

ワープ積多様体上の平均曲率流の グラフ保存性及び時間大域的存在

藤原 尚俊

東京理科大学大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 1 年

部分多様体幾何とリー群作用 2023

～小池直之先生還暦記念研究集会～

2023 年 11 月 21 日

東京理科大学 神楽坂キャンパス 森戸記念館第 1 フォーラム

1 導入

- 平均曲率流
- ワープ積多様体
- グラフ

2 主結果

- グラフ保存性
- 時間大域的存在

M を n 次元閉多様体, $(\overline{M}, \overline{g})$ を $n+1$ 次元リーマン多様体とする.

定義 (平均曲率流)

滑らかな写像 $F: M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ に対して, $F_t = F(\cdot, t): M \rightarrow \overline{M}$ を埋め込みとする. N_t を単位法ベクトル場, H_t を平均曲率として F が発展方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -H_t N_t$$

を満たすとき, 埋め込みの族 $\{F_t\}_{t \in [0, T)}$ (あるいは像の族 $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$) を **平均曲率流 (MCF)** とよぶ. 特に $n = 1$ のとき, **曲線短縮流 (CSF)** とよばれる.

例 (自明な解)

極小超曲面 M ($H \equiv 0$) に対して, $M_t = M$ は平均曲率流方程式を満たす.

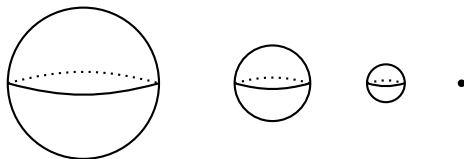
定義・事実 (極大存在時間)

区間 $[0, T)$ を平均曲率流が存在する極大の区間とする. T を極大存在時間とよび, $T = \infty$ のとき, 平均曲率流は時間大域的に存在するという. $T < \infty$ ならば, 第2基本形式のノルム $|A_t|$ の上限は発散する:

$$\sup_{M \times [0, T)} |A_t| = \infty.$$

$n + 1$ 次元ユークリッド空間内の n 次元球面を初期条件とする平均曲率流は, 半径を $R(t)$ としたとき以下の式で与えられる:

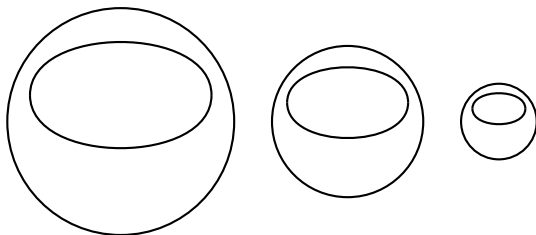
$$R(t) = \sqrt{R(0)^2 - 2nt}, \quad t \in [0, R(0)^2/2n).$$



$\{M_t\}_{t \in [0, t_0)}$, $\{N_t\}_{t \in [0, t_0)}$ を平均曲率流とする.

補題 (比較原理)

もし M_0 と N_0 が交わらなければ, M_t と N_t は常に交わらない.

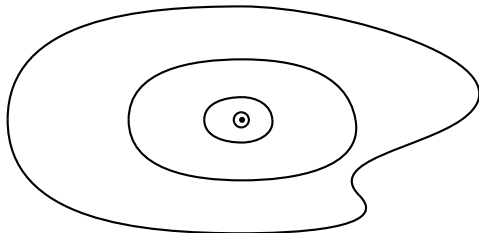


Huisken(1984)

$n + 1$ 次元ユークリッド空間 ($n \geq 2$) 内の強凸超曲面を発する MCF は強凸性を保ったまま 1 点に収縮する.

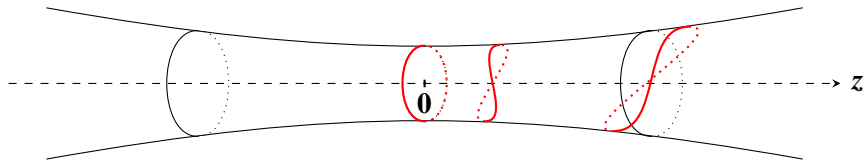
Gage-Hamilton(1986), Grayson(1987)

平面上の埋め込まれた閉曲線は CSF で変形したとき途中で凸曲線になり, さらに凸性を保ちながら有限時間で 1 点に収縮する.



平均曲率流による変形は体積（面積, 長さ）を減少させるような変形であることが次の式からわかる:

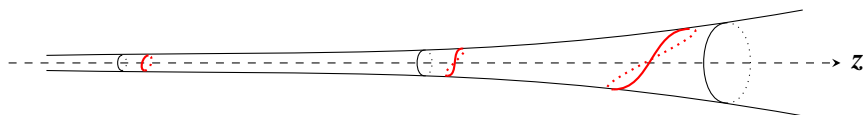
$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M_t) = - \int_M H_t^2 d\mu_t$$



上の図では $T = \infty$ で測地線に収束している.

平均曲率流によって部分多様体がどのように変形するかを調べる:

- 保たれる性質は?
- 特異点を生じるか? 収束するか?
- 特別な解 (ancient solution, eternal solution, etc.)



本研究では上図のような平均曲率流（曲線短縮流）に対して以下を考える:

- ワープ積多様体上のグラフ性の保存
- 時間大域的存在及びそのときの振る舞い

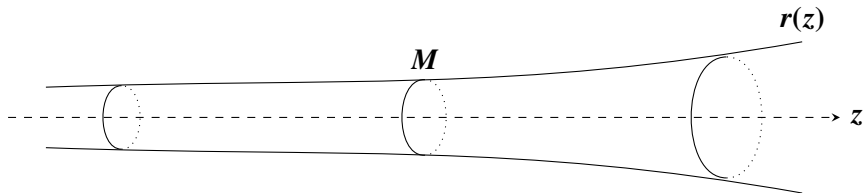
定義 (ワープ積多様体)

- (M, g_M) : n 次元閉リーマン多様体
- $r: I \rightarrow (0, \infty)$: 开区間 I 上の滑らかな正值関数

とする. このとき

$$\begin{cases} \overline{M} = M \times I \\ \overline{g} = r(z)^2 g_M + dz \otimes dz \end{cases}$$

と定め, $(\overline{M}, \overline{g})$ をワープ積多様体という. 関数 r はワープ関数とよばれる.



ワープ積多様体は積多様体や定曲率空間を含むように一般化されたリーマン多様体と考えられる. 曲面の場合について具体的に考えると $\overline{M} = \mathbb{S}^1 \times I$ として

$$\overline{g} = r(z)^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz$$

となり, ガウス曲率は $\overline{K} = -r''(z)/r(z)$ で与えられる. よって以下のように定めるとガウス曲率一定曲面を得る:

- $I = (0, \infty)$, $r(z) = z$ のとき, ガウス曲率 $\overline{K} \equiv 0$.
- $I = (-\pi/\sqrt{k}, \pi/\sqrt{k})$, $r(z) = \cos \sqrt{k}z$, ガウス曲率 $\overline{K} \equiv k > 0$.
- $I = (-\infty, \infty)$, $r(z) = e^{\sqrt{k}z}$ のとき, ガウス曲率 $\overline{K} \equiv -k < 0$.

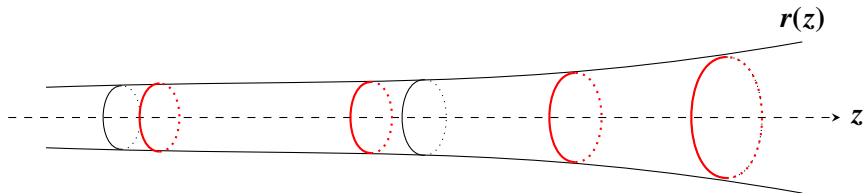
Parallel と平均曲率流

- Parallel: $M \times \{z_0\} \subset \overline{M} = M \times I$
- 平均曲率: $nr'(z_0)/r(z_0)$

Parallel を初期条件とする平均曲率流は, Parallel の位置を $z(t)$ として

$$\frac{dz}{dt}(t) = -n \frac{r'}{r}(z(t)), \quad z(0) = z_0$$

によって定まる. 狭義単調増加なワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ に対して $\sup_{z \in (-\infty, a)} r'(z)/r(z) < \infty$ が成り立つとき, $T = \infty$ が従う.



ワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ を狭義単調増加 $r'(z) > 0$ とする.

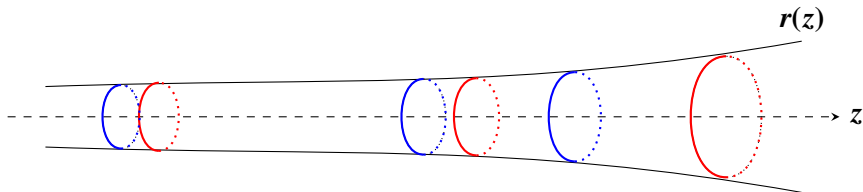
補題 (Parallel とワープ関数)

ある正数 $\alpha > 0$ に対して,

$$r(z)r''(z) - (1 + \alpha)r'(z)^2 \geq 0$$

が成り立つならば, *parallel* を発する平均曲率流は時間大域的に存在する. さらに異なる二つの *parallel* を発する MCF $\{z_1(t)\}, \{z_2(t)\}$ に対して, $z_1(0) - z_2(0) > 0$ とすると, 次の不等式が成立する:

$$0 < z_1(t) - z_2(t) \leq (z_1(0) - z_2(0)) \left(\frac{r(z_2(t))}{r(z_2(0))} \right)^\alpha.$$

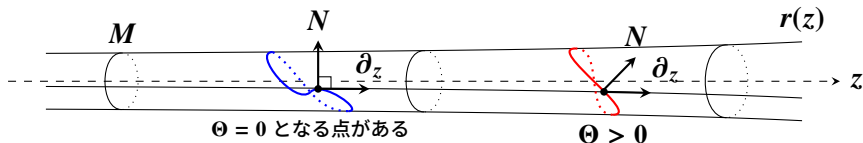


ワープ積多様体上の超曲面 (曲線) S について考える.

- N : 超曲面 S の単位法ベクトル場
- ∂_z : ワープ積多様体 $\bar{M} = M \times I$ の I 方向の座標基底

定義

- $\Theta = \bar{g}(N, \partial_z): S \rightarrow [-1, 1]$: Angle function
- 超曲面 (曲線) がグラフである $\Leftrightarrow \Theta > 0$



グラフ: M 上の関数 $z: M \rightarrow I$ のグラフとして表せる

ワープ積多様体上の平均曲率流 $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$ に対して, Angle function を $\Theta_t = \bar{g}(N_t, \partial_z)$ と定める.

定義

平均曲率流がグラフ性を保つとは,

$$\Theta_0 > 0 \text{ ならば } \Theta_t > 0 \ (t < T)$$

が成り立つことである.

グラフを発する MCF の研究については,

- Ecker-Huisken(1989,1991): ユークリッド空間内のグラフ
- Borisenko-Miquel(2012): ワープ積多様体上のグラフ
- Huang-Zhang-Zhou(2019): ワープ積多様体上のグラフ

などがある.

1

導入

- 平均曲率流
- ワープ積多様体
- グラフ

2

主結果

- グラフ保存性
- 時間大域的存在

定理 ($n = 1$ の場合)

- 任意のワープ関数 $r: I \rightarrow (0, \infty)$ に対して, CSF はグラフ性を保つ.
- 狭義単調増加なワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ が $rr'' - 2r'^2 \geq 0$ を満たすと仮定する. このときある正の定数 C が存在して, *angle function* に対して $\Theta_t \geq C > 0$ が成り立つ.

定理 ($n \geq 2$ の場合)

関数 $r(z)$ と Ric_M がある定数 ρ と $\alpha > 1$ に対して次の条件を満たすとする:

$$\begin{aligned}\text{Ric}_M &\geq n\rho g_M, \quad r' > 0, \\ rr'' - (1 + \alpha)r'^2 + \rho &\geq \max\{\rho, 0\}.\end{aligned}$$

このとき上述の定数 $\alpha > 1$ に対して, 初期条件

$$\min_{p \in M_0} \Theta_0(p) > \alpha^{-1/2}$$

を満たす MCF はグラフ性を保ち, ある正の定数 C に対して $\Theta_t \geq C$ が成立.

補題

Θ の発展方程式は以下で与えられる:

$$(\partial_t - \Delta) \Theta = \frac{rr'' - 2r'^2}{r^2} \Theta (1 - \Theta^2) + \left(\frac{r'}{r} \Theta - \kappa \right)^2 \Theta.$$

グラフ保存性を $rr'' - 2r'^2 \geq -A$ を満たす場合にのみ示す (定理の主張では r に対する仮定は不要). $\mu(t) = \min_{p \in \mathbb{S}^1} \Theta_t(p)$ とすると補題から

$$\frac{d\mu}{dt}(t) \geq -A\mu(t)$$

が成り立ち, $\mu(t) \geq e^{-At} \mu(0)$. よってある正の定数 C に対して

$$\Theta_t \geq Ce^{-At} > 0$$

なのでグラフ性が保たれる.

補題

$n \geq 2$ のとき Θ の発展方程式は以下で与えられる:

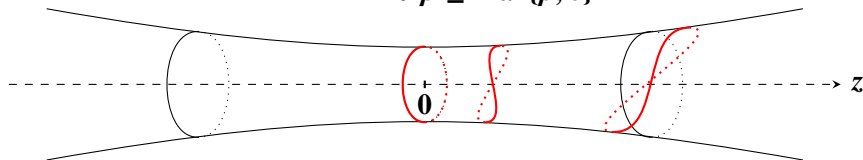
$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \Delta) \Theta &= 2 \frac{r'}{r} \langle \nabla \Theta, \partial_z \rangle - 2 \frac{r'}{r} H + |A|^2 \Theta \\
 &\quad + n \frac{r'^2}{r^2} \Theta + \frac{\Theta(1 - \Theta^2)}{r^2} \{n(rr'' - r'^2) + \text{Ric}_M(v_M, v_M)\}.
 \end{aligned}$$

Θ を含まない項によって, グラフ保存性に r と Θ_0 の仮定が必要となっている. Huang-Zhang-Zhou(2019) では Θ^2 に関する発展方程式を計算することによって Θ を含まない項をうまく扱っており, グラフ保存性を示している.

グラフ保存性 ($n \geq 2$ の場合)

- Huang-Zhang-Zhou (2019)

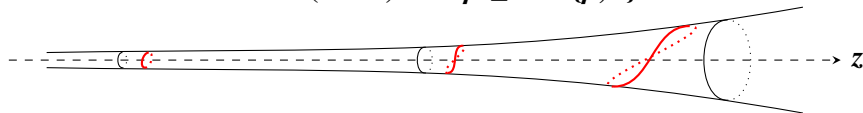
$$rr'' - r'^2 + \rho \geq \max\{\rho, 0\}$$



$r(0) > 0$ となっている.

- 本研究

$$rr'' - (1 + \alpha)r'^2 + \rho \geq \max\{\rho, 0\}$$



$r(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow -\infty$) の場合を含む

ワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ を狭義単調増加とし,
 $\sup_{z \in (-\infty, a)} r'(z)/r(z) < \infty$ を満たすとする. CSF のグラフ保存性と時間大域的存在は以下のように関係している.

補題

C を正の定数とする. このとき

$$\Theta_t \geq C \ (t < T) \text{ ならば } \sup_{\mathbb{S}^1 \times [0, T)} |\kappa_t| < \infty.$$

補題

$T < \infty$ ならば $\sup_{\mathbb{S}^1 \times [0, T)} |\kappa_t| = \infty$.

この二つの補題から $\Theta_t \geq C$ を満たす CSF は時間大域的に存在する. また MCF についてもほとんど同様の方法で時間大域的存在が示される.

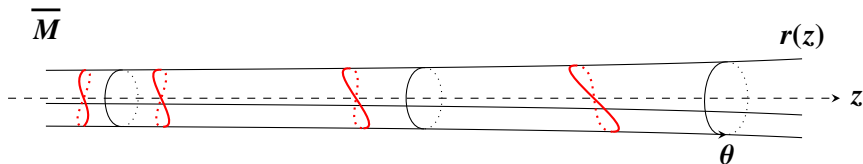
時間大域的存在 ($n = 1$ の場合)

- $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$: 狭義単調増加なワープ関数
- $\{F_t: \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T)}$: ワープ積多様体上の曲線短縮流

定理 ($n = 1$ のとき)

CSF に対して初期曲線がグラフであると仮定する.

- $\sup_{z \in (-\infty, a)} r'(z)/r(z) < \infty$ が成り立つならば, $T = \infty$.
- 狭義単調増加なワープ関数 r が $rr'' - 2r'^2 \geq 0$ を満たすと仮定する.
このとき $T = \infty$ であり, 曲率 κ_t に対して $\kappa_t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つ.
さらに任意の $i \geq 1$ に対して $\sup_{z \in I} |r^{(i)}(z)/r(z)| < \infty$ ならば,
 $|\partial_s^{(i)} \kappa_t| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

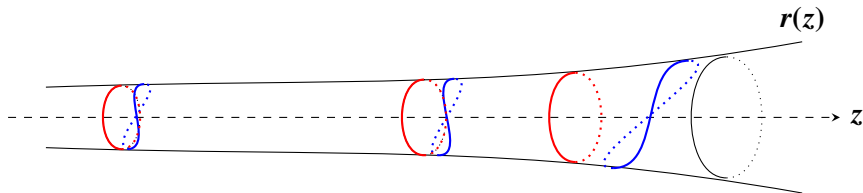


(i) について

$\sup_{z \in (-\infty, a)} r'(z)/r(z) < \infty$ から Parallel を初期条件に持つ CSF は時間大域的に存在する. $T < \infty$ と仮定すると比較原理から曲線は常に有界領域に存在するので, ある正の定数 A に対して $rr'' - 2r'^2 \geq -A$ が成り立つ. よって

$$\Theta_t \geq Ce^{-At} \geq Ce^{-AT} > 0$$

がある正の定数 C に対して成り立つ. したがって前述の 2 つの補題から矛盾が生じることがわかり, CSF は時間大域的に存在する.

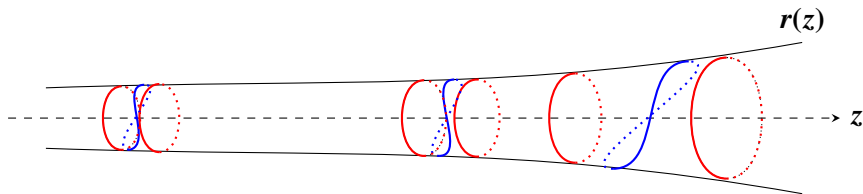


(ii) について

$rr'' - 2r'^2 \geq 0$ から以下が成り立つ:

- $r'(z)/r(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow -\infty$)
- $\Theta_t \geq C$

よって (i) の主張から $T = \infty$ が成立し, $r'(z)/r(z) \rightarrow 0$ と $\Theta_t \geq C$ から $\kappa_t \rightarrow 0$ が従うことがわかる. さらに $\sup_{z \in I} |r^{(i)}(z)/r(z)| < \infty$ ($i \geq 1$) と $\kappa_t \rightarrow 0$ から帰納的に $|\partial_s^{(i)} \kappa_t| \rightarrow 0$ が従う.



時間大域的存在 ($n \geq 2$ の場合)

関数 $r(z)$ と Ric_M がある定数 ρ と $\alpha > 1$ に対して次の条件を満たすとする:

$$\begin{aligned}\text{Ric}_M &\geq n\rho g_M, \quad r' > 0, \\ rr'' - (1 + \alpha)r'^2 + \rho &\geq \max\{\rho, 0\}.\end{aligned}$$

定理 ($n \geq 2$ のとき)

上述の $r(z)$ に関する条件内の定数 $\alpha > 1$ に対して, 初期条件

$$\min_{p \in M_0} \Theta_0(p) > \alpha^{-1/2}$$

を満たす MCF $\{F_t: M \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T)}$ はグラフ性を保ち, $T = \infty$. さらに,

$$R_M = 0, \quad \frac{r^{(i)}(z)}{r(z)} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty) \quad (i \geq 2)$$

と仮定すると, 任意の $i \geq 0$ に対して $|\nabla^i A_t| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つ.

-  A. A. Borisenko and V. Miquel. Mean curvature flow of graphs in warped products. Trans. Amer. Math. Soc. **364**(9) (2012), 4551-4587.
-  K. Ecker and G. Huisken. Mean curvature evolution of entire graphs. Ann. Math. **130**(3) (1989), 453-471.
-  K. Ecker and G. Huisken. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. Invent. Math. **105**(1) (1991), 547-569.
-  N. Fujihara. Mean curvature flows of graphs sliding off to infinity in warped product manifolds. arXiv preprint arXiv:2309.16449. (2023)

-  M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. J. Differential Geom. **23**(1) (1986), 69-96.
-  M. A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. J. Differential Geom. **26**(2) (1987), 285-314.
-  Z. Huang, Z. Zhang, and H. Zhou. Mean curvature flows of closed hypersurfaces in warped product manifolds. Math. Res. Lett. **26**(5) (2019), 1393-1413.
-  G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. J. Differential Geom. **20**(1) (1984), 237-266.