左不変計量のリッチ曲率が満たす恒等式
—３次元の場合—

阿賀岡 芳夫 (広島大学)

§1. はじめに

曲率テンソルは空間の曲がり具合を表す重要な量であるが, 逆に曲率と同じ型をした abstract なテンソル場が先に与えられたとき, その曲率型テンソル場通りの曲がり方をした空間が実際に存在するとは限らない. つまり, 空間の曲がり具合を表す曲率型テンソル場には, 一般にある種の制約条件が課される. この制約条件を明らかにすること, つまり曲率型テンソル場が現実の空間の曲率となりうるための必要十分条件を求める問題が prescribed curvature problem である.

この問題は, local には微分方程式の話に帰着され, また global には位相不変量にも関係し, 更には扱う幾何構造の選び方や次元等に応じて様々な問題設定が可能になる. それぞれの立場から, 現在に至るまで数多くの研究が積み重ねられてきたが, 満足できる結果に至れたのは特別なケースに限られている. 高次元の場合も含めて, 問題の全面解決にはほど遠いのが現状である.

このような状況の下で, 本稿では 3 次元リー群上の左不変計量が定めるリッチ曲率について得られた, ささやかな結果について報告する. prescribed curvature problem 全般に関する survey 的な記事があればそれも合わせて紹介したかったのだが, 残念ながらその種のものは見当たらなかった. 2 次元のときには, 記念碑的な論文として Kazdan-Warner[13], [14] がある. また, この問題に関しては, 物理の人達の貢献が多くあることもコメントしておきたい.

§2. 一般の多様体の場合

本稿で考察したいのは, リー群上の左不変計量が定めるリッチ曲率であり, それが満たしている条件について調べたいのだが, 左不変の場合と一般の多様体の場合との違いを明確にするために, まず最初に一般の多様体上のリッチ曲率についての結果を紹介する. 記号の確認も兼ねて, 局所座標を使ったときの定義を復習しておこう.

$g = (g_{ij})$ を n 次元多様体上の擬リーマン計量とし, この行列の逆行列を (g^{ij}) とする. このとき $\sum_j g_{ij}g^{jk} = \sum_j g^{kj}g_{ji} = \delta_i^k$ が成り立つ. 今後はアインシュタインの記法を使うことにして, この式を $g_{ij}g^{jk} = g^{kj}g_{ji} = \delta_i^k$ と表すことにする. レビ・チビタ接続は

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right), \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

で与えられ, 曲率は

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x_l} + \sum_m (\Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}),$$

リッチ曲率は

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{jki}, \quad R_{ij} = R_{ji}$$

となる. 計量 g から定まるものなので, これを Ric_g と書くことにする.

一般の多様体上におけるリッチ曲率の prescribed curvature problem について, 局所的な場合には既に決定打が得られている.

定理 (DeTurck (1981) [8]) $n\,(\geq 3)$ 次元多様体上の対称テンソル T_{ij} が非退化なら, 局所的にあるリーマン計量 g が存在して, その定義域において $\mathrm{Ric}_g = T$ となる.

(微分可能性の度合いについては, 原論文 [8] を参照のこと.) 2 次元の global な話については [9], [5], 3 次元以上の global な話については [12], [6], T が退化している場合については [11] といった論文がある. Besse [4] の 5 章には prescribed Ricci curvature problem に関する簡潔な解説がある.

擬リーマン計量 g_{ij} に 0 以外の数をかけると, その逆行列 g^{ij} は逆数倍される. すると定義式から直ちに分かるように, 接続係数 Γ^i_{jk} はこの操作で不変である. 従って, 曲率・ リッチ曲率も不変となる. これはよく知られた性質であるが, 今回の話において後々重要な意味をもつ事実となる.

§3. リー群上の左不変計量の場合

次に, リー群上の左不変計量のときの formulation を簡単に復習しておく. 一般の擬リーマン計量 g から定まるレビ・チビタ接続 ∇ は

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) =& Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)\\ &+ g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X)\end{aligned}$$

で定まるが, g, X, Y, Z が左不変の場合は 1 行目の右辺は 0 になる. 左不変ベクトル場からなる基底 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を使ってこの式を書き換えると

$$2\,\Gamma^l_{ij}\, g_{lk} = c^l_{ij}\, g_{lk} + c^l_{ki}\, g_{lj} + c^l_{kj}\, g_{li}$$

となる. ただし, $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma^l_{ij} X_l$, $[X_i, X_j] = c^l_{ij} X_l$. (ことごとくアインシュタインの記法を使っている.) 両辺に g^{km} をかけて, m について和をとると

$$2\,\Gamma^l_{ij}\, g_{lk}\, g^{km} = (c^l_{ij}\, g_{lk} + c^l_{ki}\, g_{lj} + c^l_{kj}\, g_{li})\, g^{km}$$

となり, この式は

$$2\,\Gamma^l_{ij}\,\delta^m_l = c^l_{ij}\,\delta^m_l + (c^l_{ki}\,g_{lj} + c^l_{kj}\,g_{li})\,g^{km}$$

となるため,

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\,c^m_{ij} + \frac{1}{2}\,(c^l_{ki}\,g_{lj} + c^l_{kj}\,g_{li})\,g^{km}$$

が得られる. 左不変の場合は, 右辺の第一項があるため, 一般に $\Gamma^m_{ij} \neq \Gamma^m_{ji}$ であることに注意しておく. 曲率は $R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{[X_i,X_j]}X_k$ であるから

$$R^l_{kij} = \Gamma^l_{im}\,\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\,\Gamma^m_{ik} - c^m_{ij}\,\Gamma^l_{mk},$$

リッチ曲率は

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = \Gamma^k_{km}\,\Gamma^m_{ji} - \Gamma^k_{jm}\,\Gamma^m_{ki} - c^m_{kj}\,\Gamma^k_{mi}$$

で与えられる. これにより, 左不変な擬リーマン計量からリッチ曲率を定める写像

$$\varphi_c : S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*), \quad \varphi_c(g_{ij}) = R_{ij}$$

が定まる. ($\mathfrak{g}$ はリー群のリー代数, $S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*)$ は $\mathfrak{g}$ 上の非退化な対称 2 次形式の集合. φ_c はリー代数の構造定数 c^i_{jk} に依存する写像なので, 下付き添字 c をつけた.) 計量 g を定数倍しても, Γ^i_{jk}, 曲率, リッチ曲率は不変であったから,

$$\varphi_c(kg) = \varphi_c(g) \quad (k \neq 0)$$

が成り立つ. φ_c は同じ次元の空間の間の写像であるから, $\mathrm{Im}\,\varphi_c \subset S^2(\mathfrak{g}^*)$ の余次元は 1 次元以上ある. よって, 像 $\mathrm{Im}\,\varphi_c$ の定義方程式が存在するが, これは左不変計量のリッチ曲率が満たすべき恒等式になっている. この式が求まれば, prescribed Ricci curvature problem が部分的に解けたことになる. つまり, リッチ曲率が満たすべき必要条件が一つ求まったことになる.

理屈の上では, このような枠組みで条件式が求められるはずだが, 実際にこれを実行することは難しい. R_{ij} は g_{ij} と c^i_{jk} で表される量であり, 形式的には

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\,c^m_{ij} + \frac{1}{2}\,(c^l_{ki}\,g_{lj} + c^l_{kj}\,g_{li})\,g^{km},$$
$$R_{ij} = \Gamma^k_{km}\,\Gamma^m_{ji} - \Gamma^k_{jm}\,\Gamma^m_{ki} - c^m_{kj}\,\Gamma^k_{mi}$$

のわずか 2 行で表示されるが, この中には逆行列 g^{km} が現れる. 逆行列はよく知られているように

$$g^{km} = \frac{g_{ij}\text{ の } n-1\text{ 次式}}{|g|}, \quad |g| = \det(g_{ij})$$

の形をしているため, $\varphi_c(g)$ は g_{ij} に関する高い次数の式になっている. 従って g_{ij} の文字を消去して $\mathrm{Im}\,\varphi_c$ の定義方程式を求めることは一般には難しい問題である. それに加えて, g_{ij} は全部で $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の成分があり, 消去すべき文字数が多いので, 問題を

更に難しくしている．この問題に関して, §4 で 2 次元の場合, §5 以降で 3 次元の場合に得られた結果について紹介する．

ここで一般の多様体の場合と左不変の場合との違いについて, 一言確認しておく．左不変の場合は $\varphi_c : S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*)$ という写像が定まったが, 一般の多様体の場合に同様にして $\varphi_x : S^2_{nd}(T^*_x M) \longrightarrow S^2(T^*_x M)$ $(x \in M)$ という pointwise な写像が作れるかというと, 実はそうではない．リッチ曲率 R_{ij} を求めるには計量 g_{ij} の 2 階微分までの情報が必要だから, このような poitwise な写像は作れないのである．

逆の見方をすれば, リー代数の構造定数 c^i_{jk} はこういった微分の情報までを含んだ量であることになる (実際, ベクトル場の括弧積を計算するためには微分が必要であり, pointwise に決まるものではない). また別の見方をすれば, リー代数の構造定数により大域的な連結リー群が (高々離散群の商による違いを除いて一意的に) 決まってしまうので, 左不変な場合の議論は初めから大域的な話をしていると解釈することもできる．だから DeTurck の結果より局所的には存在しえない obstruction が, 左不変 ($\fallingdotseq$ 大域的) な場合には φ_c の定義方程式という形で出現すると理解することもできる．

§4. 2 次元の場合

2 次元のリー代数は本質的に二つしかないのだが, ここではあえて一般的なかたちで $[X_1, X_2] = c^1_{12} X_1 + c^2_{12} X_2$ とおいて計算してみる．すると曲率は

$$R^i_{jkl} = k\,(\delta^i_k\, g_{jl} - \delta^i_l\, g_{jk}), \quad k = -\frac{1}{|g|}\{(c^1_{12})^2 g_{11} + 2\,c^1_{12}c^2_{12}\, g_{12} + (c^2_{12})^2 g_{22}\}$$

と定曲率のかたちになることが分かり, リッチ曲率は $R_{ij} = k\, g_{ij}$ となる．このとき恒等式

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{vmatrix} + (c^1_{12})^2 R_{11} + 2\,c^1_{12}c^2_{12}\, R_{12} + (c^2_{12})^2 R_{22} = 0$$

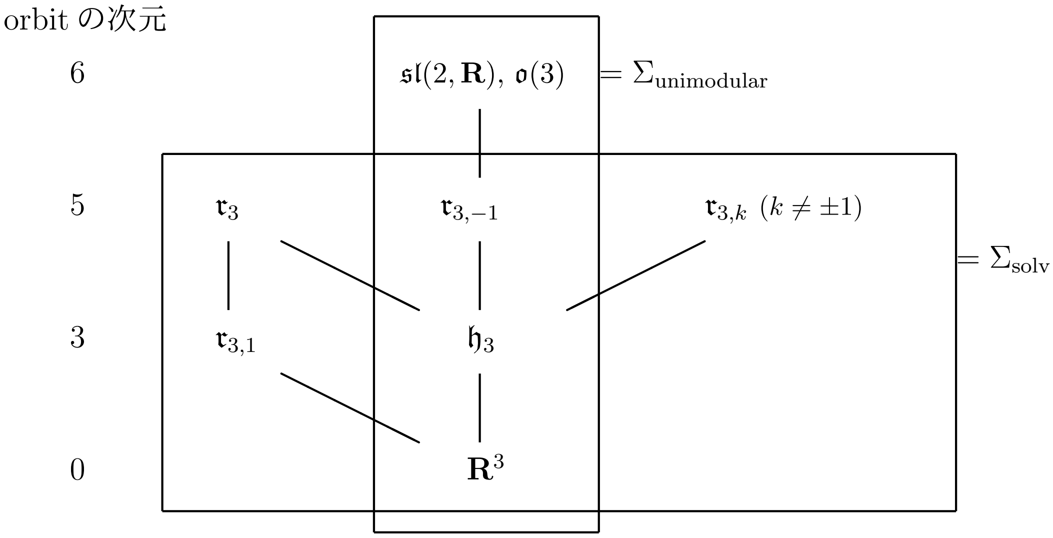
が成り立つことがすぐに確認できる．($R_{ij} = k\, g_{ij}$ を代入するだけでよい.) 特別な基底を使って曲率を計算したのでは見えてこなかった姿が浮かび上がった．3 次元の場合への期待も高まるところだが, 次元が上がるとこうは簡単にはゆかない．

§5. 3 次元の場合, (1) 分類結果

3 次元の話を始めるにあたって, 最初に実 3 次元リー代数の分類結果をまとめておこう．後で説明する事情によって, 本当は少し別の標準形を使った方が幾何学的な状況は説明しやすくなるのだが, ここではよく使われている記号を用いて分類結果をまとめておく．表の右欄にある χ はリー代数の不変量を表す．これについては §8 で説明する．この中で $\mathfrak{o}(3)$ と $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ の二つが単純リー代数で, それ以外のリー代数は可解である．unimodular なリー代数は, 単純なものと, $\mathbf{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{r}_{3,-1}$, $\mathfrak{r}'_{3,0}$ で尽くされる．

		χ
$\mathbf{R}^3$		$-$
$\mathfrak{h}_3$	$[X_1, X_2] = X_3$	$-$
$\mathfrak{r}_3$	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3,\ [X_1, X_3] = X_3$	4
$\mathfrak{r}_{3,k}$	$[X_1, X_2] = X_2,\ [X_1, X_3] = kX_3 \quad (\lvert k\rvert \leq 1)$	$\frac{(k+1)^2}{k}$
$\mathfrak{r}'_{3,k}$	$[X_1, X_2] = kX_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + kX_3 \quad (k \geq 0)$	$\frac{4k^2}{k^2+1}$
$\mathfrak{o}(3)$	$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1,$ $[X_3, X_1] = X_2$	0
$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$	$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1,$ $[X_3, X_1] = X_2$	0

リー代数の集合を理解するには, 分類表を眺めるだけでは不十分で, 「退化」の概念と合わせて捉えるべきなのだが, ページ数の関係で詳細については省略する. 詳しくは [2], [3] を参照のこと. 模式的には, 退化の状況は下図のようになる. この図において, 一つの枠は一つの既約代数多様体を表している. 下に降りるほど, リー代数の構造は退化してつぶれている. 図では省略したが, 本当は $\mathfrak{r}_{3,k}$ と同じ横の列に $\mathfrak{r}'_{3,k}$ も並んでいる. これを見ると, $\mathfrak{r}_3$ と $\mathfrak{r}_{3,1}$ は差し替えた方が自然に見えるであろう. 標準形の選び方に少し手を加えれば, 連続変形族をそのように置き換えることは可能である.



§6. 3 次元の場合, (2) 相対不変式

2 次元の場合はリッチ曲率の恒等式を簡単につかむことができたが, 3 次元の場合は先にも述べたようにそう簡単にはゆかない. R_{ij} の式をまともに書き下せば目がクラクラするような長い式になり, とても g_{ij} を消去するどころの話ではなくなる. 途方に暮

れるところであるが, 少し工夫して, 「相対不変式」を用いてこの困難を突破することにしよう. これは一言で言えば, g_{ij}, R_{ij}, c^i_{jk} 達には自然に $GL(3,\mathbf{R})$ が作用しているので, それらの相対不変式を一つの塊として式を処理するというアイデアである. それにより, 本質的な変数の個数を劇的に減らすことが出来る. 実際の計算結果は次節以降で紹介することにして, この節ではまず相対不変式について説明しよう.

以下, 3 次元の場合に, 多項式環 $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の $GL(3,\mathbf{R})$-相対不変式を 4 個紹介する. ただし, 多項式 $f \in \mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ が $GL(3,\mathbf{R})$-相対不変式であるとは, ある整数 k が存在して, 任意の $A \in GL(3,\mathbf{R}))$ に対して $A \cdot f = |A|^k f$ が成り立つことである. 以下, 記号 $I_{p,q}$ は c^p_{qr} に関して p 次, g_{ij} に関して q 次の相対不変式を意味するものとする.

<u>相対不変式 1</u>　$|c|\,(= I_{3,0})$

$$c = \begin{pmatrix} c^1_{23} & c^2_{23} & c^3_{23} \\ c^1_{31} & c^2_{31} & c^3_{31} \\ c^1_{12} & c^2_{12} & c^3_{12} \end{pmatrix}, \quad |c| = \det c \quad \text{とおくと,}$$

$A \in GL(3,\mathbf{R})$ に対して $|A \cdot c| = |A|^{-1}|c|$ となる. ただし,

$$A \cdot c = \begin{pmatrix} (Ac)^1_{23} & (Ac)^2_{23} & (Ac)^3_{23} \\ (Ac)^1_{31} & (Ac)^2_{31} & (Ac)^3_{31} \\ (Ac)^1_{12} & (Ac)^2_{12} & (Ac)^3_{12} \end{pmatrix}, \quad (Ac)^1_{23} = A\,[A^{-1}X_2, A^{-1}X_3] \text{ の } X_1\text{成分等々.}$$

<u>相対不変式 2</u>　$|g|\,(= I_{0,3})$

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad |g| = \det g \quad \text{とおくと,}$$

$A \in GL(3,\mathbf{R})$ に対して $|A \cdot g| = |A|^{-2}|g|$ となる. ただし,

$$A \cdot g = \begin{pmatrix} (Ag)_{11} & (Ag)_{12} & (Ag)_{13} \\ (Ag)_{12} & (Ag)_{22} & (Ag)_{23} \\ (Ag)_{13} & (Ag)_{23} & (Ag)_{33} \end{pmatrix}, \quad (Ag)_{11} = g(A^{-1}X_1, A^{-1}X_1) \text{ 等々.}$$

<u>相対不変式 3</u>　$I_{1,1}$

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \underset{ijk}{\mathfrak{S}} \sum_{\alpha} c^{\alpha}_{ij}\, g_{\alpha k} \quad (\mathfrak{S} \text{ は } 1,2,3 \text{ の巡回和}) \\ &= c^1_{23}g_{11} + c^2_{31}g_{22} + c^3_{12}g_{33} + (c^1_{31} + c^2_{23})g_{12} + (c^2_{12} + c^3_{31})g_{23} + (c^3_{23} + c^1_{12})g_{31} \end{aligned}$$

とおくと, $A \in GL(3,\mathbf{R})$ に対して $A \cdot I_{1,1} = |A|^{-1} I_{1,1}$ となる.

相対不変式 4　$I_{2,2}$

$$
\begin{aligned}
I_{2,2} &= -\frac{1}{4}\sum \varepsilon(i_1,i_2,i_3)\varepsilon(j_1,j_2,j_3)\, c^{\alpha}_{i_1 i_2} c^{\beta}_{i_3 j_1} g_{\alpha j_2} g_{\beta j_3} \\
&= (c^1_{13}c^2_{23} - c^1_{23}c^2_{13})(g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2) + (c^1_{23}c^3_{12} - c^1_{12}c^3_{23})(g_{11}g_{33} - {g_{13}}^2) \\
&\quad + (c^2_{12}c^3_{13} - c^2_{13}c^3_{12})(g_{22}g_{33} - {g_{23}}^2) \\
&\quad + (c^1_{23}c^2_{12} - c^1_{12}c^2_{23} + c^1_{13}c^3_{23} - c^1_{23}c^3_{13})(g_{11}g_{23} - g_{12}g_{13}) \\
&\quad + (c^1_{13}c^2_{12} - c^1_{12}c^2_{13} + c^2_{23}c^3_{13} - c^2_{13}c^3_{23})(g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23}) \\
&\quad + (c^1_{12}c^3_{13} - c^1_{13}c^3_{12} + c^2_{23}c^3_{12} - c^2_{12}c^3_{23})(g_{12}g_{33} - g_{13}g_{23})
\end{aligned}
$$

とおくと, $A \in GL(3,\mathbf{R})$ に対して $A \cdot I_{2,2} = |A|^{-2} I_{2,2}$ となる. ただし, $\varepsilon(i_1,i_2,i_3)$ は (i_1,i_2,i_3) が $(1,2,3)$ の偶置換なら 1, 奇置換なら -1 を表すものとする. (この種の和を手計算で求めることは大変なので, 計算機を使った.)

多項式環 $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の相対不変式はこの 4 個で生成されるわけではないが, この 4 個さえ用意しておけば以下の議論を展開するには十分である.

次に多項式環 $\mathbf{R}[\,R_{ij}, c^p_{qr}]$ について考えよう. とは言っても, 実は g_{ij} も R_{ij} も共に対称な 2 次共変テンソルであるから, $GL(3,\mathbf{R})$-相対不変式は $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の場合と全く同じ構造をしている. そこで, $|g|$, $I_{1,1}$, $I_{2,2}$ において単純に g_{ij} を R_{ij} に置き換えたものをそれぞれ $|\,\mathrm{Ric}\,|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ とする. 例えば

$$
|\,\mathrm{Ric}\,| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}, \quad K_{1,1} = c^1_{23}R_{11} + c^2_{31}R_{22} + \cdots + (c^3_{23} + c^1_{12})R_{31}
$$

である.

さてここで写像

$$
\varphi_c : S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*), \quad \varphi_c(g_{ij}) = R_{ij}
$$

を思い出そう. そして, 3 つの相対不変式 $|\,\mathrm{Ric}\,|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ の R_{ij} のところに $\varphi_c(g_{ij})$ を代入して, g_{ij} と c^p_{qr} の式に書き換えてみよう. φ_c は $GL(3,\mathbf{R})$-同変写像であることがすぐに分かるので, 代入後の式は $GL(3,\mathbf{R})$-相対不変になる. (ただし, 分数式になる.)

(代入後, 相対不変になることの証明)
$f(\mathrm{Ric}, c)$ を相対不変式, $A \in GL(3,\mathbf{R})$ に対して $A \cdot f = |A|^k f$ を満たとする. $F(g,c)$ を $F(g,c) = f(\varphi_c(g), c)$ で定義すると $(A \cdot F)(g,c) = F(A^{-1}g, A^{-1}c) = f(\varphi_{A^{-1}c}(A^{-1}g), A^{-1}c)$
$= f(A^{-1}\varphi_c(g), A^{-1}c) = (A \cdot f)(\varphi_c(g), c) = (|A|^k f)(\varphi_c(g), c) = |A|^k (f(\varphi_c(g), c)) = |A|^k F(g,c)$
より, $A \cdot F = |A|^k F$.

代入後の相対不変な式は $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の相対不変式 $|c|$, $|g|$, $I_{1,1}$, $I_{2,2}$ を用いて表示できる可能性がある. そして実際に計算してみると, 結果的にこれらで表示できることが分

かった. しかしこの計算は手計算ではとても無理なので, 計算機を使って確認した. 得られた表示式は, リー代数の型に依存することも分かった. 以下, unimodular と可解の場合に分けて, 結果を紹介しよう.

§7. 3 次元の場合, (3) unimodular のとき

unimodular のときの代入結果は,

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{Ric}\,| &= \frac{1}{8|g|^2}\,({I_{1,1}}^3 - 4\,I_{1,1}I_{2,2} + 8\,|c||g|)^2, \\
K_{1,1} &= \frac{1}{2|g|}\,({I_{1,1}}^3 - 4\,I_{1,1}I_{2,2} + 12\,|c||g|), \\
K_{2,2} &= -\frac{1}{4|g|^2}\,({I_{1,1}}^3 - 4\,I_{1,1}I_{2,2} + 8\,|c||g|)(I_{1,1}I_{2,2} - 6\,|c||g|)
\end{aligned}
$$

となる. (途中の計算が膨大で大変だったわりには, 結果は simple で美しい. 似たような式が並ぶのは, 何か秘密でもあるのだろうか. 因数分解できてしまったことも, 驚きであった.) この結果よりたちどころにリッチ曲率の恒等式

$$
2\,|\,\mathrm{Ric}\,| = (K_{1,1} - 2\,|c|)^2
$$

が導かれる. unimodular の場合, どのような左不変擬リーマン計量に対しても, そのリッチ曲率はこの恒等式を満たすのである. (この恒等式は R_{ij} に関する 3 次式.)

一つ応用を述べよう. unimodular リー代数がもしリッチ平坦な左不変擬リーマン計量を許容するなら, その計量も上記の恒等式を満たさなくてはいけない. リッチ平坦であるから $|\,\mathrm{Ric}\,| = K_{1,1} = 0$ であり, 従って $|c| = 0$ が導かれる. 対偶をとれば, もし $|c| \neq 0$ ならば, そのリー代数はリッチ平坦な左不変擬リーマン計量をもたないことになる.

$$
|c| = \begin{vmatrix} c^1_{23} & c^2_{23} & c^3_{23} \\ c^1_{31} & c^2_{31} & c^3_{31} \\ c^1_{12} & c^2_{12} & c^3_{12} \end{vmatrix}
$$

であったから, $|c| = 0$ は $\dim\,[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2$ と同値である. このことより, 「$\mathfrak{o}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ 上にはリッチ平坦な計量は存在しない」ことが即座に分かってしまう. もちろんこの事実はよく知られた話ではあるが, 分類や標準形を使った計算結果として導かれるよりも, これははるかに説得性の高い証明ではなかろうか. 似たようなことが高次元リー代数でも出来たら, 大変面白い話になると思う.

§8. 3 次元の場合, (4) 可解のとき

可解リー代数の場合の結果を述べるためには, 少し準備が必要になる. §5 の表の中にリー代数の不変量 χ が登場していたが, まずそれについて説明する.

$\mathfrak{g}$ をべき零でない 3 次元リー代数とする. X を $\mathfrak{g}$ の generic な元とし, $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ の固有値を $0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ とすると, $\dfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ の値は X のとり方によらずに定まることが分かる. この値を $\chi(\mathfrak{g})$ と表すことにする. (ただし, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$ のときは $\chi(\mathfrak{g}) = \infty$ とおく. この不変量に関しては Kirillov-Neretin [15], Tasaki-Umehara [18] を参照のこと.)

§5 の表に現れるパラメータ k もこの $\chi(\mathfrak{g})$ も, 連続変形するリー代数の同型類を類別する量であるが, k はリー代数の標準形のとり方に依存するパラメータであるのに対して, $\chi(\mathfrak{g})$ は標準形のとり方や基底のとり方に依存せず, リー代数の同型類のみにより定まる不変量となっている. (ただし, $\chi(\mathfrak{g})$ の値が等しいリー代数が同型になるというわけではないことに注意する. また, べき零でないリー代数 $\mathfrak{g}$ については, unimodular であることと $\chi(\mathfrak{g}) = 0$ は同値である.)

この $\chi(\mathfrak{g})$ を使うと, 可解の場合の代入結果は次のようになる. (以下, $\chi(\mathfrak{g})$ を χ と略記する.)

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Ric}| &= \frac{1}{8|g|^2}\,\{{I_{1,1}}^2 + 2\,(\chi-2)\,I_{2,2}\}\{{I_{1,1}}^4 + 2\,(\chi-2)\,{I_{1,1}}^2 I_{2,2} - 4\,\chi\,{I_{2,2}}^2\},\\
K_{1,1} &= \frac{1}{2|g|}\,I_{1,1}({I_{1,1}}^2 - 4\,I_{2,2}),\\
K_{2,2} &= -\frac{1}{4|g|^2}\,I_{2,2}\{{I_{1,1}}^4 + 2\,(\chi-2)\,{I_{1,1}}^2 I_{2,2} - 4\,\chi\,{I_{2,2}}^2\}.
\end{aligned}
$$

(この場合も unimodular のときと同様, 不思議なことに同じような式が現れる.)

この三つの式から $|g|$, $I_{1,1}$, $I_{2,2}$ の文字を消去すると

$$
\begin{aligned}
&2\,\{|\operatorname{Ric}| + (\chi-2)K_{2,2}\}\,(|\operatorname{Ric}| + \chi\,K_{2,2})^2\\
&\qquad = {K_{1,1}}^2\,\{|\operatorname{Ric}|^2 + (\chi-2)|\operatorname{Ric}|K_{2,2} - \chi\,{K_{2,2}}^2\}
\end{aligned}
$$

という式が得られる. これが可解の場合のリッチ曲率の恒等式となる. unimodular の場合と違って, 係数に不変量 χ が現れている. (この恒等式は R_{ij} に関する 9 次式.) ただし, べき零リー代数 $\mathbf{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$ と, χ の値が ∞ になる $\mathfrak{r}_{3,0}$ については別扱いする必要がある. これについては後述する.

可解かつ unimodular のときは, $\chi = 0$ なので

$$
2|\operatorname{Ric}|^2(|\operatorname{Ric}| - 2\,K_{2,2}) = {K_{1,1}}^2|\operatorname{Ric}|(|\operatorname{Ric}| - 2\,K_{2,2}),
$$

つまり $|\operatorname{Ric}|(2|\operatorname{Ric}| - {K_{1,1}}^2)(|\operatorname{Ric}| - 2\,K_{2,2}) = 0$ とまとめられるが, これは unimodular のときの恒等式 $2\,|\operatorname{Ric}| = (K_{1,1} - 2\,|c|)^2$ において $|c| = 0$ とした $2\,|\operatorname{Ric}| = {K_{1,1}}^2$ から自動的に導かれる式である. (3 次元のときは, $\mathfrak{g}$ が可解であることと $|c| = 0$ は同値な条件になる.)

残された $\mathbf{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{r}_{3,0}$ についてであるが, 初めの二つについては

- $\mathbf{R}^3$: 左不変計量は, すべてリッチ平坦 (だから $\forall R_{ij} = 0$ が恒等式になる),
- $\mathfrak{h}_3$: $2\,|\operatorname{Ric}| = {K_{1,1}}^2$

となる．$\mathfrak{h}_3$ については $K_{2,2}=0$ も成り立つが, 実はこの式は R_{ij} の係数が全て 0 となる自明な式になるので, $\operatorname{Im}\varphi_c$ の定義方程式にはならない．

$\mathfrak{r}_{3,0}$ $(\chi=\infty)$ のときは, 特別な扱いが必要になる．そのために, ひとまず $\mathfrak{r}_{3,k}$ の状況を振り返ってみる．このリー代数の括弧積は

$$[X_1,X_2]=X_2,\quad [X_1,X_3]=kX_3$$

であった．計算により, $K_{2,2}$ は

$$K_{2,2}=(c_{13}^1c_{23}^2-c_{23}^1c_{13}^2)(R_{11}R_{22}-{R_{12}}^2)+\cdots=k\times(R_{ij}\text{の }2\text{ 次式})$$

と k でくくれることが分かる．(だから, $k=0$ のとき $K_{2,2}=0$ となるが, これは $\mathfrak{h}_3$ のときと同様に自明な条件式になる.) そこで $K_{2,2}=k\times\overline{K}_{2,2}$ とおくことにすると, $\mathfrak{r}_{3,0}$ のリッチ曲率の恒等式は

$$2\,(|\operatorname{Ric}|+\overline{K}_{2,2})^2={K_{1,1}}^2\,|\operatorname{Ric}|$$

で与えられる．(これは R_{ij} に関する 6 次式．可解のときの恒等式において, $\infty\times 0$ となる $\chi\,K_{2,2}$ の部分を $\overline{K}_{2,2}$ に置き換えてから $K_{2,2}=0$ を代入すると, それは上の式に $|\operatorname{Ric}|+\overline{K}_{2,2}$ をかけたものに一致する.)

また $\mathfrak{r}_{3,1}$ についても特別なことが起こっていて, リッチ曲率の恒等式は 3 次式

$$|\operatorname{Ric}|+2\,K_{2,2}=0$$

となる．$\mathfrak{r}_{3,1}$ の不変量は $\chi=2$ であり, またこのリー代数においては $K_{1,1}=0$ は自明な条件式になる．これらの値を可解のときの恒等式に代入すると $2\,|\operatorname{Ric}|(|\operatorname{Ric}|+2\,K_{2,2})^2=0$ となるが, これは, $|\operatorname{Ric}|+2\,K_{2,2}=0$ から自動的に導かれる式になっている．(一般に, リー代数が退化するとリッチ曲率もそれに伴って 0 に近づく．そのため, リッチ曲率の恒等式も退化して, 上の例のように次数の低い多項式に置き換わることが起こりうる.)

実は, $\mathfrak{r}_{3,1}$ の左不変計量は常に定曲率であり,

$$R^i_{jkl}=-\frac{I_{2,2}}{|g|}\,(\delta^i_kg_{jl}-\delta^i_lg_{jk})$$

と表せる．断面曲率と不変式が直結していることが見てとれる．(§4 で紹介した 2 次元のときの断面曲率 k も, その正体は実は 2 次元の相対不変式なのである.)

unimodular のときはリッチ平坦になるための obstruction (必要条件としての $|c|=0$ のこと) が存在したが, 可解のときは恒等式が定数項 ($=R_{ij}$ が関与しない項) を含まないため, このような obstruction は出てこない．しかし, かといって可解リー代数が常にリッチ平坦な計量をもつわけではない．例えば, $\mathfrak{r}_{3,k}$ は $0<|k|<1$ のときリッチ平

坦な擬リーマン計量をもたないことが示せる. ところがこのリー代数に $t \fallingdotseq 0$ (ただし $t \neq 0$) として

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & t & -1 \\ \frac{1}{t} & -1 & t \end{pmatrix}$$

という左不変なローレンツ計量を入れると, 曲率 R^i_{jkl} 全ての成分が

$$\frac{t \times (t\,\text{の}\,4\,\text{次式})}{(t+1)^2(t-2)}$$

のかたちになることが分かり, $t \to 0$ のとき曲率は 0 に収束する. (計量自体は発散する.) 当然リッチ曲率も 0 に収束するので, リッチ平坦な計量をもたないにもかかわらず, リッチ曲率をほとんど 0 に近づけることが出来てしまう. (この状況は almost Ricci flat と呼ぶにふさわしい.) 実はすべての 3 次元可解リー代数は almost Ricci flat なローレンツ計量をもつことが示せる [17]. だから可解のときに obstruction が出現しないのはごもっともなことと言える.

§9. 終わりに

同じような話を 4 次元以上の場合に実行することはできるであろうか? 3 次元の場合は, ストレートに文字を消去しようと思っても式が長すぎて手に負えないので, 式を短くするための工夫として相対不変式を導入した. しかし, 次元が高くなるとその相対不変式ですら長い式になり, 更には相対不変式の個数も増え続けるのである. 計算機の専門家に Gröbner 基底のことを聞いても, 計算量の関係で次元が高くなるとあまり見通しはたたないような雰囲気であった. とはいえ, ここには必ず何らかの世界が拡がっているはずだ. 次は不変式論における記号的方法を活用してチャレンジしたい.

参考文献

[1] Y. Agaoka, First order partial differential equations on the curvature of 3-dimensional Heisenberg bundles, Hiroshima Math. J., **27** (1997), 229–269.

[2] Y. Agaoka, On the variety of 3-dimensional Lie algebras, Lobachevskii J. Math. **3** (1999), 5–17.

[3] Y. Agaoka, An algorithm to determine the isomorphism classes of 4-dimensional complex Lie algebras, Linear Alg. Appl. **345** (2002), 85–118.

[4] A. L. Besse, Einstein Manifolds, Springer, 1987.

[5] J. Cao, D. DeTurck, Prescribinig Ricci curvature on open surfaces, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 265–278.

[6] P. Delanoë, Obstruction to prescribed positive Ricci curvature, Pacific J. Math. **148** (1991), 11–15.

[7] E. Delay, Prescription de la courbure de Ricci au voisinage de la métrique hyperbolique, C. R. Acad. Sci. Paris **326** Ser.I (1998), 335–338.

[8] D. M. DeTurck, Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: Local theory, Inv. Math. **65** (1981), 179–207.

[9] D. M. DeTurck, Metrics with prescribed Ricci curvature, Ann. of Math. Studies **102** (1982), 525–537.

[10] D. M. DeTurck, The Cauchy problem for Lorentz metrics with prescribed Ricci curvature, Comp. Math. **48** (1983), 327–349.

[11] D. M. DeTurck, H. Goldschmidt, Metrics with prescribed Ricci curvature of constant rank I. The integralbe case, Adv. in Math. **145** (1999), 1–97.

[12] D. M. DeTurck, N. Koiso, Uniqueness and non-existence of metrics with prescribed Ricci curvature, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 351–359.

[13] J. L. Kazdan, F. E. Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. **99** (1974), 14–47.

[14] J. L. Kazdan, F. E. Warner, Curvature functions for open 2-manifolds, Ann. of Math. **99** (1974), 203–219.

[15] A. A. Kirillov, Y. A. Neretin, The variety A_n of n-dimensional Lie algebra structures, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **137** (1987), 21–30.

[16] O. Kowalski, Z. Vlášek, On 3D-Riemannian manifolds with prescribed Ricci eigenvalues, Progress in Math. **234** (2005), 187–208.

[17] Y. Shinchi, Y. Agaoka, Flat and almost flat pseudo-Riemannian metrics on three-dimensional Lie groups, in preparation.

[18] H. Tasaki, M. Umehara, An invariant on 3-dimensional Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 293–294.