar{M}$ で表す。各ファイバーの次元は常に $m - n (= s)$ である。ファイバーに接する M 上のベクトル場を垂直、ファイバーに直交するとき水平という。各点 $p \in M$ に対して全空間 M の接空間 $T_p M$ の垂直及び水平な部分空間をそれぞれ $\mathcal{V}_p(M)$ 及び $\mathcal{H}_p(M)$ で表す。 M の接束 TM の垂直及び水平分布をそれぞれ $\mathcal{V}(M)$ 及び $\mathcal{H}(M)$ とする。このとき、 TM は $\mathcal{V}(M)$ と $\mathcal{H}(M)$ の直和である。射影を $\mathcal{V}: TM \rightarrow \mathcal{V}(M)$ 及び $\mathcal{H}: TM \rightarrow \mathcal{H}(M)$ とする。 M 上のベクトル場 X に対して $\pi_*(X_p) = X_{*\pi(p)}$ である B 上のベクトル場 X_* が存在するとき射影可能といい、 X と X_* は π -関係であるという。 M 上のベクトル場 X が射影可能で水平であるとき、basic という。このとき ([6], [9], [11])

補題 F. M 上のベクトル場 X, Y が B 上のベクトル場 X_*, Y_* と π -関係にある basic ならば

- (1) $g(X, Y) = g_B(X_*, Y_*) \circ \pi$ である。ここで、 g は M の計量、 g_B は B の計量である。
- (2) $\mathcal{H}[X, Y]$ は basic, $[X_*, Y_*]$ と π -関係にある。
- (3) $\mathcal{H}\nabla'_X Y$ は basic, $\hat{\nabla}'_{X_*} Y_*$ と π -関係にある。 ∇' と $\hat{\nabla}'$ は M と B の Levi-Civita 接続である。

(M, g, ∇) を統計多様体、 $\pi: M \rightarrow B$ を擬リーマン沈め込みとする。 $\bar{M}$ のアファイン接続を $\bar{\nabla}$, $\bar{\nabla}^*$ とする。 M 上の垂直ベクトル場 U, V に対して $\bar{\nabla}_U V$ 及び $\bar{\nabla}_U^* V$ は M 上の垂直ベクトル場である。 $\bar{\nabla}_U V = \mathcal{V}\nabla_U V$ 及び $\bar{\nabla}_U^* V = \mathcal{V}\nabla_U^* V$ である。更に、 $\bar{\nabla}$ 及び $\bar{\nabla}^*$ は捩じれがなく、計量 $\bar{g}$ に関して互いに双対である。これより $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla})$ 及び $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla}^*)$ は統計多様体である。

沈め込み $\pi: M \rightarrow B$ が点 $p \in M$ と basic ベクトル場 X, Y に対して $\pi_*(\nabla_X Y)_p = (\hat{\nabla}_{X_*} Y_*)_{\pi(p)}$ を満たすとき、 $\pi: (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \hat{\nabla})$ を統計沈め込みという ([1])。 M 上のベクトル場 E, F に対して (1,2) 型のテンソル場 T 及び A を

$$T_E F = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E} \mathcal{V}F + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E} \mathcal{H}F, \quad A_E F = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{V}F + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{H}F$$

により定義する。アファイン接続 ∇ を ∇^* に置き換えたテンソル場をそれぞれ T^* 及び A^* とする。このとき、 $T^{**} = T$ 及び $A^{**} = A$ である。垂直ベクトル場に対して T 及び T^* は対称である。 $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ 及び $U, V \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$(3.1) \quad g(T_U V, X) = -g(V, T_U^* X), \quad g(A_X Y, U) = -g(Y, A_X^* U)$$

が成り立つ。統計沈め込みにおいて

定理 G ([1]). $\pi: M \rightarrow B$ を擬リーマン沈め込みとする。 (M, g, ∇) が統計多様体であることと次の条件が成り立つことは同値である：

- (1) $\mathcal{H}S_V X = A_X V - A_X^* V$.
- (2) $\mathcal{V}S_X V = T_V X - T_V^* X$.
- (3) 各 $x \in B$ に対して $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla})$ は統計多様体である。
- (4) $(B, g_B, \hat{\nabla})$ は統計多様体である。

ここで、 M 上のベクトル場 E, F に対して $S_E F = \nabla_E F - \nabla_E^* F$ である。

統計沈め込み $\pi: (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \hat{\nabla})$ に対して次が成り立つ ([16])。

補題 H. 水平ベクトル場 X, Y に対して $A_X Y = -A_Y^* X$ である。

式 (3.1) 及び補題 H より A が恒等的に零であることと A^* が恒等的に零であることは同値である。

補題 I. $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ 及び $U, V \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} \nabla_U V &= T_U V + \bar{\nabla}_U V, & \nabla_U^* V &= T_U^* V + \bar{\nabla}_U^* V, \\ \nabla_U X &= \mathcal{H}\nabla_U X + T_U X, & \nabla_U^* X &= \mathcal{H}\nabla_U^* X + T_U^* X, \\ \nabla_X U &= A_X U + \mathcal{V}\nabla_X U, & \nabla_X^* U &= A_X^* U + \mathcal{V}\nabla_X^* U, \\ \nabla_X Y &= \mathcal{H}\nabla_X Y + A_X Y, & \nabla_X^* Y &= \mathcal{H}\nabla_X^* Y + A_X^* Y. \end{aligned}$$

更に, X が basic ならば $\mathcal{H}\nabla_U X = A_X U$ 及び $\mathcal{H}\nabla_U^* X = A_X^* U$ である。

テンソル場 T 及び A の共変微分 ∇T 及び ∇A を $E, F, G \in TM$ に対して

$$\begin{aligned}(\nabla_E T)_F G &= \nabla_E(T_F G) - T_{\nabla_E F} G - T_F(\nabla_E G), \\(\nabla_E A)_F G &= \nabla_E(A_F G) - A_{\nabla_E F} G - A_F(\nabla_E G)\end{aligned}$$

で定義する。アファイン接続 ∇ を ∇^* に置き換えることで $\nabla^* T^*$ 及び $\nabla^* A^*$ を同様に定める。このとき次が成り立つ。

補題 J. $E \in TM$, $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ 及び $V, W \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}g((\nabla_E T)_V W, X) &= g((\nabla_E T)_W V, X), \\g((\nabla_E A)_X Y, V) &= g((\nabla_E A^*)_Y X, V), \\g((\nabla_E^* T^*)_V W, X) &= -g(W, (\nabla_E T)_V X) - g(T_W X, S_E V), \\g((\nabla_E^* A^*)_X Y, V) &= -g(Y, (\nabla_E A)_X V) + g(A_Y^* V, S_E X).\end{aligned}$$

次に, 統計沈め込みにおける曲率テンソルを考える。 $\bar{R}$ 及び $\bar{R}^*$ をそれぞれ各ファイバーの誘導アファイン接続 $\bar{\nabla}$ 及び $\bar{\nabla}^*$ に関する曲率テンソルとする。また, 点 $p \in M$ において $\hat{R}(X, Y)Z$ 及び $\hat{R}^*(X, Y)Z$ をそれぞれ $\pi_*(\hat{R}(X, Y)Z) = \hat{R}(\pi_* X, \pi_* Y)\pi_* Z$ 及び $\pi_*(\hat{R}^*(X, Y)Z) = \hat{R}^*(\pi_* X, \pi_* Y)\pi_* Z$ である水平ベクトル場とする。ここで, $\hat{R}$ 及び $\hat{R}^*$ はアファイン接続 $\hat{\nabla}$ 及び $\hat{\nabla}^*$ に関する底空間 B の曲率テンソルである。このとき

定理 K ([16]). $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \hat{\nabla})$ が統計沈め込みのとき, $X, Y, Z, Z' \in \mathcal{H}(M)$ 及び $U, V, W, W' \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}g(R(U, V)W, W') &= g(\bar{R}(U, V)W, W') + g(T_U W, T_V^* W') - g(T_V W, T_U^* W'), \\g(R(U, V)W, X) &= g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X), \\g(R(U, V)X, W) &= g((\nabla_U T)_V X, W) - g((\nabla_V T)_U X, W), \\g(R(U, V)X, Y) &= g((\nabla_U A)_X V, Y) - g((\nabla_V A)_X U, Y) + g(T_U X, T_V^* Y) - g(T_V X, T_U^* Y) \\&\quad - g(A_X U, A_Y^* V) + g(A_X V, A_Y^* U), \\g(R(X, U)V, W) &= g([\mathcal{V}\nabla_X, \bar{\nabla}_U]V, W) - g(\nabla_{[X, U]}V, W) - g(T_U V, A_X^* W) + g(T_U^* W, A_X V), \\g(R(X, U)V, Y) &= g((\nabla_X T)_U V, Y) - g((\nabla_U A)_X V, Y) + g(A_X U, A_Y^* V) - g(T_U X, T_V^* Y), \\g(R(X, U)Y, V) &= g((\nabla_X T)_U Y, V) - g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(T_U X, T_V Y) - g(A_X U, A_Y V), \\g(R(X, U)Y, Z) &= g((\nabla_X A)_Y U, Z) - g(T_U X, A_Y^* Z) - g(T_U Y, A_X^* Z) + g(A_X Y, T_U^* Z), \\g(R(X, Y)U, V) &= g([\mathcal{V}\nabla_X, \mathcal{V}\nabla_Y]U, V) - g(\nabla_{[X, Y]}U, V) + g(A_X U, A_Y^* V) - g(A_Y U, A_X^* V), \\g(R(X, Y)U, Z) &= g((\nabla_X A)_Y U, Z) - g((\nabla_Y A)_X U, Z) + g(T_U^* Z, \theta_X Y), \\g(R(X, Y)Z, U) &= g((\nabla_X A)_Y Z, U) - g((\nabla_Y A)_X Z, U) - g(T_U Z, \theta_X Y), \\g(R(X, Y)Z, Z') &= g(\hat{R}(X, Y)Z, Z') - g(A_Y Z, A_X^* Z') + g(A_X Z, A_Y^* Z') + g(\theta_X Y, A_Z^* Z')\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, $\theta_X Y = A_X Y + A_X^* Y = \mathcal{V}[X, Y]$ である。

4 Sasaki-like 統計沈め込み

(M, g) を概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体, (B, g_B) を擬リーマン多様体とする。このとき擬リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, g_B)$ を概接触計量沈め込みという。 $X \in \mathcal{H}(M)$ に対して ([23])

$$(4.1) \quad \varphi X = PX + FX, \quad \varphi^* X = P^* X + F^* X$$

とする。ここで, $PX, P^* X \in \mathcal{H}(M)$ 及び $FX, F^* X \in \mathcal{V}(M)$ である。 $V \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$(4.2) \quad \varphi V = tV + fV, \quad \varphi^* V = t^* V + f^* V$$

とする。ここで、 $tV, t^*V \in \mathcal{H}(M)$ 及び $fV, f^*V \in \mathcal{V}(M)$ である。 $(\varphi^*)^* = \varphi$ より $(P^*)^* = P, (F^*)^* = F, (t^*)^* = t$ 及び $(f^*)^* = f$ となる。 $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ より

補題 4.1. 概接触計量沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$P^2 = -I - tF + \eta \otimes \xi, \quad FP + fF = 0, \quad Pt + tf = 0, \quad f^2 = -I - Ft.$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$P^2 = -I - tF, \quad FP + fF = 0, \quad Pt + tf = 0, \quad f^2 = -I - Ft + \eta \otimes \xi.$$

また、 $\varphi\xi = 0$ 及び $\eta(\varphi E) = 0$ より

補題 4.2. 概接触計量沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば $P\xi = 0, F\xi = 0, \eta(PX) = 0$ 及び $\eta(tV) = 0$ である。

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば $t\xi = 0, f\xi = 0, \eta(FX) = 0$ 及び $\eta(fV) = 0$ である。

$g(\varphi E, F) + g(E, \varphi^* F) = 0$ より

$$(4.3) \quad g(PX, Y) + g(X, P^*Y) = 0,$$

$$(4.4) \quad g(FX, V) + g(X, t^*V) = 0,$$

$$(4.5) \quad g(tV, Y) + g(V, F^*Y) = 0,$$

$$(4.6) \quad g(fV, W) + g(V, f^*W) = 0.$$

これより、 P 及び F が恒等的に零であるための必要十分条件は P^* 及び t^* がそれぞれ恒等的に零であり、 t 及び f が恒等的に零であるための必要十分条件は F^* 及び f^* がそれぞれ恒等的に零である。

補題 4.3. 概接触計量沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$g(PX, P^*Y) = g(X, Y) - g(FX, F^*Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y),$$

$$g(fU, f^*V) = g(U, V) - g(tU, t^*V).$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$g(PX, P^*Y) = g(X, Y) - g(FX, F^*Y),$$

$$g(fU, f^*V) = g(U, V) - g(tU, t^*V) - \varepsilon\eta(U)\eta(V).$$

補題 4.4. 概接触計量沈め込みにおいて、各 $p \in M$ に対して

(1) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ は $\varphi^*(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ と同値である。

(2) $\varphi(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ は $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ と同値である。

(3) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ は $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ と同値である。

(4) $\varphi(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ は $\varphi^*(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ と同値である。

各 $p \in M$ に対して $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ のとき、 $\overline{M}$ を M の φ 不変 (部分多様体)、 $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ のとき、 $\overline{M}$ を M の φ^* 不変 (部分多様体) という。 $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ のとき、 $\overline{M}$ を M の反不変 (部分多様体) という。補題 4.1, 4.3, 4.4 より

定理 4.5. π を概接触計量沈め込み、 $\overline{M}$ が M の φ 不変または φ^* 不変とする。

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば、 $(\overline{M}, \bar{g}, f)$ は概 Hermite-like 多様体、 $(\overline{M}, \bar{g}, f^*)$ も概 Hermite-like 多様体である。

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば、 $(\overline{M}, \bar{g})$ は概接触構造 (f, ξ, η) をもつ概接触計量多様体、 $(\overline{M}, \bar{g})$ は概接触構造 (f^*, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。

(M, g, ∇) を Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体, $(B, g_B, \widehat{\nabla})$ を統計多様体とする。このとき, 統計沈め込み $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ を Sasaki-like 統計沈め込みという。(1, 1) 型のテンソル場 P, F, t 及び f の微分を

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\nabla_X P)Y &= \mathcal{H}\nabla_X(PY) - P(\mathcal{H}\nabla_X Y), & (\mathcal{H}\nabla_U P)Y &= \mathcal{H}\nabla_U(PY) - P(\mathcal{H}\nabla_U Y), \\ (\mathcal{V}\nabla_X F)Y &= \mathcal{V}\nabla_X(FY) - F(\mathcal{H}\nabla_X Y), & (\mathcal{V}\nabla_U F)Y &= \overline{\nabla}_U(FY) - F(\mathcal{H}\nabla_U Y), \\ (\mathcal{H}\nabla_X t)V &= \mathcal{H}\nabla_X(tV) - t(\mathcal{V}\nabla_X V), & (\mathcal{H}\nabla_U t)V &= \mathcal{H}\nabla_U(tV) - t(\overline{\nabla}_U V), \\ (\mathcal{V}\nabla_X f)V &= \mathcal{V}\nabla_X(fV) - f(\mathcal{V}\nabla_X V), & (\overline{\nabla}_U f)V &= \overline{\nabla}_U(fV) - f(\overline{\nabla}_U V) \end{aligned}$$

とする。また, $(\mathcal{H}\nabla_X^* P^*)Y = \mathcal{H}\nabla_X^*(P^*Y) - P^*(\mathcal{H}\nabla_X^* Y)$ 等も同様におくと

補題 4.6. $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ が Sasaki-like 統計沈め込みのとき,

$$\begin{aligned} g((\mathcal{H}\nabla_X P)Y, Z) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_X^* P^*)Z) &= 0, & g((\mathcal{H}\nabla_U P)X, Y) + g(X, (\mathcal{H}\nabla_U^* P^*)Y) &= 0, \\ g(\mathcal{V}\nabla_X F)Y, V) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_X^* t^*)V) &= 0, & g((\mathcal{V}\nabla_U F)Y, V) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_U^* t^*)V) &= 0, \\ g((\mathcal{H}\nabla_X t)V, Y) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_X^* F^*)Y) &= 0, & g((\mathcal{H}\nabla_U t)V, Y) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_U^* F^*)Y) &= 0, \\ g((\mathcal{V}\nabla_X f)V, W) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_X^* f^*)W) &= 0, & g((\overline{\nabla}_U f)V, W) + g(V, (\overline{\nabla}_U^* f^*)W) &= 0. \end{aligned}$$

これより

系 4.7. $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ が Sasaki-like 統計沈め込みのとき,

- (1) $\mathcal{H}\nabla P = 0$ と $\mathcal{H}\nabla^* P^* = 0$ は同値である。
- (2) $\mathcal{V}\nabla F = 0$ と $\mathcal{H}\nabla^* t^* = 0$ は同値である。
- (3) $\mathcal{H}\nabla t = 0$ と $\mathcal{V}\nabla^* F^* = 0$ は同値である。
- (4) $\mathcal{V}\nabla f = 0$ と $\mathcal{V}\nabla^* f^* = 0$ は同値である。ここで, $\mathcal{V}\nabla_U f = \overline{\nabla}_U f$ 及び $\mathcal{V}\nabla_U^* f = \overline{\nabla}_U^* f$ である。

$\nabla_E \xi = -\varepsilon \varphi E$, $(\nabla_E \varphi)G = g(E, G)\xi - \varepsilon \eta(G)E$ 及び補題 F より

命題 4.8. $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ が Sasaki-like 統計沈め込みのとき, $U \in \mathcal{V}(M)$ 及び $X \in \mathcal{H}(M)$ に対して

- (1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば $\mathcal{H}\nabla_U \xi = -\varepsilon tU$, $T_U \xi = -\varepsilon fU$, $\mathcal{H}\nabla_X \xi = -\varepsilon PX$ 及び $A_X \xi = -\varepsilon FX$ である。
- (2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば $T_U \xi = -\varepsilon tU$, $\overline{\nabla}_U \xi = -\varepsilon fU$, $A_X \xi = -\varepsilon PX$ 及び $\mathcal{V}\nabla_X \xi = -\varepsilon FX$ である。

命題 4.9. $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ が Sasaki-like 統計沈め込みのとき, $U, V \in \mathcal{V}(M)$ 及び $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ に対して

- (1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\nabla_U t)V + T_U(fV) - P(T_U V) &= g(U, V)\xi, \\ (\overline{\nabla}_U f)V + T_U(tV) - F(T_U V) &= 0, \\ (\mathcal{H}\nabla_U P)Y + T_U(FY) - t(T_U Y) &= 0, \\ (\mathcal{V}\nabla_U F)Y + T_U(PY) - f(T_U Y) &= -\varepsilon \eta(Y)U, \\ (\mathcal{H}\nabla_X t)V + A_X(fV) - P(A_X V) &= 0, \\ (\mathcal{V}\nabla_X f)V + A_X(tV) - F(A_X V) &= 0, \\ (\mathcal{H}\nabla_X P)Y + A_X(FY) - t(A_X Y) &= g(X, Y)\xi - \varepsilon \eta(Y)X, \\ (\mathcal{V}\nabla_X F)Y + A_X(PY) - f(A_X Y) &= 0. \end{aligned}$$

- (2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\nabla_U t)V + T_U(fV) - P(T_U V) &= 0, \\ (\overline{\nabla}_U f)V + T_U(tV) - F(T_U V) &= g(U, V)\xi - \varepsilon \eta(V)U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}\nabla_U P)Y + T_U(FY) - t(T_U Y) &= 0, \\
(\mathcal{V}\nabla_U F)Y + T_U(PY) - f(T_U Y) &= 0, \\
(\mathcal{H}\nabla_X t)V + A_X(fV) - P(A_X V) &= -\varepsilon\eta(V)X, \\
(\mathcal{V}\nabla_X f)V + A_X(tV) - F(A_X V) &= 0, \\
(\mathcal{H}\nabla_X P)Y + A_X(FY) - t(A_X Y) &= 0, \\
(\mathcal{V}\nabla_X F)Y + A_X(PY) - f(A_X Y) &= g(X, Y)\xi.
\end{aligned}$$

補題 4.1, 命題 4.8 及び 4.9 より

補題 4.10. $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ が Sasaki-like 統計沈め込みのとき,

- (1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば $\eta(T_U V) = -g(U, fV)$ 及び $\eta(A_X V) = -g(X, tV)$, 更に $f^* = -f$ である。
- (2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば $\eta(T_U Y) = -g(U, FY)$ 及び $\eta(A_X Y) = -g(X, PY)$ である。

5 $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込み

補題 4.1 (2), 4.2 (2) 及び 4.3 (2) より

補題 5.1. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

- (1) $P^2 = -I$, $FP + fF = 0$, $f^2 = -I + \eta \otimes \xi$.
- (2) $f\xi = 0$, $\eta(FX) = 0$, $\eta(fV) = 0$.
- (3) $g(PX, P^*Y) = g(X, Y)$, $g(fU, f^*V) = g(U, V) - \varepsilon\eta(U)\eta(V)$.

更に, 命題 4.8 (2), 4.9 (2) 及び補題 4.10 (2) より

補題 5.2. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

- (1) $T_U \xi = 0$, $\overline{\nabla}_U \xi = -\varepsilon fU$, $A_X \xi = -\varepsilon PX$, $\mathcal{V}\nabla_X \xi = -\varepsilon FX$.
- (2) $(\overline{\nabla}_U f)V - F(T_U V) = g(U, V)\xi - \varepsilon\eta(V)U$, $T_U(fV) - P(T_U V) = 0$,
 $(\mathcal{V}\nabla_U F)Y + T_U(PY) - f(T_U Y) = 0$, $(\mathcal{H}\nabla_U P)Y + T_U(FY) = 0$,
 $(\mathcal{V}\nabla_X f)V - F(A_X V) = 0$, $A_X(fV) - P(A_X V) = -\varepsilon\eta(V)X$,
 $(\mathcal{V}\nabla_X F)Y + A_X(PY) - f(A_X Y) = g(X, Y)\xi$, $(\mathcal{H}\nabla_X P)Y + A_X(FY) = 0$.
- (3) $\eta(T_U Y) = -g(U, FY)$, $\eta(A_X Y) = -g(X, PY)$.

次に, $\widehat{P}$ を $\pi_* P = \widehat{P}\pi_*$ を満たす $(1, 1)$ テンソル場とする。補題 5.1 より

定理 5.3. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

- (1) 各ファイバー $(\overline{M}, \overline{g})$ は概接触構造 (f, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。
- (2) 底空間 $(B, g_B, \widehat{P})$ は概 Hermite-like 多様体である。

補題 5.2 より, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ であるための必要十分条件は $F(A_X V) = 0$ である。ここで, $V = \xi$ とすると $FPX = 0$ であるから

補題 5.4. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ であるための必要十分条件は各ファイバーが φ^* 不変である。

補題 5.2, 5.4 及び定理 5.3 より

定理 5.5. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ ならば

- (1) 各ファイバー $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\nabla})$ は Sasaki-like 構造 (f, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体である。
- (2) 底空間 $(B, g_B, \widehat{\nabla}, \widehat{P})$ は Kähler-like 統計多様体である。

これ以降, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ とする。 $F = 0$ 及び補題 5.2 (2) より $A_Y^*(P^*X) - f^*(A_Y^*X) = g(X, Y)\xi$ であるから $-A_{P^*X}Y + f^*(A_XY) = g(X, Y)\xi$ である。更に, 補題 5.2 (2) より $(f + f^*)A_XY = A_X(PY) + A_{P^*X}Y$ が得られる。補題 5.2 (2) より Y 及び PY が basic ならば

$$0 = (\mathcal{H}\nabla_U P)Y = \mathcal{H}\nabla_U(PY) - P(\mathcal{H}\nabla_U Y) = A_{PY}U - P(A_YU)$$

だから

$$\begin{aligned} 0 &= g(A_{PY}U, X) - g(P(A_YU), X) = -g(U, A_{PY}^*X) - g(U, A_Y^*(P^*X)) \\ &= g(U, A_X(PY)) + g(U, A_{P^*X}Y) \end{aligned}$$

より $A_X(PY) + A_{P^*X}Y = 0$ となる。これより $(f + f^*)A_XY = 0$ を得る。このとき, $\text{rank}(f + f^*) = \dim \overline{M} - 1$ ならば A_XY は ξ に平行になるから $A_XY = -g(X, PY)\xi$ が得られる。これより

補題 5.6. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$, $\text{rank}(f + f^*) = \dim \overline{M} - 1$, PY が basic ならば $A_XY = -g(X, PY)\xi$ である。

系 5.7. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$, $\text{rank}(f + f^*) = \dim \overline{M} - 1$ ならば $A_XU = -\varepsilon\eta(U)PX$ である。

全空間が定曲率 ε の空間のとき, 補題 5.6 より

$$\begin{aligned} \widehat{R}(X, Y)Z &= \varepsilon[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y - g(Y, PZ)PX + g(X, PZ)PY \\ &\quad + \{g(X, PY) - g(PX, Y)\}PZ] \end{aligned}$$

となるから

定理 5.8. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, 全空間が定曲率 ε の空間とする。このとき, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$, $\text{rank}(f + f^*) = \dim \overline{M} - 1$ ならば, 底空間 $(B, g_B, \widehat{\nabla}, \widehat{P})$ は定正則断面曲率 4ε の空間である。

次に, 全空間が定 φ 正則断面曲率 c の空間とする。補題 5.6 より

$$\begin{aligned} \widehat{R}(X, Y)Z &= \frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y - g(Y, PZ)PX + g(X, PZ)PY \\ &\quad - \{g(X, PY) - g(PX, Y)\}PZ] \end{aligned}$$

となるから

定理 5.9. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, 全空間が定 φ 正則断面曲率 c の空間とする。このとき, $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$, $\text{rank}(f + f^*) = \dim \overline{M} - 1$ ならば, 底空間 $(B, g_B, \widehat{\nabla}, \widehat{P})$ は定正則断面曲率 $(c + 3\varepsilon)$ の空間である。

参考文献

- [1] N. Abe and K. Hasegawa, An affine submersion with horizontal distribution and its applications, Differential Geom. Appl. 14 (2001), 235–250.
- [2] P. Alegre and A. Carriazo, Semi-Riemannian Sasakian space forms, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 41 (2018), 1–14.
- [3] S. Amari, Differential-Geometrical Methods in Statistics, Lecture Notes in Statistics, 28 Springer-Verlag, 1985.
- [4] S. Amari and H. Nagaoka, Methods of Information Geometry, AMS & Oxford University Press, 2000.
- [5] H. Aytimur and C. Özgür, On cosymplectic-like statistical submersions, Mediterr. J. Math. (2019) 16:70, <https://doi.org/10.1007/s00009-019-1331-z>.
- [6] A. Besse, Einstein Manifolds, Springer-Verlag, 1987.
- [7] E. Erkan, K. Takano and M. Gülbahar, Locally product-like statistical Riemannian manifolds and their hypersurfaces, arXiv:2212.02862v1.

- [8] H. Furuhata and I. Hasegawa, Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds, *Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds*, 179–215. Springer, Singapore, 2016.
- [9] A. Gray, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech.* 16 (1967), 715–738.
- [10] S. Kazan and K. Takano, Anti-invariant holomorphic statistical submersions, *Results Math.* 78 (4), (2023).
- [11] B. O’Neill, The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.* 13 (1966), 459–469.
- [12] _____, *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [13] M. Noguchi, Geometry of statistical manifolds, *Differential Geom. Appl.* 2 (1992), 197–222.
- [14] C. R. Rao, Information and Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 37 (1945), 81-91.
- [15] M. D. Siddiqi, A. N. Siddiqi, F. Mofarreh and H. Aytimur, A study of Kenmotsu-like statistical submersions, *Symmetry* 2022, 14, 1681. <https://doi.org/10.3390/sym14081681>.
- [16] K. Takano, Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions, *Tensor, N. S.* 65 (2004), 128–142.
- [17] _____, Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions, *J. Geom.* 85 (2006), 171–187.
- [18] _____, Exponential families admitting almost complex structures, *SUT J. Math.* 46 (2010), 1–21.
- [19] K. Takano, E. Erkan and M. Gülbahar, Locally product-like statistical submersions, *Turkish J. Math.* 47 (2), 846–869 (2023).
- [20] A. -D. Vilcu and G. -E. Vilcu, Statistical manifolds with almost quaternionic structures and quaternionic Kähler-like statistical submersions, *Entropy* 2015, 17, 6213-6228; doi:10.3390/e17096213.
- [21] G. -E. Vilcu, Almost product structures on statistical manifolds and para-Kähler-like statistical submersions, *Bull. Sci. Math.*, 171 (2021) 103018.
- [22] B. Watson, Almost Hermitian submersion, *J. Differential Geometry* 11 (1976), 147–165.
- [23] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, 1984.