

Quandles from the viewpoint of symmetric spaces — some open problems

田丸 博士 (大阪公立大学理学研究科 / OCAMI)

概要

カンドルは、結び目の研究を出自とするが、離散的な対称空間の一般化とみなすこともできる。研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2023」では、対称空間論に登場する概念のいくつか、カンドルの研究に適用できることを講演した。これらの詳細については講演スライドに記載されているので、本稿では、今後に取り組むべきと思われる問題を中心に紹介する。

1 導入

カンドルは、結び目の研究を出自とする概念であり、所定の性質をみたす二項演算を備えた代数系として定義される [5, 8]。実際、その演算のみたすべき公理は、結び目の Reidemeister 変形と対応している。一方で、対称空間はカンドルとなることが、よく知られている。この事実に着目して、対称空間論に登場する概念や手法を用いてカンドルを調べる研究を、我々は進めている。講演では、その研究の概略を紹介した。詳細な内容については、講演スライドおよび最近執筆した概説 [15] を参照していただきたい。また、いくつかの研究集会の記録集などにおいても、日本語の解説を書いているので、さらに詳しい情報が知りたい場合は [10–14] を参照することもできる。本稿では、これらとの重複を避けるためにも、今後に取り組むべき問題を中心として紹介していきたい。

我々のカンドルの研究において、「最も基本的なカンドル (のクラス) は何か」という問いかけは本質的である。カンドルは、等質性を仮定すると、組 (G, K, σ) と対応することが

部分多様体幾何とリー群作用 2023 (東京理科大学, 2023/11/21) 講演原稿。

本研究は文部科学省特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165 の助成を受けたものです。

分かっている (対称空間論における“対称対”に相当する). ここで G は群, K は部分群, σ は G の群自己同型であり, 所定の適合条件をみたすものである. このことから, カンドルに等質性を仮定したとしても, 群と群自己同型の組くらいの豊富さがあることが分かる. すなわち, 完全な分類を与えるという取り組みは, (元の個数が一定数以下のような条件を課さない) ほぼ絶望的に思える. 従って, 基本的と思われるカンドルのクラスを定式化すること, あるいはカンドルの“複雑さ”を測るような不変量を導入することは, 重要な問題意識であると考えられる. 我々のこれまでの研究および本稿で紹介する問題は, このような方針に沿ったものである. 実際, § 2, 3 の内容は, カンドルの基本的なクラスを導入する試みである. また § 4, 5 の内容は, カンドルの (何らかの意味での) 複雑さを定式化しようとするものである.

2 二点等質カンドル

カンドルの中で基本的なクラスと呼べるものの候補として, 我々は二点等質カンドルの概念を導入した [9]. この概念は, 二点等質リーマン多様体の対応物である. ちなみに, 連結リーマン多様体が二点等質であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n$ または階数 1 対称空間と等長的になることである. 従って, 二点等質カンドルは, 対称空間論における階数 1 のもののような基本的な役割を果たすことが期待できる. 有限な二点等質カンドルは分類が完成しており, そのようなカンドルは有限体とその原始元を用いて得られる [18, 19]. そのことを踏まえて, 以下の問題を提示する.

問題 2.1. 全ての有限な二点等質カンドルが, 有限体と原始元を用いて得られることを, 分類に依らずに示せ. 有限体と原始元が与えられれば二点等質カンドルが得られることは, 明示的に構成できることから, よく分かっていると言って良い. 一方で, 有限な二点等質カンドルがそのようなものに限ることは, 分類の帰結として得られた結果であり, その本質的な理由が分かっているとは言い難い.

カンドルの二点等質性は, 内部自己同型群 $\text{Inn}(X, s)$ の作用が二重推移的であるという性質によって定義されていた. 内部自己同型群は, 自己同型群 $\text{Aut}(X, s)$ の部分群である. 従って $\text{Inn}(X, s)$ の作用が二重推移的ならば, $\text{Aut}(X, s)$ の作用も二重推移的である. その逆は成り立たない. これらのことを踏まえて, 次の問題は自然であると思われる.

問題 2.2. 自己同型群 $\text{Aut}(X, s)$ の作用に関して二点等質なカンドルを調べよ. 例えば自明カンドルは, $\text{Aut}(X, s)$ に関して二点等質だが, $\text{Inn}(X, s)$ に関しては二点等質でない最

も簡単な例である。これ以外にもいくつかの例があることは分かっている。どのような例が存在するか、それらは有限体を一般化した何かから得られるのか、などの問題は興味深いと思われる。

また、二点等質性は極めて強い条件なので、そのようなカンドルについて様々なことが調べやすいと思われる。二点等質カンドルのみたす良い性質を調べよ、という問題も興味深く、今後の研究のための基本的な例を供給できると考えている。

3 平坦カンドル

二点等質カンドルは、ある意味で階数 1 対称空間のカンドル版であった。次に、階数 1 よりも更に基本的な対称空間として、平坦なものを考える (平坦なリーマン対称空間は、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 、平坦トーラス T^n 、およびそれらの直積に限る)。リーマン対称空間が平坦であるための必要十分条件は、変換群 $G^0(X, s)$ の言葉で書くことができる。ここで $G^0(X, s)$ は、二つの点対称の合成 $s_x \circ s_y$ 達で生成される群である (内部自己同型群は点対称 s_x 達で生成される群である)。これに着目すると、カンドルの平坦性を定義することができる [4]。さらに、有限な連結平坦カンドルの分類も得られている [4]。なお、カンドルは連結ならば等質である。

問題 3.1. 平坦な等質カンドルであって、非連結なものを構成せよ。自明カンドルはその例になっているが、それ以外にも数多く存在することが分かっている。その中でも興味深いと思われるものとして、対称空間内の部分カンドルとして与えられるもの、頂点推移的なグラフから構成されるカンドル、などが挙げられる [3]。それ以外にどのようなものがあるだろうか。

上で挙げた平坦な等質カンドルの例のいくつかは、実は $G^0(X, s)$ だけではなく内部自己同型群 $\text{Inn}(X, s)$ も可換になっていた。当然ながら $\text{Inn}(X, s)$ が可換であることの方が条件が厳しいが、そのようなものであっても、全貌は解明されていない。従って次の問題を解決することは、今後の研究の基礎となると考えられる。

問題 3.2. 内部自己同型群が可換な等質カンドルの構成し、分類せよ。少なくとも頂点推移的なグラフから構成されるものがあることは分かっている。その構成は、単純グラフの頂点に $\mathbb{Z}_2$ を乗せた集合に、グラフの情報を使って点対称を定義するというものである。この構成方法の一般化はすでにある程度は行われている。一方で、そのようなものに限るかどうかは、未解明である。

これらの研究は、カンドルに対して「変換群が特別な性質をみたすものを構成あるいは分類をせよ」ということを問題としていいると考えられる。一方で、変換群が表に出ないカンドルの性質も当然ながら考えられる。次章以降では、そのような話題に触れたい。

4 カンドル内の部分集合

カンドルに対して、所定の性質をみたす部分集合をどのくらい含むか、という性質を考えたい。例えばリーマン対称空間論では、平坦な全測地的部分多様体を考え、その最大次元を階数と呼んでいた。ほとんど同じことだが、コンパクトリー群の極大トーラス、半単純リー代数のカルタン部分代数の次元なども、重要な不変量である。我々は、カンドル内の部分集合に対して、「対蹠的」および「 s -可換」という性質を研究している [7]。なお、対蹠的な部分集合は、対称空間に対して [2] によって導入され、深く研究されている [16, 17]。

問題 4.1. 既知のカンドルあるいは対称空間に対して、その中の極大対蹠集合および極大 s -可換集合を決定せよ。特に、そのような部分集合のうち極大なものが、いつ共役の元での一意性をみたすかを調べよ。なお、リーマン対称空間内の対蹠集合については、非常に深い研究の蓄積があり、多くの場合に決定されている（残っているのは極めて難しいものだけである）。それ以外の場合の研究は、発展途上である。

対蹠集合は、点対称が（その部分集合上では）自明なものとして定義される。従って体積集合は自明カンドルである。一方で s -可換集合は、点対称が（全体カンドルの上で）可換なものとして定義される。カンドル内の極大 s -可換集合は、部分カンドルになることが分かっている [7]。

問題 4.2. カンドル内の極大 s -可換集合を決定し、どのようなカンドルであるか調べよ。定義より内部自己同型群が可換になることは直ちに従う（従って「極大トーラスの対応物」となることを想定している）。特にリーマン対称空間内の極大 s -可換部分集合は、現時点までに決定したものについては等質であるが、これが一般に成り立つかどうかを調べる問題は、興味深い。ちなみに、対蹠集合は内在的には自明カンドルなので、いつでも等質である。極大 s -可換集合の場合は、当然ながらカンドルとしては非自明なことがあり得る。

リーマン対称空間に対して、対蹠集合の元の個数の最大値を 2-number と呼ぶ [1, 2]。この 2-number は有限値になることが知られており、オイラー数などの位相的な性質と関係する不変量である。これと同様の方法によってカンドルに不変量を定義し、その性質を調べることは、極めて興味深く自然な問題であると思われる。

問題 4.3. カンドルあるいは対称空間について、対蹠部分集合の元の個数の最大値および s -可換部分集合の最大値は不変量であり、カンドルの複雑さを表していると考えられる。これらの数を決定せよ。例えば、これらの不変量が 1 になる (s -可換部分集合が一点集合しかあり得ないような) カンドルは、何らかの意味で簡単かつ基本的なものになっていると思われるが、どのようなものがあるだろうか。

5 進行中の話題

講演の最後に、現在進行中の研究として、カンドルのオイラー数に関する内容を紹介した。カンドルに対してオイラー数を定義し、対称空間の場合には通常の意味でのオイラー数を復元していること、さらにはいくつかの簡単な例での計算結果を述べた。この内容に関しては、まだ研究が始まったばかりで、やるべきことが数多く残されている。

問題 5.1. カンドルのオイラー数について、一般的な性質を調べ、具体例に対して決定せよ。当然ながら、対称空間のオイラー数に関して知られている性質が、カンドルのオイラー数についても成り立つかどうか調べよ、という問いかけが最も自然であると思われる。それ以外にも、カンドルには (対称空間論には登場しないような) 様々な性質があるので、それらとオイラー数がどのように関係するか、といった問題も興味深いであろう。

このような研究は、対称空間論を基本としてカンドルに新しい概念を導入するものとしても重要である。また逆に、その結果が対称空間の研究にフィードバックできる可能性もあるので、対称空間あるいは微分幾何学の研究の観点からも興味深いと考えている。

参考文献

- [1] B.-Y. Chen, Two-numbers and their applications — a survey, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **25** (2018), 565–596.
- [2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.
- [3] Furuki, K., Tamaru, H.: preprint.
- [4] Y. Ishihara and H. Tamaru, Flat connected finite quandles, Proc. Amer. Math. Soc., **144** (2016), 4959–4971.

- [5] D. Joyce, A classifying invariant of knots, the knot quandle, *J. Pure Appl. Algebra*, **23** (1982), 37–65.
- [6] S. Kamada, H. Tamaru and K. Wada, On classification of quandles of cyclic type, *Tokyo J. Math.*, **39** (2016), 157–171.
- [7] A. Kubo, M. Nagashiki, T. Okuda and H. Tamaru, A commutativity condition for subsets in quandles — a generalization of antipodal subsets, *Differential Geometry and Global Analysis*, in Honor of Tadashi Nagano, *Contemp. Math.*, **777** (2022), 103–125.
- [8] S. V. Matveev, Distributive groupoids in knot theory, *Mat. Sb. (N.S.)*, **119(161)** (1982), 78–88. English translation: *Math. USSR-Sb.*, **47** (1984), 73–83.
- [9] H. Tamaru, Two-point homogeneous quandles with prime cardinality, *J. Math. Soc. Japan*, **65** (2013), 1117–1134.
- [10] 田丸 博士, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I, *Geometry and Analysis 2014* (福岡大学微分幾何研究会) 記録集, 2015, 99–107.
- [11] 田丸 博士, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part II, 部分多様体論・湯沢 2014 記録集, 2015, 55–60.
- [12] 田丸 博士, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part III, 第 35 回代数的組合せ論シンポジウム記録集, 2018, 67–73.
- [13] 田丸 博士, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV, 部分多様体論・湯沢 2018 記録集, 2019.
- [14] 田丸 博士, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part V, 数理解析研究所講究録, **2210** (2022), 57–65.
- [15] 田丸 博士, 離散的な対称空間と quandle, In: *Sugaku (数学)*, to appear.
- [16] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, *Osaka J. Math.*, **50** (2013), 161–169.
- [17] M. S. Tanaka, H. Tasaki, O. Yasukura, Maximal antipodal sets related to G_2 , *Proc. Amer. Math. Soc.*, **150** (2022), 4533–4542.
- [18] L. Vendramin, Doubly transitive groups and cyclic quandles, *J. Math. Soc. Japan*, **69** (2017), 1051–1057.
- [19] K. Wada, Two-point homogeneous quandles with cardinality of prime power, *Hiroshima Math. J.*, **45** (2015), 165–174.