対称 Clifford 系と実 Grassmann 多様体の部分カンドルについて *

藤井　忍 †(公立千歳科学技術大学理工学部)

概要

対称 Clifford 系とは, 所定の関係式を満たす有限個の実対称行列の集合であり, Clifford 代数の表現と 1 対 1 に対応することが知られている. 他にも対称 Clifford 系は OT–FKM 型等径超曲面の構成に用いられることや, $2n$ 次元 Euclid 空間内の n 次元部分空間全体のなす実 Grassmann 多様体内の全測地的球面と対応することも知られており, 幾何学的にも重要な対象である. 本稿では, 対称 Clifford 系に付随する部分空間配置を定義し, この部分空間配置が或る (有向) 実 Grassmann 多様体のカンドル構造に対して素性のよい部分カンドルを生成すること, 極大 s–可換集合とも関係があることを説明する.

1　対称 Clifford 系

本節では, 対称 Clifford 系の定義を与え, いくつかの性質を紹介する. 以下では, 正の整数 n に対して $2n$ 次の実対称行列全体のなす集合を $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ と表す.

定義 1.1. m, n を正の整数とする. **$\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系** とは, 以下を満たす有限集合 $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\} \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ のことである:

$$P_iP_j + P_jP_i = 2\delta_{ij}I_{2n} \quad \text{for any} \quad i \quad \text{and} \quad j \in \{0, 1, \ldots, m\}. \tag{1.1}$$

ここで, I_{2n} は $2n$ 次の単位行列である.

$\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系と実 Clifford 代数の n 次表現との間には, 適当な同値関係の下での 1 対 1 対応が存在することが知られている. 詳しくは Cecil [1] を参照のこと.

* 部分多様体幾何とリー群作用 2024 記録集用原稿.

† E-mail address: `s-fujii@photon.chitose.ac.jp`

定義 1.2. $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ 上に以下で定める内積 $\langle -, - \rangle$ を入れる:

$$\langle P, Q \rangle \coloneqq \frac{1}{2n} \operatorname{Tr}(PQ) \quad \text{for} \quad P, Q \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系 $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ に対して, $\mathcal{P}$ で生成される $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の部分空間を $L(\mathcal{P})$ とする. このとき, $L(\mathcal{P})$ 内の $\langle -, - \rangle$ に関する単位球面 $\Sigma(\mathcal{P})$ を $\mathcal{P}$ から定まる **Clifford 球面** という.

命題 1.3. Clifford 球面に関して, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系 $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ から定まる Clifford 球面を $\Sigma(\mathcal{P})$ とすると, 任意の $P \in \Sigma(\mathcal{P})$ に対して $P^2 = I_{2n}$ である.

(2) $\Sigma \subset \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ を
- 任意の $P \in \Sigma$ に対して $P^2 = I_{2n}$ を満たし,
- Σ で生成される $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の部分空間 L において, Σ は $\langle -, - \rangle$ に関する単位球面

であるとする. このとき, L の $\langle -, - \rangle$ に関する任意の正規直交基底は $\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系である.

この命題から対称 Clifford 系と Clifford 球面の間には 1 対 1 対応が存在することが分かる.

かねて, Clifford 球面は Grassmann 多様体の幾何の観点から研究されており, そこでは別の名前で知られている. その結果を紹介しておこう.

命題 1.4 (Wang [8]). $\Sigma \subset \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ を Clifford 球面とし, $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 内の n 次元線型部分空間全体のなす Grassmann 多様体とする. 写像 $f_\Sigma : \Sigma \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を

$$f_\Sigma(P) \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^{2n} \mid Pv = v\} \quad \text{for all } P \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

で定義する. このとき, f_Σ は全測地的埋め込みであり, その像は全測地的球面である.

Wang の結果は逆も成り立つ.

命題 1.5 (Wolf [9]). $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ 内の全測地的球面はある Clifford 球面 Σ の f_Σ による像として得られる.

Wolf の結果に現れる $f_\Sigma(\Sigma)$ を **isoclinic sphere**[*1] と呼ぶ. isoclinic sphere は

[*1] 適切な日本語訳がわからないので, 英語のままで失礼する. また, 厳密にいうと isoclinic sphere の定義

Clifford 球面に対応する概念であるが, 対称 Clifford 系に対応する同様の概念として isoclinic n–planes in $\mathbb{R}^{2n}$ というものがある.

$$\begin{aligned} \text{対称 Clifford 系} &\longleftrightarrow \text{isoclinic } n\text{–planes in } \mathbb{R}^{2n} \\ \text{Clifford 球面} &\longleftrightarrow \text{isoclinic sphere} \end{aligned}$$

これらは Grassmann 多様体の幾何や Clifford 代数の表現, 球面上のベクトル場問題 (いわゆる Adams の定理), Hurwitz's matrix equations 等とも深く関連しており, 著者自身もすべてを把握できてはいない. 詳細については Wong [10], Wong–Mok [11], Yiu [7] や, それらの参考文献を参照していただきたい.

2 実 Grassmann 多様体上のカンドル構造

本節では, 集合上のカンドル構造の定義を与え, 実 Grassmann 多様体上のカンドル構造について説明する. 詳細は Furuki–Tamaru [3], Ishihara–Tamaru [4] を参照いただきたい.

以下では集合 X に対して, X から X への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, X)$ で表す.

定義 2.1. 集合 X に対して, 写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$, $x \mapsto s_x$ が X 上の **カンドル構造** であるとは, 以下の 3 条件を満たすこと:

(1) 任意の $x \in X$ に対して $s_x(x) = x$,
(2) 任意の $x \in X$ に対して s_x は全単射,
(3) 任意の $x, y \in X$ に対して $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

以下では, 集合 X とその上のカンドル構造の組 (X, s) を単に **カンドル** と呼ぶことにする.

$(\mathbb{R}^{2n}, \langle -, - \rangle_{2n})$ を $2n$ 次元の標準的な Euclid 空間とし, $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 内の実 n 次元線型部分空間全体のなす Grassmann 多様体とする. 任意の $V \in \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ に対して, $V^\perp$ でその直交補空間を表し, $\pi_V : \mathbb{R}^{2n} \to V$ で $\mathbb{R}^{2n}$ から V への直交射影を表すことにする. このとき, V における **鏡映** $\sigma_V : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の実線型変換であって, V 上には恒等変換で作用し, かつ $V^\perp$ 上には -1 倍で作用するものとして定義する. つまり,

$$\sigma_V = \mathrm{id}_V - \mathrm{id}_{V^\perp}. \tag{2.1}$$

は $f_\Sigma(\Sigma)$ ではなく, これと 1 対 1 に対応する別の概念.

各 $V \in \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ における鏡映 σ_V は V における**点対称** $s_V : \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を自然な方法で誘導する．具体的には, $s_V : \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ は以下によって与えられる:

$$s_V : \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}); \quad W \mapsto s_V(W). \tag{2.2}$$

ただし, $s_V(W)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 内の n 次元線型部分空間で,

$$s_V(W) := \{\sigma_V(w) \mid w \in W\}. \tag{2.3}$$

によって定義される．このとき, 写像 $s : \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}), \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}))$; $V \mapsto s_V$ は $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ 上のカンドル構造を与える．

定義 2.2. (X, s) をカンドルとする．$Y \subseteq X$ が X の **部分カンドル** であるとは, 以下が成り立つときをいう:

(1) 各 $y \in Y$ に対して $s_y : X \to X$ は Y を Y に写す,
(2) 各 $y \in Y$ に対して $s_y|_Y : Y \to Y$ は全単射.

3 Clifford 配置

本節では, 対称 Clifford 系から得られる部分空間配置について説明する．以下では, $\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積は通常の Euclid 内積を考える．

定義 3.1 (F. [2]). n, m を正の整数とする．有限集合 $\{V_0, V_1, \ldots, V_m\} \subseteq \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^{2n}$ 内の **Clifford 配置** であるとは, 相異なる任意の i, $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ に対して $s_{V_i}(V_j) = V_j^{\perp}$ が成り立つことをいう．ただし, $V_j^{\perp}$ は V_j の直交補空間である．

例 3.2. $\mathbb{R}^2$ に通常の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ を入れる．$\{e_1, e_2\}$ を $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底とする．2 本の 1 次元線型部分空間 ℓ_0, $\ell_1 \subsetneq \mathbb{R}^2$ をそれぞれ以下のように定義する:

$$\ell_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1\}, \quad \ell_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_2\}. \tag{3.1}$$

このとき, $\mathcal{L} := \{\ell_0, \ell_1\}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の Clifford 配置である．

例 3.3. $\mathbb{R}^4$ に通常の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_4$ を入れ, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底とする．2 次元線型部分空間 V_0, V_1, $V_2 \subsetneq \mathbb{R}^4$ をそれぞれ以下のように定義する:

$$V_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}, \quad V_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_3, e_2 + e_4\}, \quad V_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1 - e_4, e_2 + e_3\}. \tag{3.2}$$

このとき, $\{V_0, V_1, V_2\}$ 内の部分集合 $\mathcal{V}$ で, $\#\mathcal{V} \geq 2$ を満たすものは $\mathbb{R}^4$ 内の Clifford 配置である.

天下り的に Clifford 配置の定義を与えたが, このアイディアは対称 Clifford 系と, Wang の定理に現れた写像 $f_\Sigma : \Sigma \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を組み合わせたもので, 以下の定理がその起源である:

定理 3.4 (F. [2]). $\mathbb{R}^{2n}$ に標準基底を入れておく. $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系とし, 各 P_i に対して $V_i \coloneqq f_\Sigma(P_i)$ と定める. ここで, f_Σ は Wang の定理に現れる写像である. このとき, $\mathcal{V} \coloneqq \{V_0, V_1, \ldots, V_m\} \subset \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ であり, $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ の点対称 s に対して以下が成り立つ:

$$i \neq j \Longrightarrow s_{V_i}(V_j) = V_j^{\perp}. \tag{3.3}$$

上の定理の逆に相当するのが以下の定理である.

定理 3.5 (F. [2]). $\mathbb{R}^{2n}$ に標準基底を入れておく. $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \ldots, V_m\}$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置とする. 各 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ に対して, P_i を σ_{V_i} の表現行列とする. このとき, $\mathcal{P} \coloneqq \{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 内の対称 Clifford 系である.

これらの定理から, 対称 Clifford 系と 1 対 1 に対応する $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ 内の有限部分集合が存在することがわかり, この有限部分集合を $\mathbb{R}^{2n}$ 内の線型部分空間の有限族, つまり部分空間配置とみなしたのが Clifford 配置である.

以下, $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置 $\mathcal{V}$ を $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ の有限部分集合とみなす. また, $V \subseteq \mathrm{Gr}_m^{2n}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{V}^\perp$ を

$$\mathcal{V}^\perp \coloneqq \left\{ V^\perp \mid V \in \mathcal{V} \right\} \subsetneq \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \tag{3.4}$$

と定義し, さらに, $Q(\mathcal{V}) \coloneqq \mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}^\perp$ と定義する. 任意の $V, W \in Q(\mathcal{V})$ に対して,

$$s_V(W) = \begin{cases} W & \text{if } W \in \{V, V^\perp\}, \\ W^\perp & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.5}$$

が成り立つことが点対称 s_V の定義から容易に従う. したがって, 次の定理を得る:

定理 3.6 (F. [2]). $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置 $\mathcal{V}$ に対して, $Q(\mathcal{V})$ は $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ の部分カンドルである.

4 実 Grassmann 多様体の極大 s–可換集合と Clifford 配置の関係

本節では, 有向実 Grassmann 多様体の極大 s–可換集合が Clifford 配置から得られることを簡単に述べる. 有向実 Grassmann 多様体の極大 s–可換集合の決定及び分類は未完成であるが, 現時点で得られている結果については Nagashiki [5] をご覧いただきたい.

定義 4.1. V を n 次元線型空間とする. V の 2 つの順序付き基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ が **同じ向き** であるとは, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ から $\{w_1, \ldots, w_n\}$ への基底変換行列 A が $\det A > 0$ を満たすときをいう.

n 次元線型空間 V の 2 つの順序付き基底の向きが同じかどうかという関係は V の基底全体の集合上の同値関係をなす. 以下では, V の順序付き基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ と同じ向きをもつ同値類を $\sigma = [(v_1, \ldots, v_n)]$ と表し, その同値類の集合を $\mathrm{OR}(V)$ と表すことにする.

定義 4.2. 実有向 Grassmann 多様体 とは, $\mathbb{R}^n$ 内の実 k 次元有向線型部分空間全体のなす実 Grassmann 多様体で, $\mathrm{Gr}_k^n(\mathbb{R})^\sim := \{(V, \sigma) \mid V \in \mathrm{Gr}_k^n(\mathbb{R}), \sigma \in \mathrm{OR}(V)\}$ と表す.

$\mathrm{Gr}_k^n(\mathbb{R})^\sim$ は対称空間であることが知られていて, したがって, カンドル構造を持つことが分かる. Nagashiki [5] は $\mathrm{Gr}_k^n(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合を多くの場合に決定し, 分類した. ここで, カンドルの s–可換性を定義しよう.

定義 4.3 (Nagashiki [5]). (X, s) をカンドルとする.

(1) 部分集合 $A \subseteq X$ が **s–可換** であるとは, 任意の $x, y \in A$ に対して $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$ が成り立つことをいう.

(2) s–可換集合 $A \subseteq X$ が **極大** であるとは, A が包含関係において極大であることをいう.

対称空間 (より一般にカンドル) M の 部分集合 A が **対蹠集合** であるとは, 任意の x, $y \in A$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つこと (s_x は x における点対称) であったが, 定義から明らかに対蹠集合は s–可換集合である. また, 極大 s–可換集合は部分カンドルであることが知られている.

以下の命題は Nagashiki [5] による有向実 Grassmann 多様体の極大 s–可換集合の決定

及び分類の結果である.

命題 4.4 (Nagashiki [5]). 正の整数 n, k が以下の場合をそれぞれ考える:

(1) $n \neq 2k$,

(2) k が奇数かつ $n = 2k$.

いずれの場合も, 実有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_k^n(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合は以下の集合 $A(k,n)$ と $O(n)$–合同である:

$$A(k,n) \coloneqq \{(\mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}, \pm[(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})]) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}. \tag{4.1}$$

命題 4.5 (Nagashiki [5]). 実有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合は $A(2,4) \cup B$ と $O(4)$–合同である. ただし,

$$B \coloneqq \{(\mathrm{span}\{e_1 \pm e_i, e_j \pm e_k\} \pm [(e_1 \pm e_i, e_j \pm e_k)]) \mid i,j,k \in \{2,3,4\},\ i \notin \{j,k\},\ j < k\} \tag{4.2}$$

であり, 複号任意で考える.

Nagashiki [5] では, $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim$ の場合は $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim \simeq S^2 \times S^2$ であり, $S^2 \times S^2$ が対称空間であることを利用して極大 s–可換集合を求めているが, n が 4 以上の偶数の場合にはそのような手法は通じず, $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合についてはまだ決定されていない. しかしながら, Clifford 配置から得られるカンドルを用いて構成及び分類ができるのではないかと期待している. その証拠となる結果が以下に挙げる命題である:

命題 4.6 (F.). $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合は例 3.3 に挙げた Clifford 配置のうちの $\#\mathcal{V} = 3$ のもの, つまり $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, V_2\}$ から得られるカンドルを用いて構成できる.

任意の正の整数 n に対して $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置がすべて具体的に決定できているわけではないので, Clifford 配置を利用して $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合がすべて決定できるか, まだわからない. 極大対蹠集合と極大 s–可換集合の関係は一般にはわからないが, $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})^\sim$ の極大対蹠集合の決定と分類は Tanaka–Tasaki [6] によって完成している. 現在, 彼らの結果を用いて $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置や $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換集合の決定を試みている.

参考文献

[1] T. E. Cecil, *Lie Sphere Geometry.* With applications to submanifolds. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2008.

[2] S. Fujii, *Subspace arrangements associated with symmetric Clifford systems*, in preparation.

[3] K. Furuki and H. Tamaru, *Flat homogeneous quandles and vertex-transitive graphs*, Int. Electron. J. Geom., **17** (2024), no. 1, 184-– 198.

[4] Y. Ishihara and H. Tamaru, *Flat connected finite quandles*, Proc. of the Amer. Math. Soc., **144** (2016), no. 11, 4959–4971.

[5] M. Nagashiki, *Maximal s-commutative subsets in oriented real Grassmannian manifolds*, Master's thesis, Hiroshima University.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinates I*, Differential Geom. Appl., Vol. **73** (2020), Paper No. 101682.

[7] P. Yiu, *Maximal Normal Subsets of n-planes in $\mathbb{R}^2$*, Linear Algebra Appl., Vol. **181** (1), Num. 3 (1993), 241–249.

[8] Q.-M. Wang, *On totally geodesic spheres in Grassmannians and $O(n)$*, Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. **108**, Num. 3 (1990), 811–815.

[9] J. A. Wolf, *Geodesic spheres in Grassmann manifolds*, Illinois J. Math., **7** (1963), 425–446.

[10] Y.-C. Wong, *Isoclinic n-planes in Euclidean $2n$-space, Clifford parallels in elliptic $(2n-1)$-space, and the Hurwitz matrix equations*, Mem. Amer. Math. Soc., **41** (1961).

[11] Y.-C. Wong and K.-P. Mok, *Normally Related n-planes and Isoclinic n-planes in $\mathbb{R}^{2n}$ and Strongly Linearly Independent Matrices of Order n*, Linear Algebra Appl., **39** (1990), 31–52.