$K3$ 曲面の崩壊に付随する写像のエネルギーについて

服部広大
(慶應義塾大学)

1. 序

リーマン多様体のレビ · チビタ接続のホロノミー群は，既約，単連結かつ非対称空間という仮定の元で Berger によって分類されている．一般に向き付け可能な単連結 n 次元リーマン多様体のホロノミー群は $SO(n)$ の閉部分群であり，計量が平坦ならば自明な群である．既約なリーマン多様体で，非自明かつ $SO(n)$ に真に含まれるような中間的なホロノミー群を興味対象とするならば，3 次元以下においてそのように興味深いホロノミー群は現れない．4 次元では $SO(4)$ の部分群である $SU(2)$ をホロノミー群とするようなリーマン多様体が存在し，それを超ケーラー多様体という．実 4 次元で $SU(2)$ をホロノミー群とするコンパクトなリーマン多様体は，$K3$ 曲面上の超ケーラー計量のみであることが，ヤウの定理や複素曲面の分類理論などを組み合わせることで証明される．

$K3$ 曲面は，単連結かつ標準束が自明なコンパクトケーラー多様体であり，そのような構造を許容する可微分多様体はただ 1 つしか存在しない．しかし，その上の超ケーラー計量はただ一つとは限らず，そのモジュライ空間は局所対称空間の構造を持つことが大域トレリの定理から導かれる．モジュライ空間の構造が決定されることにより，次に興味の対象となるのはモジュライの無限遠方の構造である．$K3$ 曲面上の超ケーラー計量の 1 パラメータ族が無限遠方に向かうときに，より次元の低い距離空間にグロモフ・ハウスドルフ収束するという現象がいくつかの場合に確認されている．本講演では，そのような崩壊現象の中でも特に，Foscolo[2] によって構成された 3 次元平坦軌道体への崩壊現象の際に生じる近似写像のエネルギーの挙動について報告する．

2. 4 次元多様体上の超ケーラー構造

定義 2.1. X を 4 次元の C^∞ 級多様体とし，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を X 上の 2 形式の 3 つ組とする．$\boldsymbol{\omega}$ が以下の条件を全て満たすときに，X 上の超ケーラー構造と呼ぶ.

(i) $d\omega_i = 0$.
(ii) ある $\mathrm{vol} \in \Omega^4(X)$ が存在し，任意の $x \in X$ について $\mathrm{vol}_x \neq 0$ かつ

$$\omega_i \wedge \omega_j = 2\delta_{ij}\mathrm{vol}$$

を満たす.

(iii) 以下のように定義される X 上の対称テンソル
$$g(u,v)\mathrm{vol} := \iota_u\omega_1 \wedge \iota_v\omega_2 \wedge \omega_3$$
は X 上正定値である．特にこのリーマン計量を $g = g_{\boldsymbol{\omega}}$ と書く．

注 2.2. 一般に，(ii) の条件が満たされれば g を (iii) のように定めることにより対称テンソルが得られる．これは (ii) の条件から正定値または負定値であることがわかる．もし負定値であった場合は，$\boldsymbol{\omega}$ のうち ω_1 と ω_2 の順番を入れ替えるか，ω_1 を $-\omega_1$ で置き換えるかなどして新たに $\boldsymbol{\omega}$ を取り直して g を作ると正定値になる．

注 2.3. 超ケーラー構造のよく知られた定義は，リーマン計量 g と 3 つの複素構造 I_1, I_2, I_3 に対するものである．しかし次元が 4 の場合は，定義 2.1 からよく知られた定義が復元される．

注 2.4. ある超ケーラー構造 $\boldsymbol{\omega}$ によって $g = g_{\boldsymbol{\omega}}$ で与えられるリーマン計量を超ケーラー計量という．超ケーラー計量は常にリッチ平坦，すなわち $\mathrm{Ric}_{g_{\boldsymbol{\omega}}} \equiv 0$ を満たす．

コンパクトな 4 次元多様体であって，超ケーラー構造を許容するものは 4 次元トーラスか $K3$ 曲面のどちらかである．このうち 4 次元トーラス上の超ケーラー計量は平坦計量である．従って，4 次元のコンパクト多様体上における非自明な超ケーラー計量は $K3$ 曲面上にのみ存在する．また $K3$ 曲面上の超ケーラー計量は，Yau によって証明されたモンジュ・アンペール方程式の解の存在定理から従うものであり，それらを明示的に記述することは困難である．しかし，その超ケーラー計量がモジュライ空間の無限遠点付近に位置する場合は，いくつかの明治的な超ケーラー計量の貼り合わせとして近似的に構成されることがある．そのような構成の 1 つが Foscolo による 3 次元平坦軌道体にグロモフ・ハウスドルフ収束する族であり，これを本研究において主として扱った．

3. 3 次元平坦軌道体にグロモフ・ハウスドルフ収束する $K3$ 曲面上の超ケーラー構造の族

ここでは [2] において構成された $K3$ 曲面上の超ケーラー構造の族について述べる．

3.1. **Gibbons-Hawking 計量.** まず，[3] において Gibbons と Hawking によって導入された $U(1)$ 対称性を持つ非コンパクト 4 次元超ケーラー多様体の構成を説明する．

まず $(Y, g_{\boldsymbol{\theta}})$ を平坦な 3 次元リーマン多様体とし，ある閉 1-形式の 3 つ組 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Omega^1(Y)$ によって $g_{\boldsymbol{\theta}} = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ と書けるものとする．このとき任意の点 $p, q \in Y$ に対して $d(p,q)$ を p, q 間のリーマン距離とすれば，p の十分小さい近傍上において $x \mapsto d(x,p)^{-1}$ は p の補集合上の調和関数となる．この関数を h_p と書くことにする．さて，p の近傍 U に対して $U \setminus \{p\}$ 上で定義された C^∞ 級関数 h が，$h = kh_p + f$（ただし $f \in C^\infty(U)$ かつ $k \in \mathbb{R}$）という分解をもつときに，$h \sim_p kh_p$ と書くことにする．このとき，次の性質を持つ調和関数 h を考える．

(i) ある互いに異なる $p_1, \dots, p_N \in Y$ が存在し，h は $Y \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ 上定義された正値の調和関数である．
(ii) 各 $i = 1, \dots, N$ に対して $h \sim_{p_i} h_{p_i}/2$ である．
(iii) 任意の $C \in H_2(Y, \mathbb{Z})$ に対して $\int_C *dh \in 2\pi\mathbb{Z}$ を満たす．ただし $*dh \in \Omega^2(Y)$ は dh の $g_{\boldsymbol{\theta}}$ に関するホッジ双対である．

まず (i) より h は調和なので，$*dh$ は閉形式である．(ii)(iii) の条件は，$*dh$ が代表するコホモロジー類が $H^2(Y \setminus \{p_1, \dots, p_N\}, 2\pi\mathbb{Z})$ の元であることを主張するので，$[*dh/2\pi]$ を第 1 チャーン類とするような主 $U(1)$ 束 $\mu\colon \check{X}^\circ \to Y \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ と，その上の $U(1)$ 接続 $\sqrt{-1}\theta$ で，曲率形式が $\sqrt{-1} * dh$ となるようなものの組が存在する．ここで，$\check{X}^\circ$ に N 点 $\{\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N\}$ を付け加えた集合 $\check{X}$ は滑らかな 4 次元多様体の構造を持ち，μ は $\mu(\hat{p}_i) = p_i$ と定めることによって $\check{X} \to Y$ に滑らかに拡張する．このとき θ を $\check{X}$ に拡張することはできないが，その代わりに次の 3 つの 2 形式

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{\mathrm{gh}} &= \mu^*\theta_1 \wedge \theta + \mu^*(h\theta_2 \wedge \theta_3), \\
\omega_2^{\mathrm{gh}} &= \mu^*\theta_2 \wedge \theta + \mu^*(h\theta_3 \wedge \theta_1), \\
\omega_3^{\mathrm{gh}} &= \mu^*\theta_3 \wedge \theta + \mu^*(h\theta_1 \wedge \theta_2)
\end{aligned}
$$

は $\check{X}$ 上の滑らかな超ケーラー構造 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{gh}} = (\omega_1^{\mathrm{gh}}, \omega_2^{\mathrm{gh}}, \omega_3^{\mathrm{gh}})$ を定める．ここから定まる超ケーラー計量 $g_{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{gh}}}$ を Gibbons-Hawking 計量という．

3.2. **Foscolo による超ケーラー構造の族の構成．** [2] における Foscolo の構成は，大まかに 2 つのステップに分かれる．まずは $K3$ 曲面上の “近似計量” を，Gibbons-Hawking 計量と Atiyah-Hitchin 計量の貼り合わせによって構成する．この貼り合わせた構造は，糊代において定義 2.1 の (ii) を満たさない．そこでこの近似計量を摂動することによって超ケーラー構造を構成する．

定理 3.1 ([2])**.** X を $K3$ 曲面と微分同相な C^∞ 級多様体とする．十分小さい任意の正の数 ε に対し，X 上の閉 2 形式の 3 つ組 $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = (\omega_{\varepsilon,1}, \omega_{\varepsilon,2}, \omega_{\varepsilon,3})$ と超ケーラー構造 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon = (\widetilde{\omega}_{\varepsilon,1}, \widetilde{\omega}_{\varepsilon,2}, \widetilde{\omega}_{\varepsilon,3})$，および X の開集合 U_ε であって以下を満たすようなものが存在する．

(i) $(U_\varepsilon, \boldsymbol{\omega}_\varepsilon|_{U_\varepsilon})$ の 2 重被覆は *Gibbons-Hawking* 計量のスケール変換である．
(ii) $X \setminus U_\varepsilon$ の各連結成分の直径は $\varepsilon \to 0$ において 0 に収束する．
(iii) $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ と $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon$ の差は $\varepsilon \to 0$ において 0 に収束する．

さらに，リーマン多様体 $(X, g_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon})$ は $\varepsilon \to 0$ において平坦トーラスの商 $T^3/\mathbb{Z}_2$ にグロモフ・ハウスドルフ収束する．

さらに，X が $T^3/\mathbb{Z}^2$ に収束する際の近似写像 $\mu\colon X \to T^3/\mathbb{Z}_2$ として次のようなものが存在する．

定理 3.2 ([5])**.** X と U_ε を定理 3.1 の通りとする．このとき，グロモフ・ハウスドルフ収束 $(X, g_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon}) \to T^3/\mathbb{Z}_2$ に伴う近似写像 μ_ε として，次を満たすようなものが存在する．

(i) $\mu_\varepsilon\colon X\to T^3/\mathbb{Z}_2$ は軌道体の間の滑らかな写像であり，そのホモトピー類は ε に依らない．
(ii) $\mu_\varepsilon|_{U_\varepsilon}$ を 2 重被覆にリフトした写像は，*Gibbons-Hawking* 計量に付随する主 $U(1)$ 束の射影に一致する．

4. 超ケーラー多様体から $T^3/\mathbb{Z}_2$ への写像に対するホモトピー不変量

X を 4 次元のコンパクト C^∞ 級多様体，$\boldsymbol{\omega}$ を X 上の超ケーラー構造とする．また T^3 上の平坦計量を $g_{\boldsymbol{\theta}}=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2$ とし，これは軌道体 $T^3/\mathbb{Z}_2$ 上のリーマン計量を誘導する．それを同じ記号 $g_{\boldsymbol{\theta}}$ で表す．

定義 4.1. 滑らかな写像 $\mu\colon X\to T^3/\mathbb{Z}_2$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}}(\mu):=\int_X\omega_1\wedge\mu^*(\theta_2\wedge\theta_3)+\int_X\omega_2\wedge\mu^*(\theta_3\wedge\theta_1)\\+\int_X\omega_3\wedge\mu^*(\theta_1\wedge\theta_2)\end{aligned}$$

と定める．

命題 4.2. $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}}(\mu)$ は μ のホモトピー類のみに依存する．すなわち，μ_0,μ_1 がホモトピー同値ならば $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}}(\mu_0)=\mathcal{I}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}}(\mu_1)$ が成り立つ．

定義 4.3. 滑らかな写像 $\mu\colon X\to T^3/\mathbb{Z}_2$ に対して，エネルギーを

$$\mathcal{E}_{g_{\boldsymbol{\omega}},g_{\boldsymbol{\theta}}}(\mu):=\int_X\|d\mu\|^2_{g_{\boldsymbol{\omega}},g_{\boldsymbol{\theta}}}\mathrm{vol}_{g_{\boldsymbol{\omega}}}$$

と定める．ただし $\mathrm{vol}_{g_{\boldsymbol{\omega}}}$ は超ケーラー計量 $g_{\boldsymbol{\omega}}$ によって定まる体積形式である．

命題 4.4. 任意の滑らかな写像 $\mu\colon X\to T^3/\mathbb{Z}_2$ に対して，

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}}(\mu)\le\mathcal{E}_{g_{\boldsymbol{\omega}},g_{\boldsymbol{\theta}}}(\mu)$$

が成り立つ．

上記の 2 つの命題を組み合わせると，エネルギーの下界を与えることがわかる．すなわち，$\mathcal{E}_{g_{\boldsymbol{\omega}},g_{\boldsymbol{\theta}}}$ を μ を含むホモトピー類 $[\mu]$ に制限した汎函数を考えたとき，次の評価が成り立つ．

$$\inf\left(\mathcal{E}_{g_{\boldsymbol{\omega}},g_{\boldsymbol{\theta}}}|_{[\mu]}\right)\ge\mathcal{I}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\theta}}(\mu).$$

このように，写像に対して定義されるある種のエネルギーの下界を，ホモトピー不変量によって与えるアイディアは，[1][6] などにおいて考えられている．

5. 主結果

Foscolo によって構成された超ケーラー構造の族と，定理 3.2 によって得られる近似写像の族に対して，崩壊に伴うそのエネルギーの挙動に関する評価を得た．その結果，$K3$ 曲面が 3 次元平坦軌道体に崩壊する際に，近似写像のエネルギーが “最小値に近づく” ことを確かめた．ただしここで，“最小値に近づく” という表現には注意が必要である．な

ぜなら，写像のエネルギーは超ケーラー計量の取り方に依存するものであるから，崩壊のパラメータである ε が変わるごとにエネルギー汎函数も変わるので，異なる ε 同士に対してエネルギーの大小を単純に比較することはナンセンスである．正確には次の定理を得た．

定理 5.1 ([5])**.** X を $K3$ 曲面，$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon$ を定理 3.1 によって得られる X 上の超ケーラー構造とする．また $\mu_\varepsilon\colon X \to T^3/\mathbb{Z}_2$ を定理 3.2 によって得られる写像とする．このとき

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{I}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon,\boldsymbol{\theta}}(\mu_\varepsilon) > 0$ である．
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{E}_{g_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon},g_{\boldsymbol{\theta}}}(\mu_\varepsilon) \geq \mathcal{I}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon,\boldsymbol{\theta}}(\mu_\varepsilon)$ である．
(iii)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{E}_{g_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon},g_{\boldsymbol{\theta}}}(\mu_\varepsilon)}{\mathcal{I}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon,\boldsymbol{\theta}}(\mu_\varepsilon)} = 1$$

が成立する．

6. 2 次元への崩壊との比較

$K3$ 曲面上の超ケーラー軽量の崩壊は，Foscolo による 3 次元への崩壊の他にも，1 次元，2 次元への崩壊の例が知られている．このうち 2 次元への崩壊は Gross と Wilson によって構成されており [4]，その場合には前節で述べた主定理に対応する帰結は，より理想的に達成される．ここではそれについて述べたい．

まず [4] において構成される超ケーラー計量の族は次のようなものである．$\mu\colon X \to S^2$ を $K3$ 曲面 X 上の楕円ファイブレーションとする．すなわち X はある複素構造により複素多様体とみなされ，μ は X から $S^2 = ¶^1$ への全射な正則写像で，ほとんどのファイバーが楕円曲線となるようなものとする．このとき μ は必ず特異ファイバーをもつが，それらが最も generic な場合として小平 I_1 型の特異ファイバーのみが現れるものとすると，特異ファイバーは全部で 24 箇所に現れることが分かる．その上で [4] では，X 上の超ケーラー計量の族 $(\boldsymbol{\omega}_t)_{t>0}$ であって，$\omega_{2,t} + \sqrt{-1}\omega_{t,3}$ が元の複素構造について正則 2 形式であるようなものを構成した．さらにその超ケーラー計量 $g_{\boldsymbol{\omega}_t}$ は $t \to 0$ において S^2 と同相な距離空間にグロモフ・ハウスドルフ収束する．このとき，正則写像 μ が近似写像を与えている．

ここで，$\eta \in \Omega^2(S^2)$ を Fubini-Study 形式とするときに，Lichnerowicz[7] によって次のことが示されている．まず，C^∞ 級写像 $f\colon \to S^2$ に対して

$$\mathcal{I}'_{\boldsymbol{\omega}_t,\eta}(f) := 2\int_X \omega_{t,1} \wedge f^*\eta$$

と定める．これは f のホモトピー類のみに依存し，代表元の取り方には依らない．このとき，以下のことが成立する．

- 任意の C^∞ 級写像 $f\colon \to S^2$ に対して $\mathcal{E}_{g_{\boldsymbol{\omega}_t},g_\eta}(f) \geq \mathcal{I}'_{\boldsymbol{\omega}_t,\eta}(f)$ が成り立つ．
- 等号成立は f が正則写像の場合に限られる．

これらの結果により，定理 5.1 の記述に合わせて楕円 $K3$ 曲面 $\mu\colon X \to S^2$ の場合を考えると，次のようなことが分かる．

(i) 任意の $t > 0$ に対して $\mathcal{I}'_{\boldsymbol{\omega}_t,\eta}(\mu) > 0$ である．

(ii)(iii) 任意の $t > 0$ に対して

$$\frac{\mathcal{E}_{g_{\boldsymbol{\omega}_t},g_\eta}(\mu)}{\mathcal{I}'_{\boldsymbol{\omega}_t,\eta}(\mu)} = 1$$

が成立する．

References

[1] C. Croke and A. Fathi. An inequality between energy and intersection. *Bull. London Math. Soc.*, 22(5):489–494, 1990.

[2] Lorenzo Foscolo. ALF gravitational instantons and collapsing Ricci-flat metrics on the $K3$ surface. *J. Differential Geom.*, 112(1):79–120, 2019.

[3] Gary W Gibbons and Stephen W Hawking. Gravitational multi-instantons. *Physics Letters B*, 78(4):430–432, 1978.

[4] Mark Gross and P. M. H. Wilson. Large complex structure limits of $K3$ surfaces. *J. Differential Geom.*, 55(3):475–546, 2000.

[5] Kota Hattori. The energy of maps accompanying the collapsing of the $k3$ surface to a flat 3-dimensional orbifold. *arXiv preprint arXiv:2410.15545*, 2024.

[6] Kota Hattori. Smooth maps minimizing the energy and the calibrated geometry. *J. Geom. Anal.*, 34(1):Paper No. 9, 22, 2024.

[7] André Lichnerowicz. Applications harmoniques et variétés Kähleriennes. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 39:186–195, 1969.

Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223-8522, Japan
Email address: hattori@math.keio.ac.jp