Hypersurfaces in complex-Riemannian geometry

木村 真琴 (茨城大学)

2023 年 11 月 21 日

部分多様体幾何とリー群作用 2023

内容

- 複素リーマン幾何
- 複素球面の複素超曲面
- 複素球面の実超曲面
- 関連する話題

動機

動機

最近の塚田先生のご研究: 複素球面 $\mathbb{CS}^{n-3}$ の複素超曲面 M^{n-4} から, 実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^n)$ の (半分次元の) 全複素部分多様体の構成

$\longrightarrow$ 複素球面の「部分多様体論」「超曲面論」?
「興味深い複素超曲面」?

複素リーマン多様体

複素リーマン多様体

$(M, (\ , \ ))$: **複素リーマン多様体**
$\Leftrightarrow$
M: **複素多様体**, $(\ , \ )_z : T_z^{(1,0)}M \times T_z^{(1,0)}M \to \mathbb{C}$ $(\forall z \in M)$: **正則・非退化・対称テンソル場** (Lebrun '83, Trans. AMS)

Anti-Kähler 多様体

$(M, (\ , \ ))$: **複素リーマン多様体について**,
$\langle \ , \ \rangle = \mathrm{Re}(\ , \ )$ **は** Anti-Kähler **計量**, **すなわち** $\langle \ , \ \rangle$: **符号** (n, n) **の不定値計量で** $\langle JX, JY \rangle = -\langle X, Y \rangle$.

複素リーマン多様体

正則アファイン接続

(M, J): 複素多様体

- ∇: **複素接続** $\Leftrightarrow$ ∇: torsion free, $\nabla J = 0$,
- 複素接続 ∇: **正則** $\Leftrightarrow$ Z, W 正則ベクトル場に対して, $\nabla_Z W$: 正則

命題 (Lebrun)

複素リーマン多様体上,「計量的」な正則アファイン接続 ∇ がただ１つ存在する。

Examples

Example 1. $\mathbb{C}^n$

$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathbb{C}^n \ni w = (w_1, \cdots, w_n) \leftrightarrow$$
$$w_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_z + \cdots + w_n \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_z \in T_z^{(1,0)}\mathbb{C}^n,$$
$$(z, w) = z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n.$$

Example 2. 複素部分多様体

$\mathbb{C}^n$ の「非退化」複素部分多様体

複素球面

Example 3. 複素球面

$\mathbb{CS}^n(1) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} | \ (z, z) = 1\}$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の非退化複素超曲面で, 複素リーマン多様体。等質空間としては

$$\mathbb{CS}^n = SO(n+1, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{C}).$$

Stenzel 計量

複素球面 $\mathbb{CS}^n$ は (実) 球面 $\mathbb{S}^n$ の (余) 接束と同一視できて, 常微分方程式の解を用いて,(正定値) 完備 Ricci flat Kähler 計量が構成できる (Stenzel, '93, Manuscripta Math.)

非退化複素部分多様体

非退化複素部分多様体

$\widetilde{M}$: **複素リーマン多様体**, M: **複素多様体**,
$f : M \to \widetilde{M}$: **非退化正則** immersion $\Rightarrow$

$$f^{-1}T^{(1,0)}\widetilde{M} = f_*(T^{(1,0)}M) \oplus N^{(1,0)}M.$$

Gauss formula

$X, Y \in \mathfrak{X}_M^{(1,0)}$,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = f_*(\nabla_X Y) + \sigma(X, Y),$$

非退化複素部分多様体

Weingarten formula

$X \in \mathfrak{X}_M^{(1,0)}$, $N \in \mathfrak{X}_{NM}^{(1,0)}$,

$$\widetilde{\nabla}_X N = -f_*(A_N X) + \nabla^{\perp}_X N.$$

Properties

$X, Y \in \mathfrak{X}_M^{(1,0)}$, $N \in \mathfrak{X}_{NM}^{(1,0)}$,

$$(\sigma(X,Y), N) = (A_N X, Y),$$
$$A_N J = J A_N.$$

Example: Veronese 曲面

Veronese 曲面

正則 immersion

$$\mathbb{CS}^2 \ni z \mapsto z\,{}^t z \in \mathrm{Sym}_1(3, \mathbb{C})$$
$$= \{Z \in M(3, \mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z,\ \mathrm{trace}\, Z = 1\} \cong \mathbb{C}^5$$

の像は, **中心** $E_3/3$, **半径** $\sqrt{2/3}$ **の複素球面** $\mathbb{CS}^4$ **に含まれる非退化複素曲面。**

非退化複素超曲面

非退化複素超曲面

$\widetilde{M}^{n+1}$: 複素リーマン多様体, M^n: 複素多様体,
$f : M \to \widetilde{M}$: 非退化正則 immersion $\Rightarrow$

$$N_z \in N_z^{(1,0)}M, \quad (N_z, N_z) = 1$$

が, 向きを除いて一意的に定まる (単位法ベクトル)。

形作用素 $A = A_N$

実空間形の等径超曲面

Isoparametric function on real space forms

$\widetilde{M}^{n+1}$: real space form, $F : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$: non-constant smooth function is isoparametric $\Leftrightarrow \exists T, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: smooth, such that

$$|\operatorname{grad} F|^2 = T \circ F, \quad \Delta F = S \circ F.$$

Level hypersurfaces

$\widetilde{M}^{n+1}$: real space form, $F : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$: isoparametric $\Rightarrow$ each level hypersurfaces of F has constant principal curvatures.

複素球面の「複素等径超曲面」

Isoparametric function on complex sphere

$F : \mathbb{CS}^n \to \mathbb{C}$: non-constant holomorphic function is isoparametric $\Leftrightarrow \exists T, S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: holormorphic, such that

$$(\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} F) = T \circ F, \quad \Delta F = S \circ F.$$

Level hypersurfaces

$F : \mathbb{CS}^n \to \mathbb{C}$: isoparametric
$\Rightarrow$ each level hypersurfaces of F has constant principal curvatures.

Example: $g = 1$

Example: $g = 1$

For a fixed $\boldsymbol{w} \in \mathbb{CS}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $\boldsymbol{F} : \mathbb{CS}^n \to \mathbb{C}$,
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) := (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$. $\Rightarrow (\mathrm{grad}\, \boldsymbol{F}, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{F}) = 1 - \boldsymbol{F}^2$,
$\boldsymbol{\Delta F} = -\boldsymbol{nF}$.

For $\cos \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$, the principal curvature of
$\boldsymbol{M}_\alpha := \boldsymbol{F}^{-1}(\{\cos \boldsymbol{\alpha}\})$ is $\cot \boldsymbol{\alpha}$.

Example: $g = 2$

Example: $g = 2$

For $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{CS}^n$ ($z_1 \in \mathbb{C}^{k+1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n-k}$),
$F : \mathbb{CS}^n \to \mathbb{C}$, $F(z) = (z_1, z_1) - (z_2, z_2)$. $\Rightarrow$
$(\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} F) = 4(1 - F^2)$,
$\Delta F = 2(2k - n + 1) - 2(n + 1)F$.

$\cos 2\alpha \in \mathbb{C} - \{0, \pm 1\}$, $M_\alpha := F^{-1}(\{\cos 2\alpha\})$ の主曲率は $\cot \alpha$ (重複度 k), $-\tan \alpha$ (重複度 $n - k - 1$).

Example: $g = 4$, $m_1 = 1$

Example: $g = 4$, $m_1 = 1$

$\widetilde{V}_2 = \widetilde{V}_2^{2n-1} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} | \ (z, z) = (w, w) = 1, \ (z, w) = 0\}$,
$\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $f_\alpha : \mathbb{C}^\times \times \widetilde{V_2} \to \mathbb{C}\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$,

$$f_\alpha(\zeta, (z, w)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\zeta z - \sin\alpha \sin\zeta w \\ \cos\alpha \sin\zeta z + \sin\alpha \cos\zeta w \end{pmatrix},$$

Example: $g = 4$, $m_1 = 1$

Example: $g = 4$, $m_1 = 1$

主曲率: $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, $\dfrac{-1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (**重複度** 1),

$\tan\alpha$, $-\cot\alpha$ (**重複度** $n - 1$).

課題

課題

- $\mathbb{CS}^n$ の第二基本形式が平行な (非退化) 複素部分多様体の分類?
- $\mathbb{CS}^n$ の等質複素超曲面の分類?
- $\mathbb{CS}^n$ の「複素等径超曲面」のさらなる研究?
- Stein 多様体としての性質？
- 「Stenzel 計量」の構成?

複素球面の実超曲面

複素球面の実超曲面

M^{2n-1}: real $(2n-1)$-dim. manifold,
$f: M^{2n-1} \to \mathbb{CS}^n$: immersion.
$D_x := J((f_*)_x(T_xM)) \cap (f_*)_x(T_xM)$,
$\mathcal{H}_x := \{X - iJX \in T_x^{\mathbb{C}}M \mid X \in D_x\}$ が $\forall x \in M$ で非退化のとき，M :**非退化実超曲面**.
$\Rightarrow \exists \xi_x \in D_x^{\perp}$, $(f_*)_x(T_xM) = D_x \oplus \mathbb{R}\{\xi_x\}$, $|(\xi_x, \xi_x)| = 1$. このとき，$N_x := J\xi_x$: **単位法ベクトル場**.

Example: 複素球面の「測地球面」

Example: 複素球面の「測地球面」

$$S_p(r) = \{\exp_p(rz) \in \mathbb{CS}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1},$$
$$(z,p) = 0,\ |(z,z)| = 1\}, \quad (r > 0)$$

主曲率: $-1/r$ (**重複度** 1, **主曲率ベクトル** ξ),
$-\sqrt{(z,z)}\cot(r\sqrt{(z,z)})$ (**重複度** $2n-2$).

Example: 全測地的複素超球面上の tube

Example: 全測地的複素超球面上の tube

$$\{\exp_p(rz) \in \mathbb{CS}^n |\, p \in \mathbb{CS}^{n-1},$$
$$z \in T_p^{\perp}(\mathbb{CS}^{n-1}),\ |(z,z)| = 1\}, \quad (r > 0)$$

主曲率: $1/r$ (**重複度** 1, **主曲率ベクトル** ξ),
$-\sqrt{(z,z)}\tan(r\sqrt{(z,z)})$ (**重複度** $2n-2$).

作業仮説

- $\mathbb{CS}^n$ の Hopf 超曲面の平行超曲面は Hopf?
- $\mathbb{CS}^n$ の複素部分多様体上の tube は Hopf?
- $\mathbb{CS}^n$ の Hopf 超曲面の「平行超曲面の族」，すなわち「normal line congruence」が，$\widetilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の (半分次元) 全複素部分多様体を与える?

$\widetilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の twistor 空間

$\mathbb{C}^{n+3}$ の (複素内積に関する) 複素 2 次元等方的部分空間全体 $H_2(\mathbb{C}^{n+3}) = SO(n+3)/SO(n-1)U(2)$ が四元数対称空間 $\widetilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の twistor 空間である。

$\mathbb{CS}^n$ の Hopf 超曲面の位置ベクトル p と単位法ベクトル N_p について，「ガウス写像」

$$(p, N_p) \mapsto \pi(\mathbb{C}(p, i, 0) + \mathbb{C}(N_p, 0, i))$$

の像が $\widetilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の半分次元の全複素部分多様体を与える!?

Example: $\mathbb{CS}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RS}^n$ 上の tube

Example: $\mathbb{CS}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RS}^n$ 上の tube

$$f_r : V_2(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{CS}^n \quad (r > 0),$$
$$f_r(x, y) = \cosh rx + i \sinh ry,$$
$$f_r(V_2(\mathbb{R}^{n+1})) = \{\exp_p(riy) \in \mathbb{CS}^n | \, p \in \mathbb{RS}^n,$$
$$y \in T_p\mathbb{RS}^n, |y| = 1) \quad (r > 0),$$

主曲率: 0 (**重複度** 1, **主曲率ベクトル** ξ),
$-\tanh r$ (**重複度** $n-1$), $-\coth r$ (**重複度** $n-1$).

Example: $\mathbb{CS}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RS}^n$ 上の tube

Example: $\mathbb{CS}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RS}^n$ 上の tube

そして，$f_r(V_2(\mathbb{R}^{n+1}))$ の「ガウス写像」による像は，$\widetilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の半分次元全測地的，全複素部分多様体 $\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+1}) = Q^{n-1}$ である。

課題

課題

- $\mathbb{CS}^n$ の実超曲面論，Hopf 超曲面?
- $\mathbb{CS}^n$ の等質実超曲面の分類?
- (既約) 四元数対称空間の半分次元全複素部分多様体は，ある (概) 複素多様体の Hopf 超曲面 (の平行超曲面の族，normal line congruence) から得られるのでは？

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ と $G_2/SO(4)$ の場合

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の場合

$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の平行超曲面の族、すなわち normal line congruence に対して、その「Gauss 写像」を考えると、その像は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体である (K, Diff. Geom. App., 2014, 2017).

$G_2/SO(4)$ の場合

$\mathbb{S}^6$ の Hopf 実超曲面から同様のことが言えるのでは?