

無限次元リーマン部分多様体論 とゲージ理論

小池直之

東京理科大学

部分多様体幾何とリー群作用 2023

東京理科大学神楽坂キャンパス

森戸記念館第1フォーラム

2023年11月20日

目次

0. 思い出
1. イントロダクション
2. ヒルベルト空間内の等径部分多様体
3. ホロノミ – 要素写像と引き戻し接続写像
4. リーマンヒルベルト多様体内の
等径部分多様体
5. リーマンヒルベルト多様体上の
水平的超極作用
6. リーマンヒルベルト多様体上の
水平的超極作用の例

0. 思い出

Curriculum Vitae

- **Academic Degrees**

April 1985 ~ March 1987 : Master course, Tokyo University of Science

April 1987 ~ March 1991 : Doctor course, Tokyo University of Science

March 1991 : Doctor of Science, Tokyo University of Science

- **Academic Employment**

April 1993 ~ March 2002 : Research Assistant, Tokyo University of Science

April 2002 ~ March 2007 : Lecturer, Tokyo University of Science

April 2007 ~ March 2014 : Associate Professor, Tokyo University of Science

April 2014 ~ Present : Professor, Tokyo University of Science

大学生時代の思い出 (埼玉大学)

- 大学生時代 (1981～1995)

4 年次の卒研のゼミでは、微分幾何学の奥村正文先生ではなく、位相幾何学の水谷忠良先生のゼミに所属した。先輩に、大塚富美子さん (現・茨城大学) がいらっしゃる。3, 4 年次の頃、木村真琴先生が、大学院生 (奥村研所属) でいらっしゃった。

大学院生時代の思い出 (東京理科大学)

- 大学院生 (修士課程) 時代 (1985～1991)

山口誠一先生と安部直人先生に指導していただいた。

毎週、大学院のゼミ (卒研のゼミ終了後も)、研究室で飲み会があり、その後、神楽坂飯店に行って、紹興酒を飲みながら、食事を御馳走していただいた。帰りは、ご自宅までタクシーでお帰りになり、私たちは、タクシーの車が見えなくなるまでお見送りをした。

大学院生時代の思い出 (東京理科大学)

東大から来た中西泰雄さんと同期で、多様体についてよく議論をした。1年後に、高野嘉寿彦さんが入学され、最も長くゼミ後の飲み会に一緒に参加した。

庄田敏宏さんも卒研時に飲み会に参加した。

元理科大助教の黒須早苗さんも飲み会に参加していた。

庄田さんのHPのふところ手帖にある『昔ばなし』に山口先生のことを詳しく書かれている。

1991 年～1993 年の思い出

- ・ フリーター時代 (1991～1993)

北浦和のワンツーマンで教える塾でアルバイトをした。
浦和高等学校や浦和一女高等学校をはじめ、県内の
有名校の生徒も教えた。

助教時代の思い出 (東京理科大学)

- 助教時代 (1993～2002)

1999 年?、Udo Simon 教授の招待により、ドイツのベルリン工科大学 (TU Berlin) に出張した (初の海外出張)。当時のベルリン工科大学は、D. Fesus, U. Pinkall, L. Vranken Burstall をはじめ、颯爽たるメンバーであった。当時、ベルリン工科大学に滞在していた Haizhon Li (現在、清華大学教授, Hui Ma の supervisor), Simon 先生、私の 4 人で卓球をした。帰りは、フランクフルト空港で乗り換えに失敗し、8 時間待ちした。

講師時代の思い出 (東京理科大学)

- 講師時代 (2002～2008)

若宮校舎の最上階 (5 階) が研究室で、窓ガラス上をヤモリが這っていたこともある。研究室は狭く、書類で一杯で、空いているスペースは、入口からデスクまでの通路しかなかった。

馬場蔵人さんは、私の最初の年 (2002 年) の卒業研究の学生で、その後、大学院に進学され、学位を取得しました。

講師時代の思い出

2002 年、ドイツ・アウグスブルグ大学の E. Heintze 先生
の招待の下、大仁田義裕先生とドイツに出張した。

ふたりで、アウグスブルグ大学の構内にあるレストランで、
ボングリエというステーキを何度も食べた。

滞在中、Ernst Heintze 先生から、無限次元等径部分多様体
の研究について、貴重なアドバイスをいただいた。

講師時代の思い出

大仁田義裕先生と一緒に、Heintze 先生のご自宅にも招待をしていただき、奥様手作りのベリー系のケーキを御馳走になった。Heintze 先生の仕事部屋にも案内していただき、Heinze 先生がスタンディングで研究されていることに驚いた。

講師時代の思い出

2006 年、ドイツのケルン大学の G. Thorbergsson 先生に招待をしていただき、2 週間、滞在した。研究室で、エスプレッソを御馳走してもらったことを覚えている。滞在中、G. Thorbergsson 教授と Hermann(型) 作用、及び、非コンパクト型対称空間への特異軌道をもたない超極作用について、有益な議論をした。

また、同じくケルン大学の H. Reckziegel 教授と de Rham の分解定理の捩じれ積版について、有益な議論をした。

准教授時代の思い出 (東京理科大学)

- 准教授時代 (2007～2014)

2010 年から、平均曲率流の研究を始めた。

2013 年、韓国のテグ大学 (Kyungpook National Univ.) の Young Jin Suh 先生のご招待の下、筑波大学の伊藤光弘先生と一緒に、個別の内容で集中講義を行った。

准教授時代の思い出 (東京理科大学)

- 准教授時代 (2007～2014)

2014 年 8 月に Daejeon(テジョン) の NIMS で開催された
『ソウル ICM2014 Satellite Conference
on Real and Complex Submanifolds』

で講演をした。2 日目のパーティーで、少し飲みすぎた。
行き帰りの空港-テグ間のバス移動は、田中真紀子先生
と同行させていただいた。

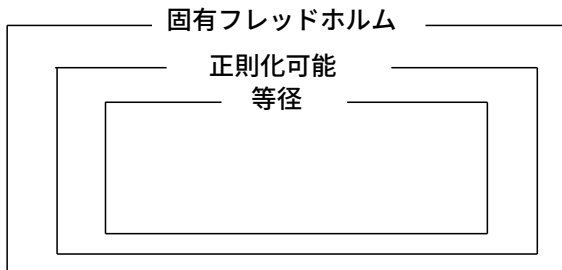
主な理科大出身の微分幾何学者

高野嘉寿彦 (信州大学), 長谷川和志 (金沢大学),
庄田敏宏 (関西大学), 三浦幸平 (宮城大学),
川村昌也 (椙山女学園大学), 田中潮 (大阪公立大学)

1. イントロダクション

ヒルベルト空間内の部分多様体のクラス

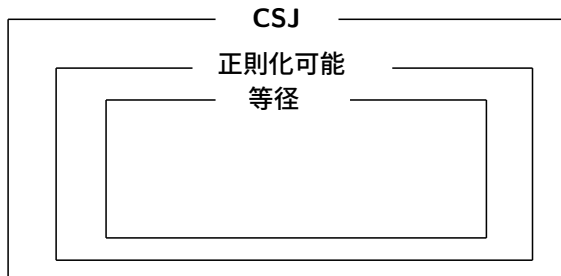
【ヒルベルト空間内の部分多様体のクラス】



- 固有フレッドホルム部分多様体の形作用素 A_ξ ($\xi \in T^\perp M$) 達は, コンパクト作用素である.

リーマンヒルベルト多様体内の部分多様体のクラス

【リーマンヒルベルト多様体内の部分多様体のクラス】



- “CSJ 部分多様体” とは，形作用素 A_ξ 達と法ヤコビ作用素 $\tilde{R}(\xi)$ 達がコンパクト作用素であるような曲率不変な部分多様体を意味する．

動機

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_P^{H^s} & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \downarrow \pi_{(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}} & \searrow \text{hol}_c & \downarrow \phi \\
 \mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & G
 \end{array}$$

P : 閉リーマン多様体 B 上の G バンドル

$(G$: コンパクト半単純リー群)

$(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$: P の x_0 における based ゲージ変換群

ϕ : G に対する平行移動写像

c : x_0 を基点とする一定の速さ $a(> 0)$ の C^∞ ループ

hol_c : c に沿うホロノミー写像

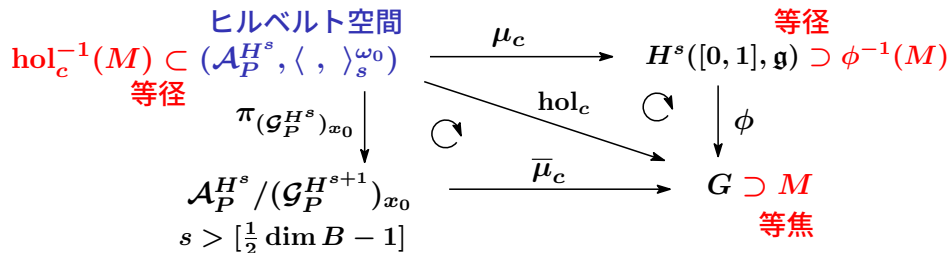
μ_c : c に沿う引き戻し接続写像

動機

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_P^{H^s} & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \pi_{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}} \downarrow & \searrow \overline{\text{hol}}_c & \downarrow \pi_{\text{Ad}} \circ \phi \\
 \mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} & \xrightarrow{\overline{\mu}_c} & G / \text{Ad}(G)
 \end{array}$$

The diagram illustrates a commutative relationship between four mathematical objects. At the top left is $\mathcal{A}_P^{H^s}$, at the top right is $H^s([0, 1], \mathfrak{g})$, at the bottom left is $\mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$, and at the bottom right is $G / \text{Ad}(G)$. A horizontal arrow labeled μ_c points from $\mathcal{A}_P^{H^s}$ to $H^s([0, 1], \mathfrak{g})$. A vertical arrow labeled $\pi_{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}}$ points from $\mathcal{A}_P^{H^s}$ down to $\mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$. A diagonal arrow labeled $\overline{\text{hol}}_c$ points from $\mathcal{A}_P^{H^s}$ down to $G / \text{Ad}(G)$. A horizontal arrow labeled $\overline{\mu}_c$ points from $\mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ to $G / \text{Ad}(G)$. A vertical arrow labeled $\pi_{\text{Ad}} \circ \phi$ points from $H^s([0, 1], \mathfrak{g})$ down to $G / \text{Ad}(G)$. There are two curved arrows: one on the left pointing from $\mathcal{A}_P^{H^s}$ to $\mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$, and one on the right pointing from $H^s([0, 1], \mathfrak{g})$ to $G / \text{Ad}(G)$.

動機



- $\phi^{-1}(M)$: 等径 (Pinkall-Thorbergsson (Math. Z. 1990))
- $\text{hol}_c^{-1}(M)$: 等径 (K (Illinois J. Math., 2023))
- $\phi^{-1}(M)$: $\Omega_e(G)$ 不変, $\text{hol}_c^{-1}(M)$: $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 不変
- $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega_0})$: 滑らかであるが, 非等長的

動機

リーマンヒルベルト多様体

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hol}_c^{-1}(M) \subset (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \supset \phi^{-1}(M) \\
 \text{???} & \searrow \text{hol}_c & \downarrow \phi \\
 \pi(\mathcal{G}_P^{H^s})_{x_0} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & G \supset M \\
 & & \text{等焦}
 \end{array}$$

等径

- $g_s \xrightleftharpoons[\text{def}]{} (g_s)_\omega := \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$
- $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$: 滑らか, かつ, 等長的

2. ヒルベルト空間内の等径部分多様体

固有フレッドホルム部分多様体

V : (可分な) ヒルベルト空間

M : ヒルベルト多様体

$f : M \hookrightarrow V$: はめ込み

$g := f^* \tilde{g}$ (the induced metric)

このとき, (M, g) は V 内の **リーマン部分多様体** とよばれる.

定義 (C.L. Terng, 1989, J.D.G.)

(M, g) : **固有フレッドホルム部分多様体**

$$\iff_{\text{def}} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \operatorname{codim} M < \infty \\ \bullet \exp^\perp|_{B^{\perp r}(M)} : \text{固有写像 } (\forall r > 0) \\ \bullet \exp_{*\xi}^\perp : \text{フレッドホルム作用素 } (\forall \xi \in T^\perp M) \end{array} \right.$$

固有フレッドホルム部分多様体の性質

(M, g) : 固有フレッドホルム部分多様体

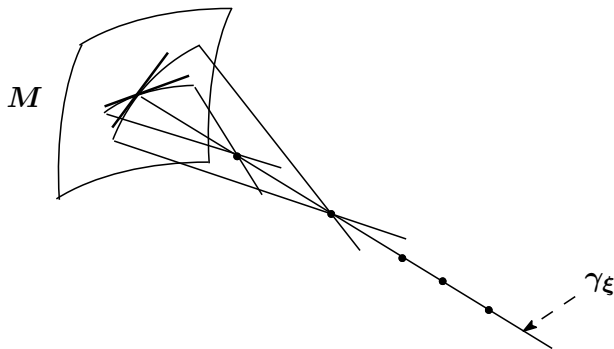
A_ξ : (M, g) の $\xi (\in T^\perp M)$ に対する形作用素

事実

A_ξ は, コンパクト作用素である.

ヒルベルト部分多様体の焦点構造

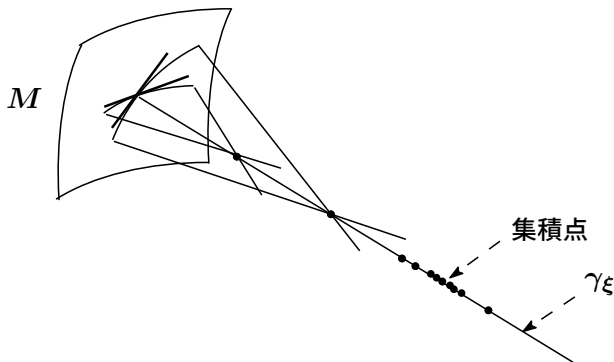
(M, g) : 固有フレッドホルム部分多様体



M の法測地線 γ_ξ に沿う焦点の全体は、
集積点をもたず、各焦点の重複度は有限である。

ヒルベルト部分多様体の焦点構造

(M, g) : (一般の) リーマン部分多様体



M の法測地線 γ_ξ に沿う焦点の全体は，集積点をもつ可能性があり，各焦点の重複度は無限になる可能性がある．

ヒルベルト空間内の等径部分多様体

$(M, g) : V$ 内の固有フレッドホルム部分多様体

Def(C.L. Terng, 1989, J.D.G.)

$$\begin{array}{l} (M, g) : \text{等径} \\ \iff \left\{ \begin{array}{l} \bullet (M, g) \text{ の法ホロノミー群が自明;} \\ \bullet (M, g) \text{ は平坦切断をもつ;} \\ \bullet \text{ 各平行法ベクトル場 } \tilde{\xi} \text{ に対し,} \\ \quad A_{\tilde{\xi}_p} \text{ と } A_{\tilde{\xi}_q} \text{ は直交同値} \\ \quad (p, q : M \text{ の任意の 2 点}). \end{array} \right. \\ \text{def} \end{array}$$

等径部分多様体の主曲率と主曲率分布

$(M, g) : V$ 内の等径部分多様体

$\{A_\xi \mid \xi \in T_p^\perp M\} : \text{対称変換の可換族}$

$$T_p M = \overline{E_0^p \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} E_i^p \right)} \quad \left(E_0^p := \bigcap_{\xi \in T_p^\perp M} \text{Ker } A_\xi \right) \\ \left(\{A_\xi \mid \xi \in T_p^\perp M\} \text{ の同時固有空間分解} \right)$$

各 $\xi \in T_p^\perp M$ に対し,

$$\lambda_i^p(\xi) \stackrel{\text{def}}{\iff} A_v|_{E_i^p} = \lambda_i^p(\xi) \cdot \text{id}$$

このとき, $\lambda_i^p : \xi \mapsto \lambda_i^p(\xi)$ は線形である.

(つまり, $\lambda_i^p \in (T_p^\perp M)^*$)

等径部分多様体の主曲率と主曲率分布

定義 (主曲率, 主曲率分布)

$$\lambda_i \in \Gamma((T^\perp M)^*) \xLeftrightarrow[\text{def}] (\lambda_i)_p := \lambda_i^p \quad (p \in M)$$

主曲率

$$n_i \in \Gamma(T^\perp M) \xLeftrightarrow[\text{def}] \lambda_i(\cdot) = \langle n_i, \cdot \rangle$$

主曲率法ベクトル場

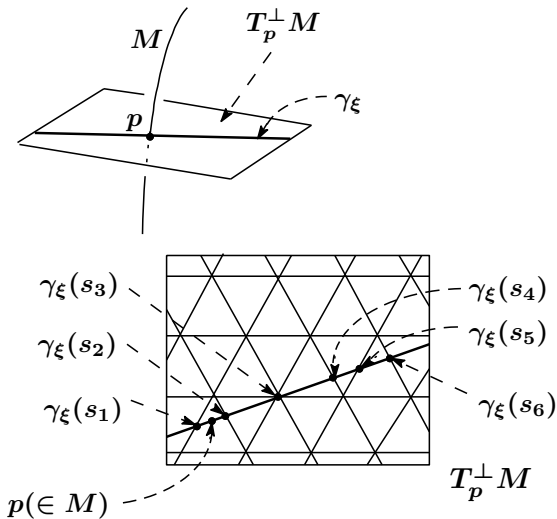
$$E_i \text{ (} TM \text{ の部分ベクトルバンドル)} \xLeftrightarrow[\text{def}] E_i := \coprod_{p \in M} E_i^p$$

主曲率分布

$$l_i^p \subset T_p^\perp M \xLeftrightarrow[\text{def}] l_i^p := (\lambda_i)_p^{-1}(1)$$

焦超平面

焦半径，焦超平面



等径部分多様体の例

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) \subset H^0([0, 1], \mathfrak{g}) & & \\
 \text{等径} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{リフト} \\ \vdots \\ M \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \phi \text{ (平行移動写像)} \\ G \\ \downarrow \pi \\ G/K \end{array} \\
 & & \subset
 \end{array}$$

等焦

Pinkall-Thorbergsson (Math. Z. 1990)

Terng-Thorbergsson (J.D.G. 1995)

等径部分多様体の等質な例

$$\begin{array}{ccc}
 P(G, H \times K) & \curvearrowright & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \text{極作用} & & \downarrow \phi \text{ (平行移動写像)} \\
 H \times K & \curvearrowright & G \\
 \text{超極作用} & & \downarrow \pi \\
 H & \curvearrowright & G/K \\
 \text{超極作用} & &
 \end{array}$$

$$P(H \times K, G) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid (g(0), g(1)) \in H \times K\}$$

等径部分多様体の等質な例

$$\begin{array}{ccc}
 P(G, H \times K) \cdot u & \subset & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \text{等径} & & \downarrow \phi \text{ (平行移動写像)} \\
 (H \times K) \cdot \phi(u) & \subset & G \\
 \text{等焦} & & \downarrow \pi \\
 H \cdot (\phi(u)K) & \subset & G/K \\
 \text{等焦} & &
 \end{array}$$

$(u : P(G, H \times K) \text{ 作用の正則点})$

3. ホロノミー要素写像と 引き戻し接続写像

H^s 接続の空間

$\pi : P \rightarrow (B, g) : G$ バンドル

$$\left(\begin{array}{l} (B, g) : \text{閉リーマン多様体} \\ G : \text{コンパクト半単純リー群} \end{array} \right)$$

$\mathcal{A}_P^{H^s} : P$ の H^s 接続の空間

$\Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) : P$ 上の H^s 級のテンソリアル 1 次微分形式
の空間

$$\left(\begin{array}{l} A(\in \Omega_1^{H^s}(P, \mathfrak{g})) : \text{\textcolor{red}{H}^s 級のテンソリアル 1 次微分形式} \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} R_g^* A = \text{Ad}(g^{-1}) \circ A \quad (g \in G) \\ A|_{\mathcal{V}} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

H^s 接続の空間

$$\omega_0 \in \mathcal{A}_P^{H^s} \text{ 固定}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A}_P^{H^s} & \approx & T_{\omega_0} \mathcal{A}_P^{H^s} = \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) & \approx & \Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \omega & \longleftrightarrow & A(\coloneqq \overrightarrow{\omega_0 \omega}) & \longleftrightarrow & \hat{A} \\
 & & (\text{Ad}(P) = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}) & &
 \end{array}$$

\$H^s\$ 接続の空間

\$\Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})\$ の \$H^s\$ 内積 \$\langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega\$ が次式によって定義される：

$$\langle A_1, A_2 \rangle_s^\omega := \int_{x \in B} \langle (\widehat{A_1})_x, \widehat{\square_\omega^s(A_2)}_x \rangle_{B, \mathfrak{g}} dv_B$$

$$(A_1, A_2 \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{w,2s}(P, \mathfrak{g}))$$

$$\left(\begin{array}{l} \square_\omega := \begin{cases} d_\omega \circ d_\omega^* + d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k \geq 1) \\ d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k = 0) \end{cases} \\ \left(\begin{array}{l} d_\omega : \omega \text{ に関する共変外微分} \\ d_\omega^* : d_\omega \text{ の } L^2 \text{ 内積に関する随伴作用} \end{array} \right) \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{B, \mathfrak{g}} : g \text{ と } \mathfrak{g} \text{ の内積によって定義される} \\ \qquad T^*B \otimes \text{Ad}(P) \text{ のファイバー計量} \\ dv_B : (B, g) \text{ の体積要素} \end{array} \right)$$

ゲージ変換群

$\mathcal{G}_P^\infty$: id_B をカバーする P の C^∞ 級ゲージ変換群

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty := \{ \widehat{g} \in H^\infty(P, G) \mid \widehat{g}(ug) = \text{Ad}(g^{-1})(\widehat{g}(u)) \\ (\forall u \in P, \forall g \in G) \}\end{aligned}$$

$\Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$: $P \times_{\text{Ad}} G$ の C^∞ 切断の空間

$$(\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G) \xLeftrightarrow[\text{def}] \text{Ad}(g_1)(g_2) := g_1 g_2 g_1^{-1} \quad (g_1, g_2 \in G))$$

$\mathcal{G}_P^\infty$, $\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$, 及び $\Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ は,
自然な対応の下に, 同一視される.

ゲージ変換群

$\Gamma^{H^{s+1}}(P \times_{\text{Ad}} G) : \Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ の H^{s+1} 完備化
(Groisser-Parker(Comm. Math. Physics, 1987))

$\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} : \mathcal{G}_P^\infty$ の H^{s+1} 完備化

$\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ の $\mathcal{A}_P^{H^s}$ への作用

定義

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s} \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} & (g \cdot \omega)_u := \text{Ad}(\widehat{g}(u)) \circ \omega_u - (R_{\widehat{g}(u)})_*^{-1} \circ \widehat{g}_{u*} \\ & (g \in \mathcal{H}_P^{H^{s+1}}, \omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}, u \in P) \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ の $\mathcal{A}_P^{H^s}$ への作用

仮定

$$s > \frac{1}{2} \dim B - 1$$

事実 3.1(Uhlenbeck(Comm. Math. Physics, 1982) & Palais()).

- (i) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は C^∞ 級ヒルベルトリー群である.
- (ii) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ は, C^∞ 級である.
- (iii) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ は, 等長的でない.
- (iv) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ は, 等長的である.

$$\left(\begin{array}{l} g_s : \text{次式によって定義される } \mathcal{A}_P^{H^s} \text{ のリーマン計量} \\ (g_s)_\omega := \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega \ (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}) \end{array} \right)$$

ホロノミー要素写像

$c : [0, 1] \rightarrow B$: x_0 を発する定速 $a(> 0)$ の C^∞ 曲線

$\sigma : [0, 1] \rightarrow P$: c の $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ を発する ω_0 水平リフト

$\mathcal{P}_c^\omega$: c に沿う ω に関する平行移動

定義

$$\mathrm{hol}_c : \mathcal{A}_P^{H^s} \rightarrow G$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{P}_c^\omega(u_0) = \mathcal{P}_c^{\omega_0}(u_0) \cdot \mathrm{hol}_c(\omega) \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

この写像 hol_c を c に沿うホロノミー要素写像という.

引き戻し接続写像

定義

$$\begin{aligned} \mu_c : \mathcal{A}_P^{H^s} &\rightarrow H^s([0, 1], G) \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mu_c(\omega))(t) &:= -\omega_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = -(\sigma^*\omega)_t \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &\quad (t \in [0, 1], \omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}) \end{aligned}$$

この写像 μ_c を c に沿う引き戻し接続写像という。

ホロノミー要素写像の性質

命題 3.2.(K,2013).

- (i) $\mu_c : (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \rightarrow (H^s([0, 1], \mathfrak{g}), g_s^o)$ は,
 a 倍の相似沈め込み, かつ, 線形である.
- (ii) $\phi \circ \mu_c = \text{hol}_c$.

定理 3.3(K, Illinois J. M.(2023)).

- (i) $\text{hol}_c : (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \rightarrow (G, g_G)$ は, a 倍の相似沈め込み
である.
- (ii) $\text{hol}_c : (\mathcal{A}_P^{H^0}, g_0) \rightarrow (G, g_G)$ は, 極小ファイバーをもつ.

ヒルベルト空間内の等径部分多様体の構成

$\text{hol}_c : (\mathcal{A}_P^{H^0}, g_0) \rightarrow (G, g_G)$ (ホロノミー要素写像)

$(\mathcal{G}_P^{H^1})_{c(0)} : c(0)$ における based ゲージ変換群

定理 3.4(K, Illinois J. M.(2023))

$M : (G, g_G)$ 内の等焦部分多様体

$\Rightarrow \text{hol}_c^{-1}(M) : (\mathcal{A}_P^{H^0}, g_0)$ 内の $(\mathcal{G}_P^{H^0})_{c(0)}$ 不変な
等径部分多様体

4. リーマンヒルベルト多様体内の 等径部分多様体

曲率不変な部分多様体

[K] N.Koike, Isoparametric submanifolds in a Riemannian Hilbert manifold, arXiv:math.DG/2311.110074v1.

固有フレッドホルム部分多様体

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$: リーマンヒルベルト多様体

M : $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の部分多様体

定義 (K, 2023)

M : 固有フレッドホルム部分多様体

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \operatorname{codim} M < \infty \\ \bullet \exp^\perp|_{B^\perp_r(M)} : \text{固有写像 } (\forall r > 0) \\ \bullet \exp^\perp_{*\xi} : \text{フレッドホルム作用素 } (\forall \xi \in T^\perp M) \end{array} \right.$$

曲率不変な部分多様体

定義

$$\begin{aligned} (M, g) : \text{曲率不変} \\ \iff_{\text{def}} \tilde{R}(\cdot, \xi)\xi(T_p M) \subset T_p M \quad (\forall p \in M, \forall \xi \in T_p^\perp M) \end{aligned}$$

$A_\xi : (M, g)$ の $\xi (\in T^\perp M)$ に対する形作用素

$\tilde{R}(\xi) := \tilde{R}(\cdot, \xi)\xi|_{T_p M} : ((M, g)$ の $\xi (\in T^\perp M)$ に対する
法ヤコビ作用素とよばれる.)

CSJ 部分多様体

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$: リーマンヒルベルト多様体

(M, g) : $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の固有フレッドホルム部分多様体

定義 (K, 2023)

(M, g) : **CSJ 部分多様体**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \bullet (M, g) : \text{曲率不変} \\ \bullet A_\xi : \text{コンパクト作用素 } (\forall \xi \in TM) \\ \bullet \widetilde{R}(\xi) : \text{コンパクト作用素 } (\forall \xi \in TM) \end{cases}$

リーマンヒルベルト多様体内の正則化可能部分多様体

V : (可分な) ヒルベルト空間

$\mathcal{A} : V \rightarrow V$: コンパクト作用素

Definition([HLO])

$\mathcal{A}$: 正則化可能 $\xLeftrightarrow{\text{def}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{Tr}_r \mathcal{A} (< \infty), \quad \exists \text{Tr} \mathcal{A}^2 (< \infty) \\ \left(\begin{array}{l} \text{Tr}_r \mathcal{A} := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \mu_i) \\ (\text{Spec } \mathcal{A} = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}) \\ \text{Tr} \mathcal{A}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \\ (\text{Spec } \mathcal{A}^2 = \{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots > 0\}) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

リーマンヒルベルト多様体内の正則化可能部分多様体

定義 (K,2023)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} (M, g) : \text{正則化可能部分多様体} \\ \bullet (M, g) : \text{CSJ 部分多様体} \\ \bullet A_\xi, \tilde{R}(\xi) : \text{正則化可能 } (\forall \xi \in T^\perp M) \end{array} \right.$$

平行部分多様体と焦部分多様体

$M : (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の自明な法ホロノミー群をもつ
CSJ 部分多様体

$\widetilde{\xi} : M$ の平行な法ベクトル場

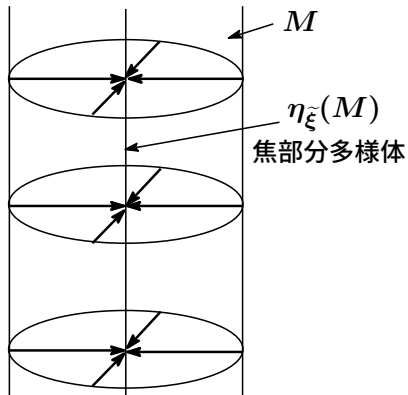
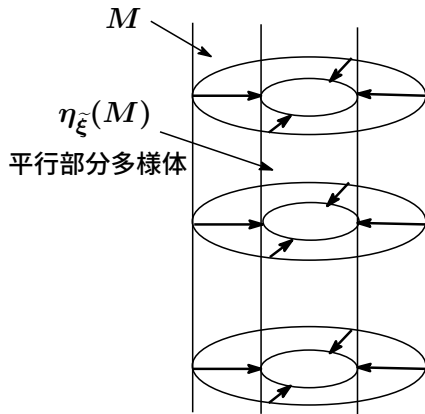
$$\eta_{\widetilde{\xi}} : M \rightarrow \widetilde{M}$$
$$: \stackrel{\text{def}}{\iff} \eta_{\widetilde{\xi}}(x) := \exp^{\perp}(\widetilde{\xi}_x) (= \gamma_{\widetilde{\xi}_x}(1)) \quad (x \in M)$$

$$M_{\widetilde{\xi}} := \eta_{\widetilde{\xi}}(M)$$

$\dim M_{\widetilde{\xi}} = \dim M$ のとき, $M_{\widetilde{\xi}}$ を
 M の $\widetilde{\xi}$ に対する平行部分多様体という.

$\dim M_{\widetilde{\xi}} < \dim M$ のとき, $M_{\widetilde{\xi}}$ を
 M の $\widetilde{\xi}$ に対する焦部分多様体という.

Parallel submanifolds and Focal submanifolds

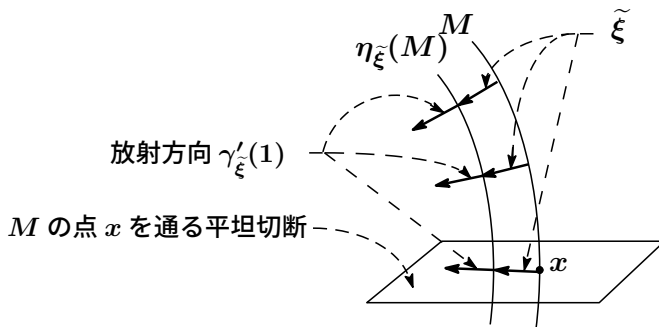


リーマンヒルベルト多様体内の等径部分多様体

定義 (K,2023)

$$\begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ \text{def} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (M, g) : \text{等径部分多様体} \\ \bullet (M, g) : \text{正則化可能部分多様体} \\ \bullet (M, g) : \text{自明な法ホロノミー群をもつ} \\ \bullet (M, g) : \text{平坦切断をもつ} \\ \bullet (M, g) \text{ の十分近くの平行部分多様体は,} \\ \text{放射方向に関して, 一定の正則化された} \\ \text{平均曲率をもつ} \end{array} \right.$$

Isoparametric submanifold



$$\gamma'_{\tilde{\xi}}(1) : x \mapsto \gamma'_{\tilde{\xi}_x}(1) \quad (x \in M)$$

($\gamma_{\tilde{\xi}_x} : \tilde{\xi}_x$ 方向の法測地線)

curvature-adapted 部分多様体

定義

$$\begin{aligned} & (M, g) : \text{curvature-adapted} \\ \iff_{\text{def}} & \left\{ \begin{array}{l} \bullet (M, g) : \text{曲率不変} \\ \bullet [A_\xi, \tilde{R}(\xi)] = 0 \quad (\forall p \in M, \forall \xi \in T_p^\perp M) \end{array} \right. \end{aligned}$$

CSJ 部分多様体と固有フレッドホルム部分多様体

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$: 局所対称なリーマンヒルベルト多様体

M : $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の部分多様体

定理 4.1(K2023).

M : curvature-adapted な CSJ 部分多様体

$\implies M$: 固有フレッドホルム部分多様体

形作用素・法ヤコビ作用素の平行不変性と等径性

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$: 局所対称なリーマンヒルベルト多様体

M : $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の部分多様体

定理 4.2(K2023).

M : curvature-adapted な正則化可能部分多様体

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \bullet M \text{ の法ホロノミー群は自明である} \\ \bullet M : \text{平坦な切断をもつ} \\ \bullet \text{ 任意の平行法ベクトル場 } \widetilde{\xi} \text{ に対し,} \\ \quad \cdot A_{\widetilde{\xi}_x} \text{ と } A_{\widetilde{\xi}_y} \text{ は直交同値である } (\forall x, y \in M) \\ \quad \cdot \widetilde{R}(\widetilde{\xi}_x) \text{ と } \widetilde{R}(\widetilde{\xi}_y) \text{ は直交同値である } (\forall x, y \in M) \end{array} \right.$$

$\implies M$: 等径部分多様体

弱等径部分多様体

定義 (K2023).

M : 弱等径部分多様体

$\xRightarrow{\text{def}} M$: CSJ 部分多様体

s.t. $\left\{ \begin{array}{l} \bullet M \text{ の法ホロノミー群は自明である} \\ \bullet M : \text{平坦な切断をもつ} \\ \bullet \text{ 任意の平行法ベクトル場 } \tilde{\xi} \text{ に対し,} \\ \quad \cdot A_{\tilde{\xi}_x} \text{ と } A_{\tilde{\xi}_y} \text{ は直交同値である } (\forall x, y \in M) \\ \quad \cdot \tilde{R}(\tilde{\xi}_x) \text{ と } \tilde{R}(\tilde{\xi}_y) \text{ は直交同値である } (\forall x, y \in M) \end{array} \right.$

5. リーマンヒルベルト多様体上の 水平的超極作用

水平的超極作用

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$: リーマンヒルベルト多様体

$\mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g})$: ヒルベルトリー群の固有な C^∞ 級作用

定義

$\mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g})$: 水平的等長作用

$\Longleftrightarrow_{\text{def}} \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } g \in \mathcal{G} \text{ と任意の正則点 } u \in \widetilde{M} \text{ に対し,} \\ \text{pr}_{T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} \circ g_*|_{T_u^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} : T_u^\perp(\mathcal{G} \cdot u) \rightarrow T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u) \\ \text{は, 線形等長変換である.} \end{array} \right.$

$(\text{pr}_{T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} : T_{g \cdot u} \mathcal{A}_P^{H^s} \text{ から } T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u) \text{ への直交射影})$

水平的超極作用

定義

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g}) : & \text{水平的超極作用} \\ \iff_{\text{def}} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g}) : \text{水平的等長作用} \\ \bullet \mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g}) : \text{余等質性有限} \\ \bullet \exists \Sigma : \text{完備な平坦な全測地的部分多様体} \\ \quad \text{s.t. すべての } \mathcal{G} \text{ 軌道と直交的に交わる} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Σ は, $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ の平坦な切断とよばれる.

定義

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g}) : & \text{正則化可能な作用} \\ \iff_{\text{def}} \mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \text{ の主軌道達は, 正則化可能} \end{aligned}$$

水平的超極作用

定理 5.1(K,2023)

- (i) 水平的超極可能な作用の主軌道は，
弱等径部分多様体である．
- (ii) 水平的超極かつ正則化可能な作用の主軌道は，
等径部分多様体である．

6. リーマンヒルベルト多様体上の 水平的超極作用の例

リーマンヒルベルト多様体上の 水平的超極作用の例

$$\left(\begin{array}{l} \pi : P \rightarrow (B, g) : G \text{ バンドル} \\ (B, g) : \text{閉リーマン多様体} \\ G : \text{コンパクト半単純リー群} \end{array} \right)$$

$\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s} : \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ の $\mathcal{A}_P^{H^s}$ への自然な作用

$c : [0, 1] \rightarrow B : x_0$ を発する定速 $a(> 0)$ の C^∞ 曲線

$\sigma : [0, 1] \rightarrow P : c$ の $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ を発する
(ω_0 に関する) 水平リフト

$K_1, K_2 : G$ の対称部分群

$$(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} := \{g \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \mid ((\hat{g} \circ \sigma)(0), (\hat{g} \circ \sigma)(1)) \in K_1 \times K_2\}$$

($\hat{g} : g$ に対応する $H^{s+1}(P, G)$ の要素)

リーマンヒルベルト多様体上の 水平的超極作用の例

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} & \xrightarrow{\lambda_c} & P(G, K_1 \times K_2) & & \\
 \searrow & & \searrow & & \\
 \mathcal{A}_P^{H^s} & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) & & \\
 \downarrow \pi_{\tilde{\mathcal{G}}_{K_1, K_2}} & \searrow & \downarrow & & \\
 \mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) / P(G, K_1 \times K_2) & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2}} &= H^s([0, 1], \mathfrak{g}) / P(G, K_1 \times K_2) \\
 &= K_2 \backslash G / K_1
 \end{aligned}$$

リーマンヒルベルト多様体上の 水平的超極作用の例

$x_0 : B$ の基点, $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$

$\sigma : [0, 1] \rightarrow P : c$ の u_0 を発する (ω_0 に関する) 水平リフト

定義

$$\lambda_c : \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \rightarrow H^{s+1}([0, 1], G)$$
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_c(g) := \hat{g} \circ \sigma \quad (g \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}})$$

リーマンヒルベルト多様体上の 水平的超極作用の例

$$(\widetilde{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}})_{K_1, K_2} := (\widetilde{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}})_{K_1, K_2} \rtimes \mu_c^{-1}(\hat{0})$$

定理 6.1(K,2023)

$(\widetilde{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}})_{K_1, K_2} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ は、水平的超極作用である。
それゆえ、この作用の主軌道は、弱等径部分多様体である。

謝辞

ご清聴ありがとうございました！