

令和 5 年 11 月 20 日
部分多様体幾何とリー群作用2023
東京理科大学 神楽坂キャンパス
森戸記念館第1フォーラム

概接触構造と類似の幾何構造をもつ 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

信州大学
高野 嘉寿彦

目 次

1. 統計多様体
2. 統計モデル
3. Kähler-like 統計多様体
4. Sasaki-like 統計多様体
5. 統計沈め込み
6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

定義 1.1. (M, g) を擬リーマン多様体, ∇ をアファイン接続する。 M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z)$$

によりもう一つのアファイン接続 ∇^* を定義する。 ∇^* を g に関する ∇ の共役接続または双対接続という。接続 ∇ と ∇^* が捩じれがないとき, (M, g, ∇) を統計多様体という。

定義 1.1 より $(\nabla^*)^* = \nabla$ を満たし, $\frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$ は計量的である。

アファイン接続 ∇ 及び ∇^* に関する曲率テンソルをそれぞれ R 及び R^* とする。このとき, ベクトル場 X, Y, Z, W に対して

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(Z, R^*(X, Y)W)$$

が成り立つ。ここで, $R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z$ である。これより, R が恒等的に零であることと R^* が恒等的に零であることは同値である。

定義 1.2. アフィン接続 ∇ に関する曲率テンソル R が

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

を満たすとき, 統計多様体 (M, g, ∇) を定曲率空間という。ここで, c は定数である。

定義 1.3. 統計多様体 (M, g, ∇) において, $T_p M$ の 2 次元部分空間 (平面) を π とし, $\{X_i, X_j\}$ ($i \neq j$) を π の基底とする。このとき

$$K(X_i, X_j) = \frac{1}{2} \frac{g(R(X_i, X_j)X_j, X_i) + g(R^*(X_i, X_j)X_j, X_i)}{g(X_i, X_i)g(X_j, X_j) - g(X_i, X_j)^2}$$

をアフィン接続 ∇ に関する断面曲率という ([7])。但し, g は非退化である。

注意 1.1. アフィン接続 ∇ に関する断面曲率は基底の取り方に依らない。
このため, $K(\pi)$ で表す。

注意 1.2. アフィン接続に関する定曲率空間に対して $K(\pi) = c$ である。

目 次

1. 統計多様体
2. 統計モデル
3. Kähler-like 統計多様体
4. Sasaki-like 統計多様体
5. 統計沈め込み
6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

【多項分布】

$k = 1, 2, \dots, n + 1$ に対して

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = N$$

を満たす $x_k \in \{0, 1, \dots, N\}$ 及び

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1} = 1$$

を満たす正数 p_k を考え,

$$p(x; \xi) = \frac{N!}{x_1! x_2! \dots x_{n+1}!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_{n+1}^{x_{n+1}}$$

を確率密度関数とする**多項分布** (multinomial distribution) を考える。但し, $\xi = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ である。多項分布のなす空間を

$$M = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_k > 0, p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1\}$$

とする。

Fisher 計量 g の成分 g_{ij} は

$$g_{ij} = \frac{N}{p_i} \delta_{ij} + \frac{N}{p_{n+1}}$$

であり, 実数 α に対して α -接続 $\nabla^{(\alpha)}$ は次のようになる:

$$\nabla_{\partial_i}^{(\alpha)} \partial_j = \frac{1}{2} (1 + \alpha) \frac{1}{p_{n+1}} \sum_{s=1}^n p_s \partial_s, \quad (i \neq j)$$

$$\nabla_{\partial_i}^{(\alpha)} \partial_i = \frac{1}{2} (1 + \alpha) \left\{ \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_{n+1}} \right) \sum_{s=1}^n p_s \partial_s - \frac{1}{p_i} \partial_i \right\}$$

ここで, $\partial_i = \partial / \partial p_i$ ($i = 1, \dots, n$) である。このとき, 統計多様体 $(M, g, \nabla^{(\alpha)})$ は定曲率 $\frac{1}{4N} (1 + \alpha)(1 - \alpha)$ の定曲率空間である。特に, 統計多様体 $(M, g, \nabla^{(\pm 1)})$ はそれぞれ ± 1 平坦である([16])。

また, n が偶数ならば $\nabla^{(\pm 1)}$ に関して平行となる概複素構造が定まる。

目 次

1. 統計多様体
2. 統計モデル
3. Kähler-like 統計多様体
4. Sasaki-like 統計多様体
5. 統計沈め込み
6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

定義 3.1. M を

$$J^2 = -I$$

を満たす (1,1) 型のテンソル場 J をもつ滑らかな多様体とする。このとき, M を概複素構造 J をもつ概複素多様体という。

定義 3.2. 概複素構造 J に対して

$$g(JE, F) + g(E, J^*F) = 0$$

により定まる (1,1) 型のテンソル場 J^* をもつ擬リーマン多様体 (M, g, J) を概 Hermite-like 多様体という。

概 Hermite-like 多様体において

$$(J^*)^* = J, \quad (J^*)^2 = -I, \quad g(JE, J^*F) = g(E, F)$$

が成り立つ。

補題 A. (M, g, J) が概 Hermite-like 多様体であることと, (M, g, J^*) が概 Hermite-like 多様体であることは同値である。

定義 3.3. 概複素構造 J がアファイン接続 ∇ に関して平行であるとき, (M, g, ∇, J) を Kähler-like 統計多様体という。

Kähler-like 統計多様体において

$$g((\nabla_G J)E, F) + g(E, (\nabla_G^* J^*)F) = 0$$

が成り立つ。

補題 B. (M, g, ∇, J) が Kähler-like 統計多様体であることと, (M, g, ∇^*, J^*) が Kähler-like 統計多様体であることは同値である。

定義 3.4. Kähler-like 統計多様体において

$$R(E, F)G = \frac{c}{4} [g(F, G)E - g(E, G)F - g(F, JG)JE + g(E, JG)JF \\ + \{g(E, JF) - g(JE, F)\}JG]$$

を満たすとき, M を定正則断面曲率 c の Kähler-like 統計多様体という。
ここで, c は定数である。

注意 3.1. ケーラー多様体においては, 定正則断面曲率 c をもつ空間になる。

注意 3.2. 曲率 R は $R(E, F)JG = JR(E, F)G$, 第1及び第2ビアンキの恒等式を満たす。

曲率 R が第2ビアンキの恒等式を満たすことは

$$S_E F = \nabla_E F - \nabla_E^* F$$

を用いて確かめられる。 $S_E F = S_F E$ 及び $g(S_E F, G) = g(F, S_E G)$ が成り立つ。

目 次

1. 統計多様体
2. 統計モデル
3. Kähler-like 統計多様体
4. Sasaki-like 統計多様体
5. 統計沈め込み
6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

定義 4.1. M を $(2n + 1)$ -次元多様体, φ, ξ, η をそれぞれ $(1,1)$ 型のテンソル場, ベクトル場, 1-形式とする。 φ, ξ, η が

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 E = -E + \eta(E)\xi$$

を満たすとき, M を **概接触構造** (φ, ξ, η) をもつ **概接触多様体** という。

概接触構造 (φ, ξ, η) は

$$\varphi\xi = 0, \quad \eta(\varphi E) = 0$$

を満たす。

例 1 (概接触多様体)

$\mathbb{R}^5$ の局所座標系を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ とし,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (-x_4, 0, x_2, 0, 1)$$

とすると, $\mathbb{R}^5$ は概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触多様体である。また,

$$\eta \wedge (d\eta)^2 = 2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \neq 0$$

だから, η は接触構造である。

次に, M の計量 g を用いて

$$\eta(E) = \varepsilon g(\xi, E)$$

とおくと $g(\xi, \xi) = \varepsilon$ である。ここで, $\varepsilon = -1$ または 1 であり, $\varepsilon = -1$ のとき ξ は時間的, $\varepsilon = 1$ のとき ξ は空間的である。

定義 4.2. 概接触構造 (φ, ξ, η) に対して

$$g(\varphi E, F) + g(E, \varphi^* F) = 0$$

により定まる $(1,1)$ 型のテンソル場 φ^* をもつ擬リーマン多様体 (M, g) を概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体という。

概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体において

$$(\varphi^*)^* = \varphi, \quad (\varphi^*)^2 E = -E + \eta(E)\xi, \quad \varphi^* \xi = 0, \quad \eta(\varphi^* E) = 0,$$

$$g(\varphi E, \varphi^* F) = g(E, F) - \varepsilon \eta(E)\eta(F)$$

が成り立つ。

補題 C. (M, g) が概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体であることと,
 (M, g) が概接触構造 (φ^*, ξ, η) をもつ概接触計量多様体であることは同値である。

例 2 (概接触計量多様体)

$M^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_2 > 0, x_4 > 0\} \subset \mathbb{R}^5$ を例 1 の概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体の部分集合とし,

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon x_4^2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon x_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon x_2^2 & 1 & \varepsilon x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\varepsilon x_4 & 0 & \varepsilon x_2 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\varphi^* \partial_1 = \frac{\varepsilon}{x_2 x_4} \partial_1 + \partial_3 - \partial_4 - \frac{x_2^2 - \varepsilon}{x_2} \partial_5, \quad \varphi^* \partial_2 = -\frac{\varepsilon}{x_2 x_4} \partial_1 + \partial_4 - \frac{\varepsilon}{x_2} \partial_5,$$

$$\varphi^* \partial_3 = -\partial_1 - \partial_2 - x_4 \partial_5, \quad \varphi^* \partial_4 = \frac{1}{x_2^2 x_4^2} \partial_1 - \partial_2 + \frac{\varepsilon}{x_2 x_4} \partial_3 - \frac{\varepsilon}{x_2 x_4} \partial_4 - \frac{\varepsilon x_2^2 - 1}{x_2^2 x_4} \partial_5, \quad \varphi^* \partial_5 = 0$$

とすると, (M, g) は概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。また,
 (M, g) は概接触構造 (φ^*, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。

定義 4.3. 統計多様体 (M, g, ∇) が

$$\nabla_E \xi = -\varepsilon \varphi E, \quad (\nabla_E \varphi)F = g(E, F)\xi - \varepsilon \eta(F)E$$

を満たすとき, (M, g, ∇) を Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体という。

双対接続 ∇^* に対して

$$\nabla_E^* \xi = -\varepsilon \varphi^* E, \quad (\nabla_E^* \varphi^*)F = g(E, F)\xi - \varepsilon \eta(F)E$$

が成り立つ。

Sasaki-like 統計多様体において

$$R(E, F)\xi = \eta(F)E - \eta(E)F,$$

$$R(E, F)\varphi G - \varphi R(E, F)G = \varepsilon\{g(F, \varphi G)E - g(E, \varphi G)F - g(F, G)\varphi E + g(E, G)\varphi F\}$$

が成り立つ。

補題 4.1. (M, g, ∇) を Sasaki-like 統計多様体とする。 M が定曲率空間ならば, $c = \varepsilon$ である。

定義 4.4. Sasaki-like 統計多様体において

$$\begin{aligned} R(E, F)G = & \frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)\{g(F, G)E - g(E, G)F\} \\ & + \frac{1}{4}(c - \varepsilon)[\varepsilon\eta(G)\{\eta(E)F - \eta(F)E\} + \{g(E, G)\eta(F) - g(F, G)\eta(E)\}\xi \\ & - g(F, \varphi G)\varphi E + g(E, \varphi G)\varphi F + \{g(E, \varphi F) - g(\varphi E, F)\}\varphi G] \end{aligned}$$

を満たすとき, M を定 φ 正則断面曲率 c の Sasaki-like 統計多様体という。
ここで, c は定数である。

注意 4.1. 曲率 R は前のスライドの最後の2式, 第1及び第2ビアンキの恒等式を満たす。

注意 4.2. $c = \varepsilon$ ならば定曲率空間である。

注意 4.3. 佐々木多様体においては, $\varepsilon = 1$ ならば定 φ 正則断面曲率 c をもつ空間になる。

注意 4.4. Sasaki-like 統計多様体において

$$\begin{aligned} R^*(E, F)G = & \frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)\{g(F, G)E - g(E, G)F\} \\ & + \frac{1}{4}(c - \varepsilon)[\varepsilon\eta(G)\{\eta(E)F - \eta(F)E\} + \{g(E, G)\eta(F) - g(F, G)\eta(E)\}\xi \\ & - g(F, \varphi^*G)\varphi^*E + g(E, \varphi^*G)\varphi^*F + \{g(E, \varphi^*F) - g(\varphi^*E, F)\}\varphi^*G] \end{aligned}$$

である。

例 3 (Sasaki-like 統計多様体)

例 2 の概接触計量多様体 (M, g) のアフィン接続 ∇ を

$$\nabla_{\partial_1} \partial_1 = -\varepsilon x_2 \partial_1 - \varepsilon x_4 \partial_3 - \varepsilon x_4 \partial_4 + \varepsilon x_2 x_4 \partial_5,$$

$$\nabla_{\partial_1} \partial_2 = \nabla_{\partial_2} \partial_1 = -\varepsilon x_4 \partial_4,$$

$$\nabla_{\partial_1} \partial_3 = \nabla_{\partial_3} \partial_1 = \nabla_{\partial_1} \partial_4 = \nabla_{\partial_4} \partial_1 = \varepsilon x_4 \partial_2,$$

$$\nabla_{\partial_1} \partial_5 = \nabla_{\partial_5} \partial_1 = \varepsilon \partial_3 - \varepsilon x_2 \partial_5,$$

$$\nabla_{\partial_2} \partial_2 = \nabla_{\partial_4} \partial_4 = \nabla_{\partial_5} \partial_5 = 0,$$

$$\nabla_{\partial_2} \partial_3 = \nabla_{\partial_3} \partial_2 = \varepsilon x_2 \partial_4 + \partial_5,$$

$$\nabla_{\partial_2} \partial_4 = \nabla_{\partial_4} \partial_2 = \partial_5, \quad \nabla_{\partial_2} \partial_5 = \nabla_{\partial_5} \partial_2 = \varepsilon \partial_4,$$

$$\nabla_{\partial_3} \partial_3 = -\varepsilon x_2 \partial_1 - \varepsilon x_4 \partial_3 + \varepsilon x_4 \partial_4 - \varepsilon x_2 x_4 \partial_5,$$

$$\nabla_{\partial_3} \partial_4 = \nabla_{\partial_4} \partial_3 = -\varepsilon x_2 \partial_2,$$

$$\nabla_{\partial_3} \partial_5 = \nabla_{\partial_5} \partial_3 = -\varepsilon \partial_1 - \varepsilon x_4 \partial_5, \quad \nabla_{\partial_4} \partial_5 = \nabla_{\partial_5} \partial_4 = -\varepsilon \partial_2$$

とすると (M, g, ∇) は Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体である。
ここで、 $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) である。

目 次

1. 統計多様体
2. 統計モデル
3. Kähler-like 統計多様体
4. Sasaki-like 統計多様体
5. 統計沈め込み
6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

定義 5.1. $(M, g), (B, g_B)$ を擬リーマン多様体とし, 全射 $\pi: M \rightarrow B$ が最大階数を持ち, π_* が水平ベクトルの長さを保つとき, π を擬リーマン沈め込みという。

$\dim M = m, \dim B = n$ とする。

各点 $x \in B$ に対して誘導計量 $\bar{g}$ をもつ擬リーマン部分多様体 $\pi^{-1}(x)$ をファイバーといい, $\bar{M}_x$ または $\bar{M}$ で表す。 $\dim \bar{M} = m - n (= s)$ である。

ファイバーに接するベクトル場を垂直, ファイバーに垂直なベクトル場を水平という。全空間 M の各点 $p \in M$ における接空間 $T_p M$ の垂直な部分空間を $\mathcal{V}_p(M)$, 水平な部分空間を $\mathcal{H}_p(M)$ で表す。

全空間 M の接バンドル TM の垂直及び水平分布をそれぞれ $\mathcal{V}(M)$ 及び $\mathcal{H}(M)$ で表すと $TM = \mathcal{V}(M) \oplus \mathcal{H}(M)$ である。

射影 $\mathcal{V}: TM \rightarrow \mathcal{V}(M), \mathcal{H}: TM \rightarrow \mathcal{H}(M)$ とする。

M 上のベクトル場 X に対して $\pi_*(X_p) = X_{*\pi(p)}$ を満たす底空間 B のベクトル場 X_* が存在するとき, X は射影可能という。このとき, X と X_* は π 関係にあるという。

射影可能で水平な M 上のベクトル場 X を basic という。

補題 D. X, Y を B 上のベクトル場 X_*, Y_* と π 関係にある M 上の basic なベクトル場 とすると

(1) $g(X, Y) = g_B(X_*, Y_*) \circ \pi$

(2) $\mathcal{H}[X, Y]$ は basic であり, $[X_*, Y_*]$ と π 関係にある。

(3) $\mathcal{H}\nabla'_X Y$ は basic であり, $\hat{\nabla}'_{X_*} Y_*$ と π 関係にある。

ここで, ∇' 及び $\hat{\nabla}'$ はそれぞれ M と B のレヴィ・チビタ接続である。

(M, g, ∇) を統計多様体, $\pi : M \rightarrow B$ を擬リーマン沈め込みとする。ファイバー $\bar{M}$ のアファイン接続を $\bar{\nabla}, \bar{\nabla}^*$ とする。このとき, $U, V \in \mathcal{V}(M)$ に対して $\bar{\nabla}_U V, \bar{\nabla}_U^* V \in \mathcal{V}(M)$ であり, $\bar{\nabla}_U V = \mathcal{V}\nabla_U V, \bar{\nabla}_U^* V = \mathcal{V}\nabla_U^* V$ である。

$\bar{\nabla}$ と $\bar{\nabla}^*$ は振じれがなく, 計量 $\bar{g}$ に関して互いに双対である。

$(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla}), (\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla}^*)$ は統計多様体である。

定義 5.2. 擬リーマン沈め込み $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \hat{\nabla})$ が basic なベクトル場 X, Y に対して

$$\pi_*(\nabla_X Y)_p = (\hat{\nabla}_{X_*} Y_*)_{\pi(p)}$$

を満たすとき統計沈め込みという。

M 上のベクトル場 E, F に対して (1,2) 型のテンソル場 T と A を

$$T_E F = \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{V}E} \mathcal{V}F + \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{V}E} \mathcal{H}F, \quad A_E F = \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{V}F + \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{H}F$$

により定義する。 ∇ を ∇^* に置き換えることで T^* と A^* を定める。このとき,

$$T^{**} = T, \quad A^{**} = A.$$

$X, Y \in \mathcal{H}(M)$ 及び $U, V \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$g(T_U V, X) = -g(V, T_U^* X), \quad g(A_X Y, U) = -g(Y, A_X^* U)$$

が成り立つ。

定理 E. 擬リーマン沈め込みにおいて, (M, g, ∇) が統計多様多であるための必要十分条件は

- (1) $\mathcal{H} S_V X = A_X V - A_X^* V,$
- (2) $\mathcal{V} S_X V = T_V X - T_V^* X,$
- (3) 各 $x \in B$ に対して $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla})$ は統計多様体である。
- (4) $(B, g_B, \hat{\nabla})$ は統計多様体である。

統計沈め込み $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \widehat{\nabla})$ において

補題 F. $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ に対して,

$$A_X Y = -A_Y^* X.$$

補題 G. $X, Y \in \mathcal{H}(M)$, $U, V \in \mathcal{V}(M)$ に対して,

$$\nabla_U V = T_U V + \bar{\nabla}_U V,$$

$$\nabla_U^* V = T_U^* V + \bar{\nabla}_U^* V,$$

$$\nabla_U X = \mathcal{H} \nabla_U X + T_U X,$$

$$\nabla_U^* X = \mathcal{H} \nabla_U^* X + T_U^* X,$$

$$\nabla_X U = A_X U + \mathcal{V} \nabla_X U,$$

$$\nabla_X^* U = A_X^* U + \mathcal{V} \nabla_X^* U,$$

$$\nabla_X Y = \mathcal{H} \nabla_X Y + A_X Y,$$

$$\nabla_X^* Y = \mathcal{H} \nabla_X^* Y + A_X^* Y,$$

ファイバーのアファイン接続 ∇ 及び ∇^* に関する曲率を $\bar{R}$ 及び $\bar{R}^*$ とする。

$\hat{R}(X, Y)Z$ を $\pi_*(\hat{R}(X, Y)Z) = \hat{R}(\pi_* X, \pi_* Y)\pi_* Z$ である水平ベクトル場とする。ここで、 $\hat{R}$ は底空間 B のアファイン接続 ∇ に関する曲率である。 $\hat{R}^*(X, Y)Z$ も同様である。

補題 H. 統計沈め込みにおいて

$$g(R(U, V)W, W') = g(\bar{R}(U, V)W, W') + g(T_U W, T_V^* W') - g(T_V W, T_U^* W'),$$

$$g(R(U, V)W, X) = g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X),$$

$$g(R(U, V)X, W) = g((\nabla_U T)_V X, W) - g((\nabla_V T)_U X, W),$$

$$g(R(U, V)X, Y) = g((\nabla_U A)_X V, Y) - g((\nabla_V A)_X U, Y) + g(T_U X, T_V^* Y) - g(T_V X, T_U^* Y) \\ - g(A_X U, A_Y^* V) + g(A_X V, A_Y^* U),$$

$$g(R(X, U)V, W) = g([\mathcal{V}\nabla_X, \bar{\nabla}_U]V, W) - g(\nabla_{[X, U]}V, W) - g(T_U V, A_X^* W) + g(T_U^* W, A_X V),$$

$$g(R(X, U)V, Y) = g((\nabla_X T)_U V, Y) - g((\nabla_U A)_X V, Y) + g(A_X U, A_Y^* V) - g(T_U X, T_V^* Y),$$

$$g(R(X, U)Y, V) = g((\nabla_X T)_U Y, V) - g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(T_U X, T_V Y) - g(A_X U, A_Y V),$$

$$g(R(X, U)Y, Z) = g((\nabla_X A)_Y U, Z) - g(T_U X, A_Y^* Z) - g(T_U Y, A_X^* Z) + g(A_X Y, T_U^* Z),$$

$$g(R(X, Y)U, V) = g([\mathcal{V}\nabla_X, \mathcal{V}\nabla_Y]U, V) - g(\nabla_{[X, Y]}U, V) + g(A_X U, A_Y^* V) - g(A_Y U, A_X^* V),$$

$$g(R(X, Y)U, Z) = g((\nabla_X A)_Y U, Z) - g((\nabla_Y A)_X U, Z) + g(\theta_X Y, T_U^* Z),$$

$$g(R(X, Y)Z, U) = g((\nabla_X A)_Y Z, U) - g((\nabla_Y A)_X Z, U) - g(\theta_X Y, T_U Z),$$

$$g(R(X, Y)Z, Z') = g(\hat{R}(X, Y)Z, Z') - g(A_Y Z, A_X^* Z') + g(A_X Z, A_Y^* Z') + g(\theta_X Y, A_Z^* Z')$$

が成り立つ。ここで, $\theta_X Y = A_X Y + A_X^* Y = \mathcal{V}[X, Y]$ である。

目 次

1. 統計多様体
2. 統計モデル
3. Kähler-like 統計多様体
4. Sasaki-like 統計多様体
5. 統計沈め込み
6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

定義 6.1. (M, g) を概接触構造 (φ, ξ, η) をもつ概接触計量多様体, (B, g_B) を擬リーマン多様体とする。擬リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, g_B)$ を一般概接触計量沈め込みという。

概接触多様体において $X \in \mathcal{H}(M)$, $V \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$\varphi X = PX + FX, \quad \varphi^* X = P^* X + F^* X,$$

$$\varphi V = tV + fV, \quad \varphi^* V = t^* V + f^* V$$

とおく。ここで, $PX, P^* X, tV, t^* V \in \mathcal{H}(M)$, $FX, F^* X, fV, f^* V \in \mathcal{V}(M)$ である。

$(\varphi^*)^* = \varphi$ より

$$(P^*)^* = P, \quad (F^*)^* = F, \quad (t^*)^* = t, \quad (f^*)^* = f$$

である。

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \text{ より}$$

補題 6.1. 一般概接触計量沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$P^2 = -I - tF + \eta \otimes \xi, \quad FP + fF = 0, \quad Pt + tf = 0, \quad f^2 = -I - Ft.$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$P^2 = -I - tF, \quad FP + fF = 0, \quad Pt + tf = 0, \quad f^2 = -I - Ft + \eta \otimes \xi.$$

$$\varphi\xi = 0, \quad \eta(\varphi E) = 0 \text{ より}$$

補題 6.2. 一般概接触計量沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$P\xi = 0, \quad F\xi = 0, \quad \eta(PX) = 0, \quad \eta(tV) = 0.$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$t\xi = 0, \quad f\xi = 0, \quad \eta(FX) = 0, \quad \eta(fV) = 0.$$

$g(\varphi E, F) + g(E, \varphi^* F) = 0$ より

$$g(PX, Y) + g(X, P^* Y) = 0, \quad g(FX, V) + g(X, t^* V) = 0,$$

$$g(tV, Y) + g(V, F^* Y) = 0, \quad g(fV, W) + g(V, f^* W) = 0$$

より

(1) $P = 0$ (resp. $F = 0$) と $P^* = 0$ (resp. $t^* = 0$) は同値である。

(2) $t = 0$ (resp. $f = 0$) と $F^* = 0$ (resp. $f^* = 0$) は同値である。

補題 6.3. 一般概接触計量沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$g(PX, P^* Y) = g(X, Y) - g(FX, F^* Y) - \varepsilon \eta(X) \eta(Y),$$

$$g(fU, f^* V) = g(U, V) - g(tU, t^* V).$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$g(PX, P^* Y) = g(X, Y) - g(FX, F^* Y),$$

$$g(fU, f^* V) = g(U, V) - g(tU, t^* V) - \varepsilon \eta(U) \eta(V).$$

補題 6.4. 一般概接触計量沈め込みにおいて, 各 $p \in M$ に対して

- (1) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ と $\varphi^*(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ は同値である。
- (2) $\varphi(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ と $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ は同値である。
- (3) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ と $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ は同値である。
- (4) $\varphi(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ と $\varphi^*(\mathcal{H}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ は同値である。

定義 6.2. 一般概接触計量沈め込み π において

- (1) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ のとき, $\bar{M}$ は M の φ 不変部分多様体という。
 π を φ 不変な一般概接触計量沈め込みという。
- (2) $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ のとき, $\bar{M}$ は M の φ^* 不変部分多様体という。
 π を φ^* 不変な一般概接触計量沈め込みという。
- (3) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ のとき, $\bar{M}$ は M の反不変部分多様体という。
 π を反不変な一般概接触計量沈め込みという。

定理 6.5. 一般概接触計量沈め込みにおいて, $\bar{M}$ は M の φ 不変または φ^* 不変な部分多様体とする。

- (1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば, $(\bar{M}, \bar{g}, f)$ は概 Hermite-like 多様体である。 $(\bar{M}, \bar{g}, f^*)$ も概 Hermite-like 多様体である。
- (2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば, $(\bar{M}, \bar{g})$ は概接触構造 (f, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。また, $(\bar{M}, \bar{g})$ は概接触構造 (f^*, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。

定義 6.3. (M, g, ∇) を Sasaki-like 構造 (φ, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体, $(B, g_B, \hat{\nabla})$ を統計多様体とする。このとき, 統計沈め込み $\pi : (M, g, \nabla) \rightarrow (B, g_B, \hat{\nabla})$ を一般 Sasaki-like 統計沈め込みという。

次に、一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}\nabla_X P)Y &= \mathcal{H}\nabla_X(PY) - P(\mathcal{H}\nabla_X Y), & (\mathcal{H}\nabla_U P)Y &= \mathcal{H}\nabla_U(PY) - P(\mathcal{H}\nabla_U Y), \\
 (\mathcal{V}\nabla_X F)Y &= \mathcal{V}\nabla_X(FY) - F(\mathcal{H}\nabla_X Y), & (\mathcal{V}\nabla_U F)Y &= \bar{\mathcal{V}}_U(FY) - F(\mathcal{H}\nabla_U Y), \\
 (\mathcal{H}\nabla_X t)V &= \mathcal{H}\nabla_X(tY) - t(\mathcal{V}\nabla_X V), & (\mathcal{H}\nabla_U t)V &= \mathcal{H}\nabla_U(tV) - t(\bar{\mathcal{V}}_U V), \\
 (\mathcal{V}\nabla_X f)V &= \mathcal{V}\nabla_X(fV) - f(\mathcal{V}\nabla_X V), & (\bar{\mathcal{V}}_U f)V &= \bar{\mathcal{V}}_U(fV) - f(\bar{\mathcal{V}}_U V)
 \end{aligned}$$

とする。また、 $(\mathcal{H}\nabla_X^* P^*)Y = \mathcal{H}\nabla_X^*(P^*Y) - P^*(\mathcal{H}\nabla_X^* Y)$ なども同様に定める。

このとき、 $g((\nabla_G \varphi)E, F) + g(E, (\nabla_G^* \varphi^*)F) = 0$ より

補題 6.6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & g((\mathcal{H}\nabla_X P)Y, Z) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_X^* P^*)Z) = 0, & g((\mathcal{H}\nabla_U P)Y, Z) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_U^* P^*)Z) &= 0, \\
 (2) \quad & g((\mathcal{V}\nabla_X F)Y, V) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_X^* t^*)V) = 0, & g((\mathcal{V}\nabla_U F)Y, V) + g(Y, (\mathcal{H}\nabla_U^* t^*)V) &= 0, \\
 (3) \quad & g((\mathcal{H}\nabla_X t)V, Y) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_X^* F^*)Y) = 0, & g((\mathcal{H}\nabla_U t)V, Y) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_U^* F^*)Y) &= 0, \\
 (4) \quad & g((\mathcal{V}\nabla_X f)V, W) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_X^* f^*)W) = 0, & g((\mathcal{V}\nabla_U f)V, W) + g(V, (\mathcal{V}\nabla_U^* f^*)W) &= 0
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

系 6.7. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

$$(1) \quad \mathcal{H}\nabla P = 0 \iff \mathcal{H}\nabla^* P^* = 0.$$

$$(2) \quad \mathcal{V}\nabla F = 0 \iff \mathcal{H}\nabla^* t^* = 0.$$

$$(3) \quad \mathcal{H}\nabla t = 0 \iff \mathcal{V}\nabla^* F^* = 0.$$

$$(4) \quad \mathcal{V}\nabla f = 0 \iff \mathcal{V}\nabla^* t^* = 0.$$

$$\nabla_E \xi = -\varepsilon \varphi E \text{ より}$$

命題 6.8. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$\mathcal{H}\nabla_U \xi = -\varepsilon t U, \quad T_U \xi = -\varepsilon f U, \quad \mathcal{H}\nabla_X \xi = -\varepsilon P X, \quad A_X \xi = -\varepsilon F X.$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$T_U \xi = -\varepsilon t U, \quad \bar{\nabla}_U \xi = -\varepsilon f U, \quad A_X \xi = -\varepsilon P X, \quad \mathcal{V}\nabla_X \xi = -\varepsilon F X.$$

次に, $(\nabla_E \varphi)F = g(E, F)\xi - \varepsilon\eta(F)E$ より

命題 6.9. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}\nabla_U t)V + T_U(fV) - P(T_U V) &= g(U, V)\xi, \\(\mathcal{V}\nabla_U f)V + T_U(tV) - F(T_U V) &= 0, \\(\mathcal{H}\nabla_U P)Y + T_U(FY) - t(T_U Y) &= 0, \\(\mathcal{V}\nabla_U F)Y + T_U(PY) - f(T_U Y) &= -\varepsilon\eta(Y)U, \\(\mathcal{H}\nabla_X t)V + A_X(fV) - P(A_X V) &= 0, \\(\mathcal{V}\nabla_X f)V + A_X(tV) - F(A_X V) &= 0, \\(\mathcal{H}\nabla_X P)Y + A_X(FY) - t(A_X Y) &= g(X, Y)\xi - \varepsilon\eta(Y)X, \\(\mathcal{V}\nabla_X F)Y + A_X(PY) - f(A_X Y) &= 0.\end{aligned}$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}\nabla_U t)V + T_U(fV) - P(T_U V) &= 0, \\(\mathcal{V}\nabla_U f)V + T_U(tV) - F(T_U V) &= g(U, V)\xi - \varepsilon\eta(V)U, \\(\mathcal{H}\nabla_U P)Y + T_U(FY) - t(T_U Y) &= 0, \\(\mathcal{V}\nabla_U F)Y + T_U(PY) - f(T_U Y) &= 0, \\(\mathcal{H}\nabla_X t)V + A_X(fV) - P(A_X V) &= -\varepsilon\eta(V)X, \\(\mathcal{V}\nabla_X f)V + A_X(tV) - F(A_X V) &= 0, \\(\mathcal{H}\nabla_X P)Y + A_X(FY) - t(A_X Y) &= 0, \\(\mathcal{V}\nabla_X F)Y + A_X(PY) - f(A_X Y) &= g(X, Y)\xi.\end{aligned}$$

補題 6.10. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

(1) $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$\eta(T_U V) = -g(U, fV), \quad \eta(A_X V) = -g(X, tV), \quad f^* = -f.$$

(2) $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$\eta(T_U Y) = -g(U, FY), \quad \eta(A_X Y) = -g(X, PY).$$

補題 6.11. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて $\xi \in \mathcal{H}(M)$ ならば

$$(1) \quad \mathcal{H}\nabla P = 0 \iff T_U(FY) = t(T_U Y), \quad A_X(FY) - t(A_X Y) = g(X, Y)\xi - \varepsilon\eta(Y)X.$$

$$(2) \quad \mathcal{V}\nabla F = 0 \iff T_U(PY) - f(T_U Y) = -\varepsilon\eta(Y)U, \quad A_X(PY) = f(A_X Y).$$

$$(3) \quad \mathcal{H}\nabla t = 0 \iff T_U(fV) - P(T_U V) = g(U, V)\xi, \quad A_X(fV) = P(A_X V).$$

$$(4) \quad \mathcal{V}\nabla f = 0 \iff T_U(tV) = F(T_U V), \quad A_X(tV) = F(A_X V).$$

補題 6.12. 一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ならば

$$(1) \quad \mathcal{H}\nabla P = 0 \iff T_U(FY) = t(T_U Y), \quad A_X(FY) = t(A_X Y).$$

$$(2) \quad \mathcal{V}\nabla F = 0 \iff T_U(PY) = f(T_U Y), \quad A_X(PY) - f(A_X Y) = g(X, Y)\xi.$$

$$(3) \quad \mathcal{H}\nabla t = 0 \iff T_U(fV) = P(T_U V), \quad A_X(fV) - P(A_X V) = -\varepsilon\eta(V)X.$$

$$(4) \quad \mathcal{V}\nabla f = 0 \iff T_U(tV) - F(T_U V) = g(U, V)\xi - \varepsilon\eta(V)U, \quad A_X(tV) = F(A_X V).$$

概接触多様体において $X \in \mathcal{H}(M)$, $V \in \mathcal{V}(M)$ に対して

$$\varphi X = PX + FX, \quad \varphi^* X = P^* X + F^* X,$$

$$\varphi V = tV + fV, \quad \varphi^* V = t^* V + f^* V$$

とおく。

$$g(PX, Y) + g(X, P^* Y) = 0, \quad g(FX, V) + g(X, t^* V) = 0,$$

$$g(tV, Y) + g(V, F^* Y) = 0, \quad g(fV, W) + g(V, f^* W) = 0.$$

定義 6.4. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み π において

- (1) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ のとき, π を φ 不変という。
- (2) $\varphi^*(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{V}_p(M)$ のとき, π を φ^* 不変という。
- (3) $\varphi(\mathcal{V}_p(M)) \subset \mathcal{H}_p(M)$ のとき, π を反不変という。

	φ -不変 $t = 0$ $F^* = 0$	φ^* -不変 $F = 0$ $t^* = 0$	反不変 $f = 0$ $f^* = 0$	$P = 0$ $P^* = 0$
$\xi \in \mathcal{H}(M)$	定曲率	定曲率	定曲率	定曲率
	定正則	定正則	定正則	定正則
$\xi \in \mathcal{V}(M)$	定曲率	定曲率	定曲率	定曲率
	定正則	定正則	定正則	定正則

目 次

6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

- 6.1. φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.2. φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)
- 6.3. 反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.4. $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)

【 φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み】

$\xi \in \mathcal{V}(M)$ の場合

$\hat{P}$ を $\pi_* P = \hat{P} \pi_*$ を満たす $(1,1)$ テンソル場とする。このとき

定理 6.13. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般概接触計量沈め込みにおいて

- (1) ファイバー $(\bar{M}, \bar{g})$ は概接触構造 (f, ξ, η) をもつ概接触計量多様体である。
- (2) 底空間 $(B, g_B, \hat{P})$ は概 Hermite-like 多様体である。

$\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ とすると $F(A_X V) = 0$ である。 $V = \xi$ とすると $FPX = 0$ となり、 $X = PX$ とすると $FX = 0$ が得られる。これより

補題 6.14. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて、 $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ であるための必要十分条件はファイバーが φ^* 不変である。

【 $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み】

定理 6.15. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて,
 $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$ ならば

- (1) ファイバー $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla})$ は Sasaki-like 構造 (f, ξ, η) をもつ Sasaki-like 統計多様体である。
- (2) 底空間 $(B, g_B, \hat{\nabla}, \hat{P})$ は Kähler-like 統計多様体である。

補題 6.16. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて,
 $\mathcal{V}\nabla_X f = 0$, $\text{rank}(f + f^*) = \dim \bar{M} - 1$ ならば

$$A_X Y = -g(X, PY)\xi, \quad A_X U = -\varepsilon\eta(U)PX.$$

定理 6.17. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて,
全空間が定曲率空間とする。このとき,

$$\mathcal{V}\nabla_X f = 0, \quad \text{rank}(f + f^*) = \dim \bar{M} - 1$$

ならば, 底空間 $(B, g_B, \hat{\nabla}, \hat{P})$ は定正則断面曲率 4ε の Kähler-like 統計多様体である。

【 $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み】

全空間が定 φ 正則断面曲率 c をもつ Sasaki-like 統計多様体のとき,

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z \\ &= \frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y - g(Y, PZ)PX + g(X, PZ)PY \\ &+ \{g(X, PY) - g(PX, Y)\}PZ] \end{aligned}$$

であるから

定理 6.17. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて、全空間が定 φ 正則断面曲率 c をもつ Sasaki-like 統計多様体とする。このとき、

$$\mathcal{V}\nabla_X f = 0, \quad \text{rank}(f + f^*) = \dim \bar{M} - 1$$

ならば、底空間 $(B, g_B, \hat{\nabla}, \hat{P})$ は定正則断面曲率 $c + 3\varepsilon$ の Kähler-like 統計多様体である。

目 次

6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

- 6.1. φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.2. φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)
- 6.3. 反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.4. $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)

【 φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み】

$\xi \in \mathcal{H}(M)$ の場合

命題 6.18. 計量 g が正定値ならば, $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みは存在しない。

補題 6.19. 計量 g が不定値のとき, $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて

- (1) $U \in \mathcal{V}(M)$ が時間的ならば $fU \in \mathcal{V}(M)$ は空間的である。
- (2) $U \in \mathcal{V}(M)$ が空間的ならば $fU \in \mathcal{V}(M)$ は時間的である。

補題 6.20. 計量 g が不定値のとき, $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて $\mathcal{H}\nabla_U P = 0$ とファイバーが φ 不変であることは同値である。

目 次

6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

- 6.1. φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.2. φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)
- 6.3. 反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.4. $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)

【反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み】

$\xi \in \mathcal{V}(M)$ の場合

補題 6.21. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて,
 $\mathcal{H}\nabla_X P = 0$, $\text{rank } P = \dim B$ ならば $A_X Y = -g(X, PY)\xi$, $A_X V = -\varepsilon\eta(V)PX$.

定理 6.22. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて,
全空間が定曲率空間とする。このとき, $\mathcal{H}\nabla_X P = 0$, $\text{rank } P = \dim B$ ならば, 底空間
 $(B, g_B, \hat{\nabla}, \hat{P})$ は定正則断面曲率 4ε の Kähler-like 統計多様体
である。

定理 6.23. $\xi \in \mathcal{V}(M)$ である反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて,
全空間が定 φ 正則断面曲率 c をもつ Sasaki-like 統計多様体とする。このとき,

$$\mathcal{H}\nabla_X P = 0, \quad \text{rank } P = \dim B$$

ならば, 底空間 $(B, g_B, \hat{\nabla}, \hat{P})$ は定正則断面曲率 $\frac{1}{4}(c + 3\varepsilon)$ の Kähler-like 統計
多様体である。

目 次

6. 一般 Sasaki-like 統計沈め込み

- 6.1. φ 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.2. φ^* 不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)
- 6.3. 反不変な一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{V}(M)$)
- 6.4. $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込み ($\xi \in \mathcal{H}(M)$)

【 $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込み】

$\xi \in \mathcal{H}(M)$ の場合

補題 6.24. $\mathcal{V}\nabla_U F = 0$ のとき, 計量 g が正定値ならば $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込みは存在しない。

補題 6.25. $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, $\mathcal{V}\nabla_U F = 0$ ならば

- (1) $U \in \mathcal{V}(M)$ が時間的ならば $fU \in \mathcal{V}(M)$ は空間的である。
- (2) $U \in \mathcal{V}(M)$ が空間的ならば $fU \in \mathcal{V}(M)$ は時間的である。

補題 6.26. $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込みにおいて, $\mathcal{V}\nabla_U F = 0$ ならば $T_U V = -g(U, fV)\xi$, $T_U X = -\varepsilon\eta(X)fU$ である。

命題 6.27. 全空間が定 φ 正則断面曲率 c をもつ Sasaki-like 統計多様体とする。 $\xi \in \mathcal{H}(M)$ である $P = 0$ を満たす一般 Sasaki-like 統計沈め込みは存在しない。

REFERENCES

- [1] N. Abe and K. Hasegawa, *An affine submersion with horizontal distribution and its applications*, Differential Geom. Appl. **14** (2001), 235 – 250.
- [2] P. Alegre and A. Carriazo, *Semi-Riemannian generalized Sasakian space forms*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **41** (2018), 1 – 14.
- [3] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, AMS & Oxford University Press, 2000.
- [4] H. Aytimur, M. Kon, A. Mihai, C. Özgür and K. Takano, *Chen inequalities for statistical submanifolds of Kahler-like statistical manifolds*, Mathematics, **7** (12), (2019).

- 
- [5] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.
 - [6] E. Erkan, K. Takano and M. Gülbahar, *Locally product-like statistical Riemannian manifolds and their hypersurfaces*, International Electronic Journal of Geometry, **16** (2), 435 – 450, 2023.
 - [7] H. Furuhashi and I. Hasegawa, *Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds*, Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds, 179 – 215. Springer, Singapore, 2016.
 - [8] A. Gray, *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions*, J. Math. Mech. **16** (1967), 715 – 738.
 - [9] S. Kazan and K. Takano, *Anti-invariant holomorphic statistical submersions*, Results Math. **78** (4), (2023).

- 
- [10] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13 (1966), 459 – 469.
 - [11] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
 - [12] M. Noguchi, *Geometry of statistical manifolds*, Differential Geom. Appl. 2 (1992), 197 – 222.
 - [13] C. R. Rao, *Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 37 (1945), 81-91.
 - [14] K. Takano, *Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions*, Tensor, N. S. 65 (2004), 128 – 142.

- 
- [15] K. Takano, *Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions*, J. Geom. **85** (2006), 171 – 187.
 - [16] K. Takano, *Exponential families admitting almost complex structures*, SUT J. Math., **46** (2010), 1 – 21.
 - [17] K. Takano, E. Erkan and M. Gülbahar, *Locally product-like statistical submersions*, Turkish J. Math. **47** (2), 846 – 869 (2023).
 - [18] K. Takano and S. Kazan, *Statistical submersions with parallel almost complex structures*, preprint.
 - [19] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, 1984.