

ベクトル束によるエルミート対称空間の特徴付け

A characterization of the Hermitian symmetric spaces
by vector bundles

長友 康行

Yasuyuki Nagatomo

明治大学理工学部

Department of Mathematics, Meiji University

1. INTRODUCTION

- (M, ω) : 完備 Kähler 多様体,
- $V \rightarrow M: \mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ により大域的に生成される M 上の正則ベクトル束; 評価写像 $ev: M \times \mathbf{C}^N \rightarrow V: (ev(x, t) = t(x) \in V_x)$

$$(1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } ev \xrightarrow{i} M \times \mathbf{C}^N \xrightarrow{ev} V \rightarrow 0.$$

$\mathbf{C}^N$ がエルミート内積を持つ。

$\implies V$ にエルミート計量 h が導入される。

$\implies$ 正則エルミート束 (V, h) にエルミート接続が存在する。

(1)に対してベクトル束の第2基本形式 $B \in \Omega^{0,1}(V^* \otimes \text{Ker } ev)$ も定義される:

$$B = i^* d ev^*.$$

$$\nabla B \in \Gamma(T^{*\otimes 2} \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev), \quad \nabla^2 B \in \Gamma(T^{*\otimes 3} \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$$

定理 1.1. 次の条件を満たす $\mathbf{C}^N$ 上のエルミート内積が存在する： (1) (V, h) が平坦部分束を持たない。 (2) $\text{trace } B^* B = \omega$.

(I) $(\nabla B)^{0,2} = 0 \implies M$ は古典型かつコンパクト型のエルミート対称空間である。

(II) (V, h) のエルミート接続の曲率 R^V が $\nabla R^V = 0$ を満たし、かつ $(\nabla^2 B)^{0,3} = 0 \implies M$ はコンパクト型のエルミート対称空間である。

また、(I), (II) が成り立つとき、 (V, h) はそのエルミート接続が標準接続となる等質ベクトル束である。

$$f(x) = \text{Ker } ev_x \subset \mathbf{C}^N,$$

と定義される写像 $f : M \rightarrow \text{Gr}_p(\mathbf{C}^N)$ を利用する。 f は $(V \rightarrow M, \mathbf{C}^N)$ もしくは $(V, \mathbf{C}^N)$ による**導入写像**といわれる。

定理 1.2. 次の2条件は同値である。

- (I) $\exists V \rightarrow M$: 正則ベクトル束、 $\exists \mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ s.t.
(1) $ev_x : \mathbf{C}^N \rightarrow V_x$: 全射. (2) (V, h) が平坦部分束を持たない. (3) $trace B^* B = \omega$. (4) $(\nabla B)^{0,2} = 0$.
- (II) $\exists f : (M, \omega) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$: 正則全測地的等長はめ込み。

定理 1.3. 次の2条件は同値である。

- (I) $\exists V \rightarrow M$: 正則ベクトル束、 $\exists \mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ s.t. 上記 (1) (2) (3) を満たし、かつ (4) $\nabla R^V = 0$. (5) $(\nabla B)^{0,3} = 0$
- (II) $\exists f : (M, \omega) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$: 正則等長はめ込み s.t.
$$\nabla R^{f^* Q} = 0, \quad \partial \alpha = 0.$$

2. 準備

2.1. グラスマン多様体の幾何学.

$Gr_p(\mathbf{C}^N) : \mathbf{C}^N$ 内の p 次元部分空間のなすグラスマン多様体

$S \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N) : \underline{\text{tautological vector bundle.}}$

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{i_S} Gr_p(\mathbf{C}^N) \times \mathbf{C}^N \xrightarrow{\pi_Q} Q \rightarrow 0,$$

$Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N) : \underline{\text{universal quotient bundle.}}$

$$T := TGr_p(\mathbf{C}^N) \cong S^* \otimes Q.$$

次に $\mathbf{C}^N$ にエルミート内積を固定する。このとき、

- S にはファイバー計量 h_S と接続 $\nabla^S = i_S^* di_S$ が導入される。
- Q にもファイバー計量 h_Q と接続 $\nabla^Q = \pi_Q d\pi_Q^*$ が導入される。
- T にもリーマン計量 $h_{S^*} \otimes h_Q$ が導入される。これをFubini-Study計量とよぶ。 ∇^S 、 ∇^Q は標準接続といわれる。

2.2. $Gr_p(\mathbf{C}^N)$ への正則等長写像.

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ 正則等長はめ込み

$\alpha : f$ の第2基本形式の $(2, 0)$ 成分

定義 2.1. 普遍商束 Q の引き戻し束上の f による誘導接続の曲率が平行であるとき、 f は**平行曲率条件**を満たすといわれる ($\nabla R^{f^*Q} = 0$)。

α が反正則であるとき、すなわち任意の $Z \in T_{1,0}M$ に対して、 $\nabla_Z \alpha = 0$ を満たすとき、 f は**反正則第2基本形式**を持つという ($\partial \alpha = 0$)。

本講演では平行曲率条件を満たし、反正則第2基本形式をもつ完備ケーラー多様体から $Gr_p(\mathbf{C}^N)$ への正則等長はめ込みを分類する。

2.3. $Gr_N(\mathbf{C}^{N+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{C}^{N*})$ への正則等長写像.

$Q = \mathcal{O}(1)$, $R^{\mathcal{O}(1)} = -\sqrt{-1}\omega_N$, ω_N : Fubini-Study 計量

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_N(\mathbf{C}^{N+1})$: 正則写像 $\implies f^*\mathcal{O}(1)$: **正則直線束**

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_N(\mathbf{C}^{N+1})$: 正則等長はめ込み $\implies f^*\omega_N = \omega$.

したがって、 $\nabla R^{f^*\mathcal{O}(1)} = 0$. すなわち、 f が正則等長はめ込みならば、平行曲率条件は自動的に満たされる。

また、Gauss-Codazzi-Ricci 方程式から

$$\nabla\alpha = 0 \iff \partial\alpha = 0$$

であることがわかる。

中川-高木は $\nabla\alpha = 0$ を満たす完備ケーラー多様体から CP^N への正則等長はめ込みを分類した。(なお、塚田先生は $\nabla\alpha = 0$ を満たす完備ケーラー多様体からエルミート対称空間への正則等長はめ込みを分類した。)

中川–高木写像: $f : M \rightarrow \mathbf{C}P^N$ を $\nabla\alpha = 0$ を満たす完備ケーラー多様体 M から $\mathbf{C}P^N$ への正則等長はめ込みとする ($\alpha \neq 0$)。

定理 2.2.(中川–高木) M は次のいずれかである。

- (1) $\mathbf{C}P^m$, (2) $Gr_2(\mathbf{C}^m)$, (3) $Gr_2(\mathbf{R}^m)$, (4) $SO(10)/U(5)$,
 (5) $E_6/Spin(10) \times U(1)$, (6) $\mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}P^n$.

それぞれのリー群の ϖ_i を最高ウェイトとする既約表現を $W(\varpi_i)$ と略記する。

定理 2.3.(中川–高木) f は以下の誘導写像である。

- (1) $(\mathcal{O}(2) \rightarrow \mathbf{C}P^m, S^2\mathbf{C}^{m+1})$, (2) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow Gr_2(\mathbf{C}^m), W(\varpi_2))$,
 (3) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow Gr_2(\mathbf{R}^n), W(\varpi_1))$,
 (4) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow SO(10)/U(5), W(\varpi_4) \text{ or } W(\varpi_5))$,
 (5) $(\mathcal{O}(1) \rightarrow E_6/Spin(10) \times U(1), W(\varpi_1) \text{ or } W(\varpi_6))$,
 (6) $(\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}P^n, \mathbf{C}^{m+1} \otimes \mathbf{C}^{n+1})$.

● 中川–高木の結果の（我々の立場からの）証明の概略

- (1) Gauss-Codazzi 方程式を使用して M がコンパクト型のエルミート対称空間 G/K であることを示す。
- (2) $H^2(G/K; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ なので、 $b_2 = 1$ を満たす旗多様体 N の $\mathbf{C}P^n$ への正則等長はめ込みを分類する。これは、正の直線束 $L \rightarrow N$ と $H^0(N; L)$ による誘導写像（小平埋め込み）の分類となる。
- (3) 旗多様体 N の正則直線束はすべて等質束なので、Bott-Borel-Weil の定理から、 $H^0(N; L)$ は G 表現空間となる。これらの等質性から、 $(L, H^0(N; L))$ による誘導写像は同変等長写像となる。このようにして**存在**の問題は具体的に解ける。 $\nabla^k \alpha$ も計算できる。
- (4) 最後に $\mathbf{C}P^N$ への正則等長写像に関する **Calabi の剛性定理** から、**一意性**が言える。このようにして分類が完成する。

本講演では、中川–高木の結果をグラスマン多様体への写像に拡張する。

3. グラスマン多様体への写像

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を正則等長写像とする。

$$0 \rightarrow U := f^*S \xrightarrow{i} M \times \mathbf{C}^N \xrightarrow{ev} V := f^*Q \rightarrow 0,$$

一点 $x \in M$ を固定し、次の線形写像を考える：

$$B_x : T_{0,1}M \otimes V \rightarrow U, \quad B_x(\bar{X} \otimes v) = (B_{\bar{X}}v)_x$$

$$(\nabla B)_x : T_{0,1}M^{\otimes 2} \otimes V \rightarrow U, \quad (\nabla B)_x(\bar{X} \otimes \bar{Y} \otimes v) = (\nabla_{\bar{X}}B)(\bar{Y})v_x$$

定理 3.1. 次が成り立つ。

(I) $\nabla R^{f^*Q} = 0 \implies N_1 = \cup_{x \in M} \text{Im } B_x$ は U の部分束となる。

(II) $\nabla R^{f^*Q} = 0$ かつ $\partial\alpha = 0 \implies N_2 = \cup_{x \in M} \text{Im } \nabla B_x$ は U の部分束となる。

したがって、次の分解を得る：

$$M \times \mathbf{C}^N = U \oplus V = N_2 \oplus N_1 \oplus V.$$

そこで別の評価写像 $\tilde{e}v : M \times \mathbf{C}^N \rightarrow N_2 \oplus V$ が得られるので、誘導写像 $\tilde{f} : M \rightarrow Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ が $\tilde{f}(x) = \text{Ker } \tilde{e}v_x \subset \mathbf{C}^N$ として定義される。 $\tilde{f}$ による M の誘導計量を $\tilde{g}$ とおく。

$f : (M, \omega) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ は $\nabla R^{f^*Q} = 0$ かつ $\partial\alpha = 0$ を満たすものとする。

定理 3.2. $\tilde{f} : (M, \tilde{g}) \rightarrow Gr_{n_1}(\mathbf{C}^N)$ は全測地的はめ込みとなる。 $\tilde{g}$ の Levi-Civita 接続は (M, ω) の Levi-Civita 接続と一致する。特に M は局所対称空間となる。

定理 3.3. $(M, \omega) : \text{完備}$ 、 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ が充満
 $\implies M$ はコンパクト型のエルミート対称空間、普遍商束の引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ は等質ベクトル束となり、その誘導接続は標準接続となる。

4. CALABIの剛性定理の一般化

定理 4.1. (Calabi) $f : M \rightarrow \mathbf{C}P^n$ が充満な正則等長はめ込みならば、 n は一意的であり、 f も合同を除いて一意的となる。

定義 4.2. $(V, h) \rightarrow M$: エルミート正則束。正則写像 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ による引き戻し束 $(f^*Q, f^*h_Q) \rightarrow M$ が (V, h) とエルミート正則束として同型であるとき、 f は (V, h) に対してゲージ条件をみたすという。 ((f^*Q, f^*h_Q) は半正である。)

定理 4.3. (Calabi) (L, h) をケーラー多様体 (M, ω) 上の正の直線束であり、その曲率が $-\sqrt{-1}\omega$ を満たすとする。
 $f : M \rightarrow \mathbf{C}P^n = Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ が (L, h) に対して、ゲージ条件をみたす充満な正則写像であるならば、 n は一意的であり、 f も合同を除いて一意的となる。

定理 4.4. (V, h) をケーラー多様体 M 上の正のエルミート正則ベクトル束とする。

$f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ が (V, h) に対してゲージ条件をみたす充満な正則写像であるならば、 N は一意的であり、 f も合同を除いて一意的となる。

系 4.5. (V, h) をケーラー多様体 M 上の半正のエルミート正則ベクトル束とする。また、正の直線束 (L, h_L) に対してゲージ条件をみたす複素射影空間への充満な正則はめ込み $\tilde{f}$ が存在するとする。

$f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ が (V, h) に対してゲージ条件をみたす充満な正則写像であるならば、 N は一意的であり、 f も合同を除いて一意的となる。

定理 4.6. $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を完備ケーラー多様体 M からグラスマン多様体への充満な全測地的正則等長はめ込みとする。

f が既約型であるならば、 M は古典型かつコンパクト型の既約エルミート対称空間であり、 f は次の誘導写像となる。

- (1) $(\mathbf{C}P^n, W(\varpi_i))$ ($i = 1, \dots, n$) $f = id_{\mathbf{C}P^n}$ when $i = 1$ and n .
- (2) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_n)), (Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_1))$ $f = id_{Gr_p(\mathbf{C}^{n+1})}$.
- (3) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n+1}), W(\varpi_n))$
- (4) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_{n-1})), (Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_n))$
- (5) $(Sp(n)/U(n), W(\varpi_1)),$ (6) $(SO(2n)/U(n), W(\varpi_1))$

f が既約型でないならば、 f は直和型となる：

$$f = f_1 \times \cdots \times f_l,$$

ここで、 f_j ($j = 1, \dots, l$) は上の表にある既約型の写像である。

定理 4.7. $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ を完備ケーラー多様体 M からグラスマン多様体への $\nabla R^{f^*Q} = 0$ かつ $\partial\alpha = 0$ を満たす充満な正則等長はめ込みとする ($\alpha \neq 0$)。

f が既約型であるならば、 M はコンパクト型のエルミート対称空間であり、 f は次の誘導写像となる。

- (1) $(M, \mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$: $\text{Lie}(G)$ の複素化、 $M = G/K$
- (2)* $(\mathbf{C}P^n, W(\varpi_i + \varpi_j) \text{ or } W(\varpi_{n+1-i} + \varpi_{n+1-j}))$, $i \leq j$,
- (3) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(2\varpi_1) \text{ or } W(2\varpi_n))$, $2 \leq p \leq n-1$.
- (4)* $(Gr_2(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_i) \text{ or } W(\varpi_{n+1-i}))$, $2 \leq i \leq n-1$.
- (5) $(Gr_p(\mathbf{C}^{n+1}), W(\varpi_2) \text{ or } W(\varpi_{n-1}))$, $3 \leq p \leq n-2$.
- (6)* $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n+1}), W(\varpi_i))$, $1 \leq i \leq n-1$.
- (7) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n+1}), W(2\varpi_n))$,
- (8)* $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_i))$, $1 \leq i \leq n-2$.
- * (2) $i = j = 1$, (4) $i = 2$, (6), (8) $i = 1$

- (9) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(2\varpi_{n-1}))$ or $W(2\varpi_n)$, $(n : \text{odd})$.
(10) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(2\varpi_{n-1}))$, $(n : \text{even})$.
(11) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(2\varpi_n))$, $(n : \text{even})$.
(12) $(Gr_2(\mathbf{R}^{2n}), W(\varpi_{n-1} + \varpi_n))$,
(13) $(Sp(n)/U(n), W(\varpi_2))$, (14) $(SO(2n)/U(n), W(2\varpi_1))$,
(15)* $(SO(10)/U(5), W(\varpi_4)$ or $W(\varpi_5))$.
(16) $(SO(12)/U(6), W(\varpi_5))$. (17) $(SO(12)/U(6), W(\varpi_6))$.
(18)* $(E_6/Spin(10) \times U(1), W(\varpi_1)$ or $W(\varpi_6))$.
(19) $(E_6/Spin(10) \times U(1), W(\varpi_2))$, (20) $(E_7/E_6 \times U(1), W(\varpi_1))$.
(21)* $(M_1 \times M_2, W(\lambda_1) \otimes W(\lambda_2))$, $(M_i, W(\lambda_i))$ は定理 4.6 内の
既約型全測地的はめ込みのいずれか。 * $M_i = \mathbf{C}P^{n_i}$, $\lambda_i = \varpi_1$.

f が既約型でないならば、 f は直和型となる : $f = f_1 \times \cdots \times f_l$,
ここで、 f_j ($j = 1, \dots, l$) は上の表にある既約型の写像である。