

The H/Q-correspondence and a generalization of the supergravity c-map

長谷川和志 (金沢大学)

2023 年 11 月 20 日

Joint work with Vicente Cortés

部分多様体幾何とリー群作用 2023
～小池直之先生還暦記念研究集会～

Introduction

A. Haydys (J. Geom. Phys. 58 (2008), 293-306) による超ケーラー多様体や四元数ケーラー多様体の構成法が知られている：

- HyperKähler manifold $\leftarrow$ (from) Quaternionic Kähler manifold
- Quaternionic Kähler manifold $\leftarrow$ (from) HyperKähler manifold

これらは、それぞれ

QK/HK- や HK/QK-correspondence,

とよばれている。また,

N. Hitchin(Comm. Math. Phys. 324 (2013), 77–106) も参照のこと.

すでに

QK/HK-correspondence

の四元数多様体と超複素多様体の場合への一般化として

Q/H-correspondence

を V. Cortés and K. H., The quaternionic/hypercomplex- correspondence, Osaka J. Math. 58 (2021), 213–238 で得ている.

今回，超複素多様体から四元数多様体を構成する

the H/Q -correspondence

を報告する．

四元数多様体と超複素多様体

Definition 2.1

(M, Q) : 四元数多様体

: $\Longleftrightarrow$

- (i) Q は $\text{rank } Q = 3$ の $\text{End}(TM)$ の部分束,
- (ii) Q は局所的に *Im* $\mathbb{H}$ -relations を満たす l_1, l_2, l_3 で張られる,
- (iii) $\exists \nabla : Q$ を保つ振れないアファイン接続.

- ∇ は四元数接続とよばれる. 四元数接続は唯一ではない.

以下,

$$\dim M =: 4n \geq 8$$

とする.

Definition 2.2

$(M, H = (l_1, l_2, l_3))$: 超複素多様体

: $\Longleftrightarrow$

- (i) l_1, l_2, l_3 は M 上の複素構造,
- (ii) l_1, l_2, l_3 は $\text{Im}\mathbb{H}$ -relations を満たす.

• $\nabla^0 l_i = 0$ を満たす振れないアファイン接続 ∇^0 が唯一存在する. この接続を **小畠接続** とよぶ. 特に, $(M, Q = \langle l_1, l_2, l_3 \rangle)$ は四元数多様体となる.

The H/Q-correspondence (主結果)

Definition 3.1

超複素多様体 $(M, (l_1, l_2, l_3))$ において, 小冢接続 ∇^0 に対して

$$\nabla^0 V = \text{id}$$

を満たすベクトル場 V が存在するとき, M は**錐的**であるという. また V を**オイラーベクトル場**という.

Definition 3.2

超複素多様体 $(M, (l_1, l_2, l_3))$ 上のベクトル場 Z が

$$L_Z l_1 = 0, L_Z l_2 = -2l_3$$

を満たすとき, Z を**回転ベクトル場**という.

$(M, H = (l_1, l_2, l_3))$: 超複素多様体

Θ : 閉 2 次形式

Z : $L_Z \Theta = 0$ を満たす回転ベクトル場

f : $df = -\iota_Z \Theta$ を満たす M 上の関数

主 $U(1)$ -bundle $\pi : P \rightarrow M$ とその上の接続形式 η でその曲率形式が

$$d\eta = \pi^* \left(\Theta - \frac{1}{2} d((\iota_Z \Theta) \circ l_1) \right).$$

を満たすものを考える.

- $[\frac{1}{2\pi} \Theta] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{Z})$ とすると, このような (P, η) は存在する.

$f_1 := f - (1/2)\Theta(Z, l_1 Z)$ とし, M の各点で 0 にならないとする.

$Z_1 := Z^{h_\eta} + f_1 X_P$ とおく.

(Z^{h_η} は Z の水平持ち上げ, X_P は $\eta(X_P) = \sqrt{-1}$ をみたす基本ベクトル場)

$V_1 := e_1^L - Z_1 : \tilde{M} := \mathbb{H}^* \times P$ 上のベクトル場

(e_1^L は $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ の $(e_1^L)_1 = i \in \mathbb{H}$ を満たす左不変ベクトル場)

$\hat{M} := \tilde{M} / \langle V_1 \rangle : V_1$ の積分曲線のなす空間

Theorem 3.3

商写像 $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ が滑らかな沈めこみであるとき、 $\hat{M}$ は錐的超複素多様体となる。

証明の概略.

- (1) $\tilde{M}$ 上の $(1,1)$ -テンソル $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ で $\text{Ker } l_\alpha = \langle V_1 \rangle$ であり $T\mathbb{H}^* \oplus \text{Ker } \eta$ 上で四元数の関係式を満たすものを定める.
- (2) $L_{V_1} \tilde{l}_\alpha = 0$ が示せるので、 $\hat{M}$ が超複素多様体構造が誘導される.
- (3) $V = \tilde{\pi}_*(e_0^R)$ がこの超複素構造に関してオイラー的となることが示せる (e_0^R は $(e_0^R)_1 = 1$ である $\mathbb{H}^*$ 上の右不変ベクトル場).

Lemma 3.4

V を $\hat{M}$ のオイラーベクトル場とすると、接分布 $\mathcal{D} := \langle V, l_1 V, l_2 V, l_3 V \rangle$ は積分可能である.

$\bar{M} := \hat{M}/\mathcal{D} : \mathcal{D}$ の葉層空間

Theorem 3.5

商写像 $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$, $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow \bar{M}$ がともに滑らかな沈めこみであるとき, $\bar{M}$ は四元数多様体となる.

証明の概略.

- (1) $\hat{\pi}$ の局所切断 $s : U(\subset \bar{M}) \rightarrow \hat{M}$ が概四元数構造 $\bar{Q}$ を与える. (この $\bar{Q}$ は仮定より切断の取り方によらないことが示せる).
- (2) $\hat{M}$ の小島接続を用いて, $\bar{Q}$ に対する四元数接続 $\bar{\nabla}$ が得られる.

Theorem 3.6

$(M, H = (l_1, l_2, l_3))$: 超複素多様体

Θ : 閉 2 次形式

Z : $L_Z \Theta = 0$ を満たす回転ベクトル場

f : $df = -\iota_Z \Theta$ を満たす M 上の関数

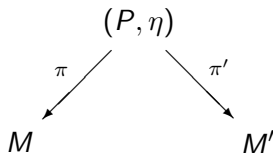
主 $U(1)$ -bundle $\pi : P \rightarrow M$ とその上の接続形式 η でその曲率形式が

$$d\eta = \pi^* \left(\Theta - \frac{1}{2} d((\iota_Z \Theta) \circ l_1) \right).$$

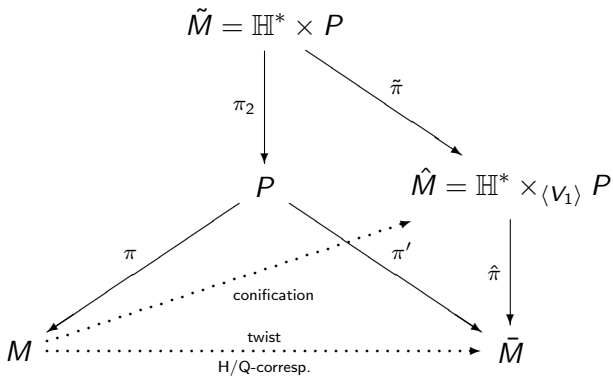
を満たすものを考える. $f_1 := f - (1/2)\Theta(Z, l_1 Z)$ は M の各点で 0 にならないとし, $Z_1 = Z^{h_\eta} + f_1 X_P$ は P 上の自由な $U(1)$ -作用を生成するとする. このとき,

- $\bar{M} = \hat{M}/\mathcal{D}$ は *twist data* $(\Theta - \frac{1}{2} d((\iota_Z \Theta) \circ l_1), Z, f_1)$ によって与えられる M の *twist* に多様体として一致する
- $\hat{M}$ は $\bar{M}$ 上の随伴束 $\mathbb{H}^* \times_{\langle V_1 \rangle} P$ である,

- M' が twist data (F, Z, a) によって与えられる M の **twist** であるとは
- (0) $\pi : P \rightarrow M$ は接続形式 η を持つ主 $U(1)$ -束 (X_P は $\sqrt{-1}$ によって生成される基本ベクトル場),
 - (1) 2 次形式 F は η の曲率 ($d\eta = \pi^*F$)
 - (2) a は $da = -\iota_Z F$ を満たす各点で 0 にならない関数,
 - (3) $Z_1 := Z^{h_\eta} + aX_P$ は P 上の自由な $U(1)$ -作用を生成する,
 - (4) $M' = P/\langle Z_1 \rangle$.



- A. Swann (Duke Math. J. 155 (2010), 403-431) を参照のこと.



この定理における, 超複素多様体 $(M, H = (I_1, I_2, I_3), \Theta, Z)$ から四元数多様体 $(\bar{M}, \bar{Q})$ を構成する手続きを

the Hypercomplex/Quaternionic-correspondence

(H/Q -correspondence for short) という (ことにする).

(0) The HK/QK-correspondence

H/Q-correspondence は HK/HQ-correspondence を一般化したものである.

(1) 錐的超複素多様体

Definition 4.1 (再掲)

超複素多様体 $(M, (l_1, l_2, l_3))$ において, 小畠接続 ∇^0 に対して

$$\nabla^0 V = \text{id}$$

を満たすベクトル場 V が存在するとき, M は錐的であるという. また V をオイラーベクトル場という.

錐的超複素多様体 $(M, H = (l_1, l_2, l_3))$ において, $f_1 = f = 1$, $\Theta = 0$ とし自明束 $P := M \times S^1$ 上で自明な接続を考える. $Z = l_1 V$ は回転的となるが, Z が自由な $U(1)$ -作用を生成すると仮定する.

Example 4.2

$$(M, H) \xrightarrow{\text{H/Q-corres.}} (\bar{M} \cong M, \bar{Q} = \langle H \rangle = \langle l_1, l_2, l_3 \rangle)$$

(2) Hopf 多様体

Example 4.3

$$M = (\mathbb{H}^n \setminus \{0\}) / \langle \lambda A \rangle \xrightarrow{\text{H/Q-corres.}} \bar{M} = (\mathbb{H}^n \setminus \{0\}) / \langle \lambda A(\cdot)q \rangle$$

hypercomplex Hopf

quaternionic Hopf

- $\lambda > 1$.
- $A \in \text{Sp}(n)$,
- $[(A, q)] \in \text{Sp}(n)\text{Sp}(1)$, $\text{Sp}(1) \ni q \neq 1$.
- $U_q(1)$ を q の $\text{Sp}(1)$ における中心化群とする ($U_q(1) \cong U(1)$).
- $\Theta = 0$, $P = M \times U_q(1)$ としその自明な接続をとる.
- なお, 超複素 Hopf 多様体は超ケーラー構造を許容しない. 実際,

$$\tilde{M} / \langle \lambda A \rangle \cong S^1 \times S^{4n-1}$$

である. Q/H-correspondence は真に QK/HK-correspondence を一般化したものである.

- $\tilde{M} := \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\tilde{M}} \cong \tilde{M} & \xrightarrow{\quad / \langle \lambda A(\cdot) R_q \rangle \quad} & \bar{M} \\
 \tilde{\pi}' \uparrow & & \uparrow \pi' \\
 \tilde{P} = \tilde{M} \times U_q(1) & \xrightarrow{\quad / \langle \lambda A \rangle \quad} & P = M \times U_q(1) \\
 \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \tilde{M} & \xrightarrow{\quad / \langle \lambda A \rangle \quad} & M
 \end{array}$$

(3) $SU(3)$

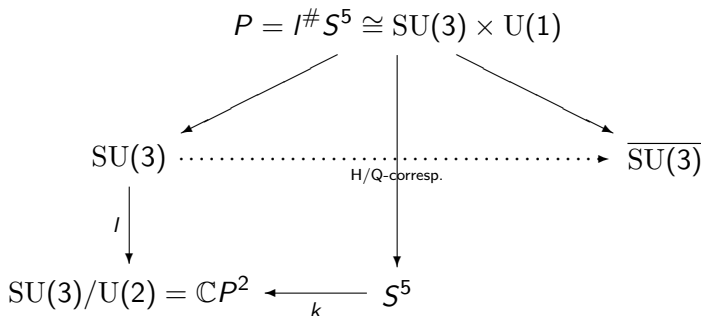
D. Joyce(J. Differential Geometry, 35 (1992), 743-761) によって, $SU(3)$ は左不変な超複素構造 $H = (I_1, I_2, I_3)$ をもつことが知られている.

$(SU(3), H)$ は錐的である.

$Z := I_1 V$ とおくとこれは回転的である. (V はオイラーベクトル場)

次の2つを考えることができる.

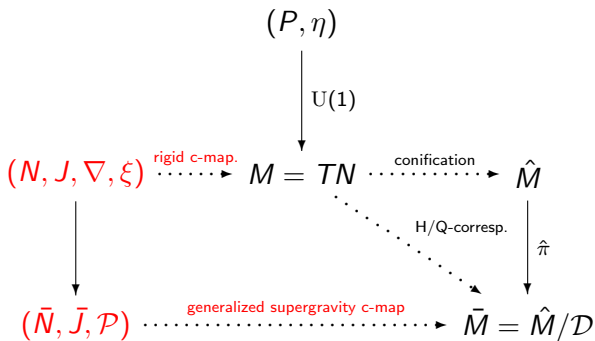
- (1) $P = \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{U}(1)$, $\Theta = 0$ とし自明な接続 (平坦) をとる,
- (2) 引き戻し束 $P = I^* S^5 \cong \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{U}(1)$, S^5 の標準的な接続の引き戻し接続 (非平坦), $\Theta = I^* \omega_{st}$ をとる.



いずれの場合も, H/Q -correspondenc を適用した結果生じる多様体 $\overline{SU(3)}$ は $SU(3)$ と微分同相である. ただし, その上の四元数構造は異なる. (1) の場合, 得られる四元数構造は $\bar{Q} = \langle l_1, l_2, l_3 \rangle$ である.

- この超複素構造 H に関して超ケーラー的となるリーマン計量は存在しない.

(4) 超重力 c-写像の一般化



Definition 4.4

(N, J, ∇, ξ) : 錐的特殊複素多様体

: $\iff \nabla$ は捩じれない平坦接続, $d^\nabla J = 0$, $\nabla \xi = \text{id}$, $L_\xi J = 0$

N の接束 $TN =: M$ に, $(1, 1)$ -テンソル (l_1, l_2, l_3) を以下のように定める :

$$l_1(X^{h\nabla} + Y^\vee) = (JX)^{h\nabla} - (JY)^\vee,$$

$$l_2(X^{h\nabla} + Y^\vee) = Y^{h\nabla} - X^\vee,$$

$$l_3(X^{h\nabla} + Y^\vee) = (JY)^{h\nabla} + (JX)^\vee$$

ここで, $X^{h\nabla} + Y^\vee \in TM$ である. なお, $X^{h\nabla}$ は $X \in TN$ の ∇ -水平持ち上げで, $X^\vee$ は $X \in TN$ の垂直持ち上げである.

- (l_1, l_2, l_3) は超複素構造となり, $Z^M := 2(J\xi)^{h\nabla}$ は回転的となる.

Theorem 4.5 (Generalized rigid c-map)

超複素多様体 $(M = TN, (l_1, l_2, l_3))$ の小島接続は *Ricci* 平坦.

Definition 4.6

$(\bar{N}, \bar{J})$: 射影的特殊複素多様体

: $\Longleftrightarrow \xi - \sqrt{-1}J\xi$ が $\mathbb{C}^*$ -作用を生成し, $p: N \rightarrow \bar{N}$ がこの作用に関して主 $\mathbb{C}^*$ -束となる

- $L_\xi J = L_{J\xi} J = 0$ なので, $p_* \circ J = \bar{J} \circ p_*$ を満たす $\bar{N}$ の複素構造 $\bar{J}$ がとれる.
- 接続

$$\nabla' := \nabla - \frac{1}{2}J(\nabla J)$$

とすると, $\nabla' J = 0$ であり $L_\xi \nabla' = 0$ 及び $L_{J\xi} \nabla' = 0$ が示せる.

- N 上の接続形式 η で $\text{Ker } \eta$ が J -不変となるものを取ると, $\bar{N}$ で複素接続 $\bar{\nabla}'^{\eta}$ が定義できる. この接続は接続形式 η に依存する.

Proposition 4.7

$\bar{N}$ には $(1, 0)$ 型の接続形式を与えるごとに複素接続が定まる. その c -射影構造は $(1, 0)$ 型の接続形式の取り方によらない. これを $\mathcal{P}$ と表す.

- 振れない 2 つの複素接続 ∇^1, ∇^2 が **c -射影同値** であるとは, 複素多様体上の 1-形式 θ で

$$\nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X - \theta(JX)JY - \theta(JY)JX$$

を満たすものが存在することをいう.

- 同値類を **c -射影構造** という.
- $[\bar{\nabla}'^\eta]$ を $\mathcal{P}$ と表す.

$(N, J, \nabla, \xi) : 2(n+1)$ -次元錐的特殊複素多様体

$M := TN$ は超複素多様体となる.

$Z^M := 2(J\xi)^{h\nabla}$ (Z^M は回転的となる)

$\Theta : L_{Z^M}\Theta = 0$ を満たす $M = TN$ 上の閉 2 次形式

主 $U(1)$ -bundle $\pi : P \rightarrow M$ とその上の接続形式 η でその曲率形式が

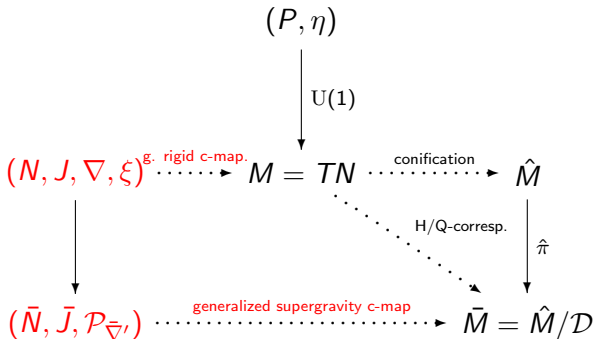
$$d\eta = \pi^* \left(\Theta - \frac{1}{2} d((\iota_{Z^M}\Theta) \circ \iota_1) \right).$$

を満たすものを考える. $f_1 := f - (1/2)\Theta(Z, \iota_1 Z)$ は M の各点で 0 にならないとし, $Z_1 = Z^{h\eta} + f_1 X_P$ は P 上の自由な $U(1)$ -作用を生成するとする.

Example 4.8 (Generalized supergravity c-map)

$2n$ -次元の射影的特殊複素多様体 $(\bar{N}, \bar{J}, \mathcal{P})$ に対して, $(2n+4)$ -次元の葉層構造をもちその葉層空間が $\bar{N}$ に一致するような $4(n+1)$ -次元の四元数多様体 $\bar{M} = \overline{TN}$ が構成できる.

- 上記を満たすような (非自明な) Θ, f, P, η は存在する.



	N	$M = TN$
rigid c-map	特殊ケーラー	超ケーラー
generalized rigid c-map	特殊複素	超複素多様体でその小島接続が Ricci 平坦

	$\bar{N}$	$\bar{M}$
supergravity c-map	射影的特殊ケーラー	四元数ケーラー
generalized supergravity c-map	射影的特殊複素 with c-射影構造	四元数

- 射影的特殊複素多様体は 1 次の斉次関数 $F_0, \dots, F_n$ を用いて局所的に正則 1 次微分形式 $\alpha = \sum_0^n F_i dz_i$ ($\det \left(\operatorname{Im} \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right) \neq 0$) on $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ ($(z_0, \dots, z_n)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準座標系) で表せることが知られている.
- 最も簡単な $\mathbb{C}P^n$ は, $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ で定義された

$$\alpha = - \sum_{i=0}^n \sqrt{-1} z^i dz^i$$

はより得られる.

- 例えば, 正則 1 次微分形式として

$$\alpha = g dz_0 - \sqrt{-1} \sum_{i=1}^n z_i dz_i, \quad g = -\sqrt{-1} z_1^l / z_0^{l-1} (l \neq 1)$$

を考えると, 射影的特殊ケーラー多様体ではないものが得られる ($d\alpha \neq 0$).

ご清聴ありがとうございました.
小池先生、還暦おめでとうございます.