

複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉， コンパクト対称三対の標準形とその応用

井川 治 (京都工芸繊維大学)

部分多様体幾何とリー群作用 2024

2024 年 12 月 3 日

東京理科大学 神楽坂キャンパス森戸記念館

複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉が離散的になるための必要十分条件をこれまでに知られていたものを含む形で述べる．実旗多様体の離散的な交叉はある Weyl 群の軌道であり，複素旗多様体の「対蹠集合」になる（定理 1.2）．応用として，複素旗多様体内の実旗多様体は大域的タイトになることを示す（系 1.5）．複素旗多様体と二つの実旗多様体の組は，コンパクト対称三対から構成されるが，出発点となるコンパクト対称三対を「標準的」なものにとれることを示す．

この講演は，馬場蔵人，大野晋司，酒井高司，田崎博之との共同研究であり，馬場蔵人との共同研究，入江博，奥田隆幸，酒井高司，田崎博之との共同研究の内容も含む．

1 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉

このノート全体を通じて， G を compact 連結単純 Lie 群とし，その Lie 環を $\mathfrak{g}$ と表す．

(G, K) を compact 対称対とし， $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする． $x \in \mathfrak{p} - \{0\}$ に対し， $M = \text{Ad}(G)x$ を複素旗多様体， $L = \text{Ad}(K)x$ を実旗多様体という．

複素旗多様体内の二つ実形 L_0 と L_1 の交叉 $L_0 \cap L_1$ について考察する．[8] において， $L_0 \cap L_1 \neq \emptyset$ となることはすでにわかっているので，次のように設定できる．

(G, K_0) と (G, K_1) を二つの compact 対称対とする．すなわち， G 上に二つの対合 θ_i ($i = 0, 1$) が存在して， $F(\theta_i, G)_0 \subset K_i \subset F(\theta_i, G)$ ． G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を θ_i により二通りに標準分解して， $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ と表す．複素旗多様体内に二つの実旗多様体の交叉を考えるので， $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \neq \{0\}$ と仮定できる． $x_0 \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 - \{0\}$ とし，複素旗多様体 $M = \text{Ad}(G)x_0$ と M 内に二つの実旗

多様体 $L_i := \text{Ad}(K_i)x_0 \subset M$ を考える．このとき，

$$L_0 = M \cap \mathfrak{p}_0, \quad L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1, \quad L_0 \cap L_1 = M \cap (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \quad (1.1)$$

となる ([8]). $L_i = \text{Ad}(F(\theta_i, G)_0)x_0$ が成り立つ ([6, Prop. 2.1]) ので, L_i は連結になる．よって必要があれば, $K_i = F(\theta_i, G)_0$ とおいてよい．特に K_i は連結と仮定してよい． x_0 を含む $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ 内の極大可換部分空間を $\mathfrak{a}$ とすると, $\dim \mathfrak{a} \geq 1$. $\alpha \in \mathfrak{a}$ に対し, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \quad (H \in \mathfrak{a})\} \quad (1.2)$$

と定めると, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)] \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$. $\cdot$ で $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役を表すと, $\overline{\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)} = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, -\alpha)$. $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は θ_0 と θ_1 の合成 $\theta_0\theta_1$ で不変である． $\mathfrak{a}$ の部分集合 $\tilde{\Sigma}$ を

$$\tilde{\Sigma} := \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

と定める．次の補題が知られている．

補題 1.1. $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ を張る既約ルート系になる．

証明．松木 [10, p. 60, Proposition 1] は $\tilde{\Sigma}$ がルート系の公理を満たすことを示した．[9, Lemma 4.12] で $\tilde{\Sigma}$ が $\mathfrak{a}$ を張ることを示した．[9, Lemma 4.34] で $\tilde{\Sigma}$ が既約ルート系であることを示した． $\square$

上の補題を踏まえて, $\tilde{\Sigma}$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系と呼ぶ． $\tilde{\Sigma}$ の定める Weyl 群を $W(\tilde{\Sigma})$ と表す． $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとり, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を $W(\mathfrak{t})$ と表す．

部分集合 $\mathcal{A} \subset M$ が対蹠集合であるとは, $\mathcal{A}$ が可換集合, すなわち, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \{0\}$ が成り立つときを言う．この定義は [8] で与えられた． M が compact 型 Hermite 対称空間のときには, 対蹠集合の定義は Chen-Nagano による点対称を用いた対蹠集合の定義 ([3]) と一致する．次の定理は [8] の精密化である．

定理 1.2. $L_0, L_1 \subset M$ を実旗多様体とする．次の条件 (1) と (2) は同値である．

- (1) $L_0 \cap L_1$ が離散的である．
- (2) $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ は可換部分空間である．

このとき, $L_0 \cap L_1$ は M の対蹠集合であり,

$$L_0 \cap L_1 = M \cap \mathfrak{a} = W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0 \quad (1.3)$$

が成り立つ．

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) の証明 : $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ は可換部分空間だから, (1.1) より,

$$L_0 \cap L_1 = M \cap \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \subset W(\mathfrak{t})x_0$$

となり, $L_0 \cap L_1$ が離散的である.

次の二つを示せば十分である.

- (1) から (2) を導くこと
- $L_0 \cap L_1$ が離散的であるかどうかに関わらず, 任意の $x_0 \in \mathfrak{a}$ について, $W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0$.

次の節でこれらを示す. $\square$

一般的な証明を述べる前に典型例について調べておく.

例 1.3. [2 次元球面内の大円の交叉] $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(2)$ と $\mathbb{R}^3$ を次のようにして同一視する :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

この同一視の下で, $[X, Y] = 2X \times Y$ が成り立つ.

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$$

で北極を表す.

$$G = SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \varphi & -e^{i\beta} \sin \varphi \\ e^{-i\beta} \sin \varphi & e^{-i\alpha} \cos \varphi \end{pmatrix} \right\}$$

とおくと, G は compact 単連結単純 Lie 群で, G の Lie 環は $\mathfrak{g}$ になる.

$$M := \text{Ad}(G)J = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \sin(\alpha + \beta) \\ \sin 2\varphi \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \right\} = S^2$$

とおく. G の対合 θ を $\theta(g) = \bar{g}$ と定めると, θ の固定部分群は $K = F(\theta, G) = SO(2)$. θ は $\mathfrak{g}$ の対合を誘導する. これも θ と表す. $\mathfrak{g}$ を θ により標準分解して, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と表すと,

$$\mathfrak{p} = \left\{ i \begin{pmatrix} x & z \\ z & -x \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathfrak{a} := \mathbb{R}J$ とおくと, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間である. $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環でもある.

$$A = \exp \mathfrak{a} = S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと, A は G 内の極大トーラスである. $\mathfrak{p} = \text{Ad}_G(K)\mathfrak{a}$ だから

$$S^2 = G/K = \text{Exp} \mathfrak{p} = \pi \exp(\text{Ad}(K)\mathfrak{a}) = \pi(KA)$$

が成り立つ. ここで, $\pi: G \rightarrow G/K$ は自然な射影である.

$$L := \text{Ad}(K)J = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ 0 \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} \right\} = S^1 = M \cap \mathfrak{p}$$

とおくと L は $M = S^2$ の大円である. 大円同士の交叉 $L \cap \text{Ad}(g)L$ ($g \in G$) について考えたい. 分解 $G = KAK$ にしたがって $g = k_1 \exp(tJ)k_2$ ($k_1, k_2 \in K$) と分解する. L は K 軌道だから, $L \cap \text{Ad}(g)L = \text{Ad}(k_1)(L \cap \text{Ad}(\exp tJ)L)$. このとき,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \cap \text{Ad}(\exp tJ)\mathfrak{p} = \mathbb{R}J &\Leftrightarrow \sin 2t \neq 0 \Leftrightarrow L \cap \text{Ad}(\exp tJ)L = \{\pm J\} = W(\tilde{\Sigma})J, \\ \mathfrak{p} \cap \text{Ad}(\exp tJ)\mathfrak{p} = \mathfrak{p} &\Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow L \cap \text{Ad}(\exp tJ)L = L \end{aligned}$$

ただし, $\tilde{\Sigma}$ は (G, K) の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系であり, $W(\tilde{\Sigma})$ は $\tilde{\Sigma}$ の Weyl 群である. 離散的な交叉 $L \cap \text{Ad}(\exp tJ)L = \{\pm J\}$ は $M = S^2$ の大対蹠集合であることを示す. s_X で S^2 の $X \in S^2$ における点対称を表すと, $s_X Y = 2\langle X, Y \rangle X - Y$ となる.

$$\begin{aligned} s_X Y = Y &\Leftrightarrow Y = \langle X, Y \rangle X \Leftrightarrow X // Y \Leftrightarrow [X, Y] = 0 \\ &\Leftrightarrow s_Y X = X \Leftrightarrow Y = \pm X \end{aligned}$$

よって, 離散的な交叉 $L \cap \text{Ad}(\exp tJ)L$ は M の大対蹠集合になる.

定義 1.4. M を複素旗多様体, $L \subset M$ を実旗多様体とする. $L \subset M$ が大域的タイトであるとは, $L \cap \text{Ad}(g)L$ が離散的であるような任意の $g \in G$ に対し, $\#(L \cap \text{Ad}(g)L) = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つときをいう. ここで, $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数のベッチ数の総和である.

定理 1.2 の応用として次を示す.

系 1.5. (IHOST) 実旗多様体 $L \subset M$ は大域的タイトである.

証明. $L_0 := L, L_1 = \text{Ad}(g)L$ として, 定理 1.2 を適用すると, $L \cap \text{Ad}(g)L$ が離散的ならば, $L \cap \text{Ad}(g)L = W(\tilde{\Sigma})x_0$ が成り立つ. このとき, $\#(L \cap \text{Ad}(g)L) = \#(W(\tilde{\Sigma})x_0) = SB(L, \mathbb{Z}_2)$. 第二の等号は [2, p. 86] からしたがう. $\square$

2 定理 1.2 の証明の概要

いくつかの準備の後に次の補題 2.1 を示す．補題 2.1 が示されれば，定理 1.2 が示されたことになる．

補題 2.1. 次が成り立つ．

- (1) $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ は可換部分空間でなければ， $L_0 \cap L_1$ は離散的でない．
- (2) 任意の $x_0 \in \mathfrak{a}$ について， $W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0$ ．

G と G 上の二つの対合 θ_0, θ_1 の三対を compact 対称三対という．松木 [11] は compact 対称三対の集合 $\{(G, \theta_0, \theta_1) \mid \theta_0, \theta_1 \text{ は } G \text{ の対合}\}$ に対し，次の同値関係を導入した． (G, θ_0, θ_1) と $(G, \theta'_0, \theta'_1)$ が同値であるとは， G 上の自己同型写像 $\varphi \in \text{Aut}(G)$ と内部自己同型写像 $\tau \in \text{Int}(G)$ が存在して，

$$\theta'_0 = \tau\varphi\theta_0\varphi^{-1}\tau^{-1}, \quad \theta'_1 = \varphi\theta_1\varphi^{-1} \quad (2.1)$$

となるときを言う．このとき， $(G, \theta_0, \theta_1) \sim (G, \theta'_0, \theta'_1)$ と表す．

$(G, \theta_0, \theta_1) \sim (G, \theta'_0, \theta'_1)$ の下で， (G, θ_0, θ_1) から構成されたものを O とすると，それに対応する $(G, \theta'_0, \theta'_1)$ のものをプライムを付けて O' と表す．たとえば， $\mathfrak{p}'_i = F(-\theta'_i, \mathfrak{g})$ ．このとき，

$$\begin{aligned} F(\theta'_0, G) &= \tau\varphi(F(\theta_0, G)), & \mathfrak{p}'_0 &= \tau\varphi(\mathfrak{p}_0), \\ F(\theta'_1, G) &= \varphi(F(\theta_1, G)), & \mathfrak{p}'_1 &= \varphi(\mathfrak{p}_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

compact 対称三対 (G, θ_0, θ_1) から複素旗多様体 $M = \text{Ad}(G)x_0$ と二つの実旗多様体 $L_i := \text{Ad}(K_i)x_0$ が構成されたとする．(2.1) の下で M と同型な複素旗多様体 M' を

$$M' = \text{Ad}(G)\varphi(x_0)$$

と定める． $M' = \text{Ad}(G)\tau\varphi(x_0)$ と書ける． M' 内の実旗多様体 L'_i を次で定める．

$$L'_0 = \text{Ad}(F(\theta'_0, G))\tau\varphi(x_0) = \tau\varphi(L_0), \quad L'_1 = \text{Ad}(F(\theta'_1, G))\varphi(x_0) = \varphi(L_1)$$

と定める．ただし， θ_i, τ, φ の微分写像も同じ記号で表した．

(2.2) より，次の補題が従う．

補題 2.2. 次が成り立つ．

- (1) (2.1) において， $\tau = 1$ のとき，

$$L'_i = \varphi(L_i), \quad L'_0 \cap L'_1 = \varphi(L_0 \cap L_1), \quad \mathfrak{p}'_0 \cap \mathfrak{p}'_1 = \varphi(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1).$$

$L_0 \cap L_1 = W(\tilde{\Sigma})x_0$ となるための必要十分条件は， $L'_0 \cap L'_1 = W(\varphi(\tilde{\Sigma}))\varphi(x_0)$ ．ここで， $\varphi(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{p}'_0 \cap \mathfrak{p}'_1$ の極大可換部分空間であり， $\varphi(\tilde{\Sigma})$ は $\mathfrak{g}$ の $\varphi(\mathfrak{a})$ に関する制限ルート系である．

(2) (2.1) において, $\varphi = 1, \tau = \tau_{k_1 a k_0}$ ($k_i \in K_i, a \in A := \exp \mathfrak{a}$) のとき,

$$\begin{aligned} L'_0 &= \text{Ad}(k_1)\text{Ad}(a)L_0, & L'_1 &= L_1, & L'_0 \cap L'_1 &= \text{Ad}(k_1)(\text{Ad}(a)L_0 \cap L_1), \\ \mathfrak{p}'_0 \cap \mathfrak{p}'_1 &= \text{Ad}(k_1)(\text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \end{aligned}$$

$\mathfrak{a}$ は $\text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間でもあり, $\text{Ad}(a)L_0 \cap L_1 = W(\tilde{\Sigma})x_0$ となるための必要十分条件は, $L'_0 \cap L'_1 = \text{Ad}(k_1)(W(\tilde{\Sigma})x_0)$.

Hermann の定理 ([5]) より, $G = K_1 A K_0$ が成り立つ. 上の補題から, 補題 2.1 を示すためには, 同値類 $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ の中から, 扱いやすい代表元を取り出して,

(1) $\text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ が可換でなければ $\text{Ad}(a)L_0 \cap L_1$ は離散的でない.

(2) $W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0$ が任意の $x_0 \in \mathfrak{a}$ について成り立つ.

を示せば十分であることがわかった.

補題 2.3. $n := \text{ord}(\theta_0 \theta_1) < \infty$ と仮定する. $\text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ が可換でなければ $\text{Ad}(a)L_0 \cap L_1$ は離散的でない.

証明の概要. $a \in A$ だから, $\mathfrak{a} \subset \text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$. $\text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ と直交直和分解すると, $\text{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ は可換ではないから, $\mathfrak{a}^\perp \neq \{0\}$. $X \in \mathfrak{a}^\perp - \{0\}$ をうまくとり, X を用いて $\text{Ad}(a)L_0 \cap L_1$ 内に円周 S^1 が構成できることをいう. これを言うために [12] の結果が必要になる. $\square$

$n := \text{ord}(\theta_0 \theta_1) < \infty$ と仮定しているので, 大野 [12] の結果が使える. $\theta_0 \theta_1$ を複素線形に $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ に拡張したものは対角化可能であり, その固有値 ϵ は 1 の n 乗根になる. $\epsilon \in U(1)$ に対し (1.2) で定義された $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_0 \theta_1 X = \epsilon X\}$$

と定めると, $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は $\theta_0 \theta_1$ 不変だから,

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \sum_{\epsilon \in U(1)} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) \quad (2.3)$$

$\epsilon \in U(1)$ に対し,

$$\Sigma_\epsilon = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) \neq \{0\}\}$$

とおくと,

$$\tilde{\Sigma} = \bigcup_{\epsilon \in U(1)} \Sigma_\epsilon$$

が成り立つ. $\epsilon \in U(1)$ に対し, $\varphi_\epsilon \in (-\pi/2, \pi/2]$ を $\epsilon = e^{2\sqrt{-1}\varphi_\epsilon}$ ととる.

定義 2.4. $H \in \mathfrak{a}$ が正則点であるとは、任意の $\epsilon \in U(1), \alpha \in \Sigma_\epsilon$ に対し、 $\langle \alpha, H \rangle + \varphi_\epsilon \notin \pi\mathbb{Z}$ となることを言う。

補題 2.5. $H \in \mathfrak{a}$ が正則点であるための必要十分条件は、任意の $\epsilon \in U(1), \alpha \in \Sigma_\epsilon^+$ に対して、 $\langle \alpha, H \rangle + \varphi_\epsilon \notin \pi\mathbb{Z}$

証明. $(\Rightarrow)$ は $\Sigma_\epsilon^+ \subset \Sigma_\epsilon$ から従う. $(\Leftarrow)$ を示すため、 $\alpha \in \Sigma_\epsilon - \Sigma_\epsilon^+$ とすると、 $-\alpha \in \Sigma_\epsilon^+$ だから、 $-\langle \alpha, H \rangle + \varphi_{\bar{\epsilon}} \notin \pi\mathbb{Z}$. これより、 $\langle \alpha, H \rangle - \varphi_{\bar{\epsilon}} \notin \pi\mathbb{Z}$. $\epsilon \neq -1$ のとき、 $-\varphi_{\bar{\epsilon}} = \varphi_\epsilon$ だから、 $\langle \alpha, H \rangle + \varphi_\epsilon \notin \pi\mathbb{Z}$. $\epsilon = -1$ のとき、 $\varphi_\epsilon = \varphi_{\bar{\epsilon}} = \pi/2$ だから、

$$\langle \alpha, H \rangle + \frac{\pi}{2} = \langle \alpha, H \rangle - \frac{\pi}{2} + \pi \notin \pi\mathbb{Z}$$

いずれの場合にも $\langle \alpha, H \rangle + \varphi_\epsilon \notin \pi\mathbb{Z}$ となり、主張が成り立つ. $\square$

正則点の全体 $\mathfrak{a}_r$ は $\mathfrak{a}$ の稠密な開集合である。

$\mathfrak{t}$ の線形順序 $<$ は、 $\mathfrak{a}$ の線形順序 $<$ を誘導する. $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関するルート系を Δ と表す. Δ および $\tilde{\Sigma}$ の上の線形順序に関する正ルートの全体をそれぞれ、 Δ^+ と $\tilde{\Sigma}^+$ で表す。

$$\mathfrak{a}_+ = \{X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \geq 0 \quad (\lambda \in \tilde{\Sigma}^+)\}, \quad (2.4)$$

$$\mathfrak{t}_+ = \{X \in \mathfrak{t} \mid \langle \alpha, X \rangle \geq 0 \quad (\alpha \in \Delta^+)\} \quad (2.5)$$

とおく。

補題 2.6. $n := \text{ord}(\theta_0\theta_1) < \infty$ かつ $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{t}_+$ と仮定する. 任意の $x_0 \in \mathfrak{a}$ について、 $W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0$.

証明の概要. [12] を用いると $W(\tilde{\Sigma})$ は $M \cap \mathfrak{a}$ を不変にすることが示される. $M \cap \mathfrak{a}$ が $W(\tilde{\Sigma})$ の一元の軌道になることを言えばよい. (2.4) で定義された $\mathfrak{a}_+$ は $\mathfrak{a}$ の $W(\tilde{\Sigma})$ 作用に関する基本閉領域であり、(2.5) で定義された $\mathfrak{t}_+$ は $\mathfrak{t}$ の $W(\Delta)$ 作用に関する基本閉領域である. $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{t}_+$ だから、[4, p. 293, Theorem 2.2] を用いて、

$$\begin{aligned} 1 &= \#(M \cap \mathfrak{t}_+) \\ &\geq \#(M \cap \mathfrak{a}_+) \\ &= \#(M \cap \mathfrak{a} \text{ を } W(\tilde{\Sigma}) \text{ で軌道分解したときの軌道の数}) \\ &\geq \#(W(\tilde{\Sigma})x \text{ を } W(\tilde{\Sigma}) \text{ で軌道分解したときの軌道の数}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ゆえに主張が成り立つ. $\square$

補題 2.3 と補題 2.6 より、補題 2.1 を証明するためには、各 (G, θ_0, θ_1) に対し、 $(G, \theta'_0, \theta'_1) \sim (G, \theta_0, \theta_1)$ を次のように選べることが示せれば十分であることがわかった：

- (1) $\text{ord}(\theta'_0 \theta'_1) < \infty$.
- (2) $\mathfrak{p}'_0 \cap \mathfrak{p}'_1$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}'$ と $\mathfrak{a}'$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}'$ と $\mathfrak{t}'$ 上の線形順序 $<$ が存在して、 $\mathfrak{a}'_+ \subset \mathfrak{t}'_+$ を満たす。

以下、上の条件を満たすように $(G, \theta'_0, \theta'_1)$ がとれることを示す。

定義 2.7. [1, Definition 6.1] compact 対称三対 (G, θ_0, θ_1) が標準的であるとは、 $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ が存在して、次を満たすときをいう。

(C1) $\mathfrak{t}$ は (G, θ_0, θ_1) に関して、準標準的である：すなわち、

- (i) $\mathfrak{a}_i := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}_i$ は $\mathfrak{p}_i$ の極大可換部分空間である ($i = 0, 1$)。特に、 $[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1] = \{0\}$ であり、 $\mathfrak{t}$ は θ_i -不変である。
- (ii) $\mathfrak{t}$ 上に線形順序 $<$ が存在して、 $\alpha \in \Delta^+ - \Delta_0^i$ について、 $-\theta_i(\alpha) > 0$ が成り立つ ($i = 0, 1$)、ただし、 $\Delta_0^i = \Delta \cap \mathfrak{k}_i$ とおいた。

(C2) $\text{ord}(\theta_0 \theta_1) = \text{ord}(d\theta_0 d\theta_1|_{\mathfrak{t}})$ 。特に、 $\text{ord}(\theta_0 \theta_1) < \infty$ 。

このとき、 $\mathfrak{t}$ を (G, θ_0, θ_1) に関して、標準的であるという。

定理 2.8. [1, Theorem 6.12] (G, θ_0, θ_1) を標準的な compact 対称三対とする。 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環で、 (G, θ_0, θ_1) に関して標準的なものとする。このとき、 $\mathfrak{a} := \mathfrak{t} \cap (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1)$ は $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間である。

補題 2.9. (G, θ_0, θ_1) を標準的な compact 対称三対とする。 $\mathfrak{t}$ を (G, θ_0, θ_1) に関して、標準的な $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環とする。 $\bar{\cdot} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{a}$ で直交射影を表す。このとき、 $\tilde{\Sigma}^+ = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Delta^+\} - \{0\}$ が成り立つ。特に、 $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{t}_+$ が成り立つ。

証明. $\mathfrak{t}$ は標準的だから、 θ_i 不変である ($i = 0, 1$)。 $H \in \mathfrak{t}$ に対し、

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \{(\theta_0 \theta_1)^k(H) - \theta_0(\theta_0 \theta_1)^k(H)\} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \{(\theta_0 \theta_1)^k(H) - (\theta_0 \theta_1)^k \theta_0(H)\} \end{aligned}$$

が成り立つ。¹ ここで、 $\alpha \in \Delta^+$, $\bar{\alpha} \neq 0$ とする。このとき、 $\alpha \notin \Delta_0^0$ かつ $\alpha \notin \Delta_0^1$ 。
 定義 2.7, (ii) より、 $-\theta_i(\alpha) \in \Delta^+$ 。 $\overline{-\theta_i(\alpha)} = \bar{\alpha} \neq 0$ だから、 $\theta_j \theta_i(\alpha) = (-\theta_j)(-\theta_i)(\alpha) \in \Delta^+$ 。帰納的に $(\theta_0 \theta_1)^k(\alpha) > 0$, $-\theta_0(\theta_0 \theta_1)^k(\alpha) > 0$ が得られる。よって、 $\bar{\alpha} > 0$ 。 $\square$

定理 2.10. [1, Theorem 6.6] compact 対称三対 (G, θ_0, θ_1) に対し、標準的な compact 対称三対 (G, θ_0, θ'_1) で $(G, \theta_0, \theta'_1) \sim (G, \theta_0, \theta_1)$ を満たすものが存在する。

¹[1, (6.1)] はタイプミス。(6.1) 式中の $\frac{1}{n}$ を $\frac{1}{2n}$ に修正する必要がある。

以上で、定理 1.2 の証明が完成した。

まとめると、複素旗多様体内の実旗多様体の交叉を考えるためには、次の設定で考えれば十分であることがわかった。

(G, θ_0, θ_1) は標準的な三対であり、 $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \neq \{0\}$. $\mathfrak{t}$ は (G, θ_0, θ_1) に関して標準的であり、 $\mathfrak{a} := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$. $x_0 \in \mathfrak{a} - \{0\}$ として、 $M = \text{Ad}(G)x_0 \supset L_i = \text{Ad}(K_i)x_0$ とおいたとき、 $\text{Ad}(\exp H)L_0 \cap L_1$ ($H \in \mathfrak{a}$) を考えればよい. (??) と定理 1.2 から次が得られる：

定理 2.11. 上の設定の下で、交叉 $\text{Ad}(\exp H)L_0 \cap L_1$ が離散的になるための必要十分条件は H が正則点になることである。

上のように設定すると、大野の結果 [12] と [1] で定義した二重佐武図形が使えるので、たとえば G が例外型で交叉に関連した種々の計算が直接的には困難な場合でも、二重佐武図形を使って簡単に計算できる可能性が高い。

群 $\{(k, 0) \mid k \in Z_{K_0 \cap K_1}(\mathfrak{a})\} \cong Z_{K_0 \cap K_1}(\mathfrak{a})$ は群 $\{(s, Y) \in N_{K_0}(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a} \mid \exp(-Y)s \in K_1\}$ の正規部分群となる。松木は群 $\tilde{J}$ を

$$\tilde{J} = \{(s, Y) \in N_{K_1}(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a} \mid \exp(-Y)s \in K_0\} / \{(k, 0) \mid k \in Z_{K_0 \cap K_1}(\mathfrak{a})\}$$

と定義した。 $\tilde{J}$ は $\mathfrak{a}$ に効果的に作用する。

$\mathfrak{a}_r$ の連結成分をセルという。

$$\bigcup_{\epsilon \in U(1)} \left\{ \left(s_\alpha, 2 \frac{n\pi - \varphi_\epsilon}{\|\alpha\|^2} \alpha \right) \mid \alpha \in \Sigma_\epsilon, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

で生成される $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群を $W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\}_{\epsilon \in U(1)})$ と表す。[12] より、 $W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\}_{\epsilon \in U(1)})$ は $\tilde{J}$ の部分群になる。

命題 2.12. $H_1 \in \mathfrak{a}$ と $H_2 \in \mathfrak{a}$ が $\tilde{J}$ で移り合えば、 $\text{Ad}(\exp H_1)L_0 \cap L_1$ と $\text{Ad}(\exp H_2)L_0 \cap L_1$ は合同である。

$\tilde{J}$ はセルをセルに移す。 $W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})$ はセルの全体に推移的に作用する。 P で一つのセルを表すと

$$\mathfrak{a} = \bigcup_{\sigma \in W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})} \sigma \bar{P}$$

が成り立つ。

証明. 仮定より (s, Y) が存在して、 $H_2 = sH_1 + Y$. $s = \text{Ad}(k)$ ($k \in K_1$) と表示する。このとき、

$$\text{Ad}(\exp H_2) = \text{Ad}(k)\text{Ad}(\exp H_1)\text{Ad}(k^{-1}\exp Y)$$

だから、

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp H_2)L_0 \cap L_1 &= \text{Ad}(k)(\text{Ad}(\exp H_1)\text{Ad}(k^{-1}\exp Y)L_0 \cap L_1) \\ &= \text{Ad}(k)(\text{Ad}(\exp H_1)L_0 \cap L_1) \end{aligned}$$

よって, $\text{Ad}(\exp H_1)L_0 \cap L_1$ と $\text{Ad}(\exp H_2)L_0 \cap L_1$ は合同である.

$\tilde{J}$ の作用は連続だから, $\tilde{J}$ がセルをセルに移すことをいうためには, $\tilde{J}$ が正則点を正則点に移すことを言えばよい. 上の設定の下で

$$\begin{aligned} H_1 \in \mathfrak{a}_r &\Leftrightarrow \text{Ad}(\exp H_1)L_0 \cap L_1 : \text{離散} \quad (\text{定理 2.11}) \\ &\Leftrightarrow \text{Ad}(\exp H_2)L_0 \cap L_1 : \text{離散} \\ &\Leftrightarrow H_2 \in \mathfrak{a}_r \quad (\text{定理 2.11}) \end{aligned}$$

ゆえに, $\tilde{J}$ はセルをセルに移す. $W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})$ は $\tilde{J}$ の部分群だから, $W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})$ もセルをセルに移す. この作用が推移的であることをいう. P_1 と P_2 を異なるセルとし, $H_i \in P_i$ とする. $s_0 \in W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})$ を

$$|H_1 - s_0 H_2| = \min\{|H_1 - s H_2| \mid s \in W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})\}$$

とする. s_0 はセルをセルに移すから, $s_0 P_2 = P_1$ または, $s_0 P_2 \cap P_1 = \emptyset$ となる. 今仮に $s_0 P_2 \cap P_1 = \emptyset$ とすると, 線分 $\overline{H_1 H_2}$ の内点 H と $\epsilon \in U(1), \alpha \in \Sigma_\epsilon, n \in \mathbb{Z}$ が存在して, $\langle \alpha, H \rangle + \varphi_\epsilon = n\pi$ が成り立つ. $s := (s_\alpha, 2^{\frac{n\pi - \varphi_\epsilon}{\|\alpha\|^2}}) \in W(\tilde{\Sigma}, \{\Sigma_\epsilon\})$ とおく. とおくと,

$$\begin{aligned} &\|H_1 - s_0 H_2\|^2 - \|H_1 - s s_0 H_2\|^2 \\ &= -\frac{4}{\|\alpha\|^4} (n\pi - \varphi_\epsilon - \langle \alpha, H_1 \rangle)(n\pi - \varphi_\epsilon - \langle \alpha, H_2 \rangle) > 0 \end{aligned}$$

これは s_0 のとり方に矛盾する. □

3 今後の課題

○ 複素旗多様体 M 内の二つの実旗多様体 L_0, L_1 に対し, 数 $SB(L_0, L_1, M, \mathbb{Z}_2)$ を定義し, 次が成り立つようにせよ.

(1) $L_0 = L_1$ ならば, $SB(L_0, L_1, M, \mathbb{Z}_2) = SB(L_0, \mathbb{Z}_2)$

(2) 離散的な交叉 $\text{Ad}(g)L_0 \cap L_1$ に対し,

$$\#(\text{Ad}(g)L_0 \cap L_1) = SB(L_0, L_1, M, \mathbb{Z}_2)$$

2014/12/09 広島大学談話会 (田崎博之) より

○ 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の Floer ホモロジー

○ 実旗多様体の交叉積分公式

○ 実旗多様体の Hamilton 体積最小性

この他に θ_0 と θ_1 の可換性を仮定しない場合はどうなるか? というものが今後の課題として挙げてあったが, 今回で解決した.

参考文献

- [1] K. Baba and O. Ikawa, Double Satake diagrams and canonical forms in compact symmetric triads, *International Electronic Journal of Geometry*, **17**, no. 2, (2024), 466–495.
- [2] J. Berndt, S. Console and A. Fino, On index number and topology of flag manifolds, *Differential Geom. Appl.*, **15** (2001), 81–90.
- [3] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), 273–297.
- [4] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [5] R. Hermann, Totally geodesic orbits of groups of isometries, *Nederl. Akd. Wetensch. Proc. Ser. A* **65**=*Indag. Math.* **24** (1962), 291–298.
- [6] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, Area-minimizing of the cone over symmetric R -spaces, *Tsukuba J. Math.* **24** (2000), 171–188.
- [7] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Third Printing, Revised, Springer-Verlag.
- [8] O. Ikawa, H. Iriyeh, T. Okuda, T. Sakai and H. Tasaki, The intersection of two real forms in a Kaehler C -space, in preparation.
- [9] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, *J. Math. Soc. Japan* **63** no.1 (2011), 79–136.
- [10] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, *J. Algebra*, **197** (1997), 49–91.
- [11] T. Matsuki, Classification of two involutions on semisimple compact Lie groups and root systems, *J. Lie Theory*, **12** (2002), 4168
- [12] S. Ohno, Geometric properties of orbits of Hermann actions, *Tokyo J. Math.* **46** (2023), no. 1, 63–91.
- [13] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 375–382.