

Cartan embeddings of compact Riemannian k -symmetric spaces

木村 太郎 (鶴岡工業高等専門学校)*

概 要

コンパクト単純リー群 G の有限位数自己同型写像 σ から定まるカルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \rightarrow G$ の像 $\Psi_\sigma(G/K)$ は G の部分多様体となる. この部分多様体の分類問題として, 極小部分多様体, austere 部分多様体, 2重調和部分多様体の分類が考えられる. この報告集では, austere 部分多様体, 2重調和部分多様体の分類について報告する.

本研究は間下克哉氏 (法政大学) とのカルタン埋め込み関する一連の共同研究 [7], [8],[9],[10] に基づく.

1. 序論

一般に等質空間における部分多様体の分類は多くは知られてはいない. コンパクトリー群に関する極大全測地的部分多様体が井川-田崎により以下で与えられている ([2]).

定理 ([2]). コンパクト単純連結リー群 G における全測地的部分多様体 M が極大である必要十分条件は, M はカルタン埋め込みの像か極大リー部分群である.

本研究は, コンパクト単純リー群 G への等長はめ込みを考え, ある種の部分多様体の分類について考える.

リーマン多様体の等長はめ込み $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ の第2基本形式を B とする. f の法ベクトル H に対して

$$h(B(X, Y), H) = h(A_H(X), Y) \quad X, Y \in T_p M, \quad H \in T_p^\perp M$$

によって定まる対称線形写像 A_H が定める型作用素 (shape operator) という. A_H の固有値が重複度も込めて -1 倍で不変であるときを austere normal direction と言う. 全ての法ベクトル $H (\neq 0)$ が austere normal direction であるとき, $f(M)$ を austere 部分多様体という. 定義により, austere 部分多様体は極小部分多様体である. Austere はめ込みより強い条件として弱鏡映部分多様体という概念もあり, 近年, austere 部分多様体や弱鏡映部分多様体は盛んに研究され, 井川-酒井-田崎 ([3]) による分類結果が知られている.

カルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \rightarrow G$ に対して, σ が対合的自己同型であるときは全測地的埋め込みとなる. 位数が 3 以上であるときは極小はめ込みとは限らないが, [13], [14] において, 位数 3, 4 のとき極小はめ込みになる σ が分類されている. 極小埋め込みよりも強い条件として, austere 埋め込みがあるが, 我々は位数が有限という条件のもとでカルタン埋め込みが austere 埋め込みになるの分類を [7] で与え, この結果は, 最近 [4] により有限という条件がはずされた一般化された形となり証明された.

2010 Mathematics Subject Classification: 53C40, 53C43

キーワード: Cartan embedding, austere, biharmonic submanifold

* 〒 997-8511 山形県鶴岡市井岡字沢田 104 鶴岡工業高等専門学校 創造工学科 基盤教育グループ
e-mail: t-kimura@tsuruoka-nct.ac.jp

関連する研究として, カルタン埋め込みの像 $\Psi_\sigma(G/K)$ の極小部分多様体としての安定性は, 位数が 2 および 3 のときのカルタン埋め込みの安定性が, [12], [13] で決定され, 近年, [8] により位数 4 と austere はめ込みの場合の安定性が決定された.

調和写像と関連する話題として, [1] で導入された k 重調和写像がある. これはコンパクトリーマン多様体の間の滑らかな写像 $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ に対して, Eell-Lemaire は, k -エネルギー汎関数を

$$E_k(f) = 1/2 \int_M \|(d + \delta)^k f\|^2 v_g \quad (k = 1, 2, \dots)$$

で定義した. $E_k(f)$ の第一変分の臨界点を k -調和写像と呼ぶ.

$k = 1$ のときは調和写像となり, f が等長はめ込みのとき, f が極小であることと, 調和写像となることは同値なる. これから $k = 2$ のときに 2-調和写像についての分類問題が自然に考えられる. この報告集では, 自己同型の位数が 4 以下の場合について, 2-調和写像 (2 重調和写像) になるカルタン埋め込みを決定したので報告する ([9]).

2. カルタン埋め込み

G をコンパクト単純連結リー群とし, σ を G の有限位数の自己同型写像とする. $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とおく. 写像 $\Psi : G \rightarrow G; g \rightarrow g\sigma(g)^{-1}$ は次の写像を引き起こす: $\Psi_\sigma : G/K \rightarrow G; gK \rightarrow g\sigma(g)^{-1}$. この写像を, σ が引き起こす **カルタン埋め込み** という. G に両側不変リーマン計量を入れ, $M = G/K$ には Ψ_σ による誘導計量を考える. このとき, カルタン埋め込み Ψ_σ の第二基本形式 B は以下で与えられる.

補題 ([7]). B を自己同型写像 σ に対応するカルタン埋め込み Ψ_σ の第 2 基本形式とする. このとき, $X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して,

$$B(X, Y) = -\frac{1}{2}[(1 - d\sigma)X, (1 + d\sigma)Y]_{\mathfrak{k}}.$$

G のリー環を $\mathfrak{g}$ として, σ による分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ で表す.

3. k -symmetric spaces

定義. G をコンパクトリー群, H をその閉部分群とする. G の有限位数 k の自己同型写像 σ ($\sigma^l \neq \text{id}, l < k$) が存在して,

$$G_o^\sigma \subset H \subset G^\sigma$$

が成り立つとき, $(G/H, \sigma)$ をコンパクト型 k -対称空間と呼ぶ.

特に, $k = 2$ のとき, 通常のコンパクト型対称空間となる.

例. エルミート対称空間は k -対称空間である.

4. Austere 部分多様体

G をコンパクト単純連結リー群, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 環とし, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関するルート系を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ とする. さらに, $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の 1 つの基本ルート系を $\Pi(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ とする. $v_i \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} (1 \leq i \leq n)$ を次で定める.

$$\alpha_j(v_i) = \frac{1}{m_i} \delta_{ij}.$$

$\alpha_0 = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の最高ルートとする. 内部自己同型写像 σ は $\text{Int}(\mathfrak{g})$ の下で $\text{Ad}(\exp 2\pi\sqrt{-1}H)$ ($H \in \mathfrak{D}_0$) に共役である. $\mathfrak{D}_0$ は基本領域を表す:

$$\mathfrak{D}_0 = \{H \in \sqrt{-1}\mathfrak{t} \mid \alpha_i(H) \geq 0 \ (1 \leq i \leq n), \alpha_0(H) \leq 1\}.$$

位数 3 の自己同型写像の分類は, Wolf and Gray ([15], [16]) により以下で H が与えられている:

- $H = 1/3v_i, m_i = 1,$
- $H = 2/3v_i, m_i = 2,$
- $H = 1/3(v_i + v_j), m_i = m_j = 1,$
- $H = v_i, m_i = 3.$

位数 4 の自己同型写像の分類は, Jimenez ([6]) により以下で H が与えられている:

- $H = v_i, m_i = 4,$
- $H = 3/4v_i, m_i = 3,$
- $H = 1/4(2v_i + v_j), m_i = 2, m_j = 1,$
- $H = 1/4(v_i + v_j + v_k), m_i = m_j = m_k = 1,$
- $H = 1/4v_i, m_i = 1,$
- $H = 1/2v_i, m_i = 2, H = 1/4(v_j + v_k), m_j = m_k = 1,$
 $H = 1/2(v_p + v_q), m_p = m_q = 2.$

位数 3 以上のとき, カルタン埋め込みの像が austere 部分多様体になる分類の手法は, 以下の基底を考えることで証明される.

G をコンパクト単純リー群, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化, Δ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ のルート系, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ を Δ の基本系とする. また

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

をルート空間分解とする. $\mathfrak{g}_{\alpha}$ の基底 E_{α} ($\alpha \in \Delta$) として, 次の性質をみたすものが存在する:

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = H_{\alpha}, \quad B(E_{\alpha}, E_{-\alpha}) = 1,$$

$$\alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \in \Delta \quad \text{ならば} \quad [E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha + \beta} \quad (N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta} \in \mathbb{R}).$$

ここで, B は $\tilde{\mathfrak{g}}$ のキリング形式とする. $\tilde{\mathfrak{g}}$ の基底

$$\{H_{\alpha_i} (1 \leq i \leq l), E_{\alpha} (\alpha \in \Delta)\}$$

を Weyl の標準基底という. Weyl の標準基底は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる. また正規実形

$$\mathfrak{g}_0 = \{H_{\alpha_i} (1 \leq i \leq l), E_{\alpha} (\alpha \in \Delta)\}_{\mathbb{R}}$$

の $\mathbb{R}$ 上の基底となる. このとき

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \bar{X} = X\}$$

となる.

$$\varphi_0 : \begin{cases} H \rightarrow -H \\ E_\alpha \rightarrow E_{-\alpha} \end{cases}$$

によって, $\tilde{\mathfrak{g}}$ または $\mathfrak{g}_0$ の自己同型が定義される.

$$\mathfrak{g}_u = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \varphi_0(\bar{X}) = X\}$$

とおく. このとき

$$\sqrt{-1}H_{\alpha_i} \ (1 \leq i \leq l), \ \sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \ E_\alpha - E_{-\alpha} \ (\alpha \in \Delta)$$

は $\mathfrak{g}_u$ に含まれる. これらは, $\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底, また $\mathfrak{g}_u$ の $\mathbb{R}$ 上の基底にもなる. $\mathfrak{g}_u$ をコンパクト実形と呼ぶ.

定理. $\mathfrak{g}_u$ はコンパクト半単純リー群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ に同型である.

これから, G のリー環 $\mathfrak{g}$ はコンパクト実型としても一般性を失わない.

Weyl の標準基底をカルタン埋め込みの第二基本形式に適用することで以下の定理が示される.

定理 ([7]). σ が有限位数 3 以上の内部自己同型写像が引き起こすカルタン埋め込み

$$\Psi_\sigma : G/K \rightarrow G; gK \rightarrow g\sigma(g)^{-1}$$

は *austere* 埋め込みではない.

最近, 井川-間下 ([4]) により, 有限位数の仮定は不要であることが証明されている.

定理 ([7]). G をコンパクト連結単純リー群, σ を G の有限位数の外部自己同型写像, $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とする. このとき, カルタン埋め込み Ψ_σ が *austere* 埋め込みならば, Ψ_σ は全測地的か $\sigma = (\mathfrak{g}_N^{(n)}; s_0, s_1, \dots, s_n)$ が次の表のどれかになる.

$\mathfrak{g}_N^{(n)}$	$\mathfrak{k}$	$s_0, s_1, \dots, s_n$	order
$\mathfrak{a}_2^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1$	$s_0 = 0, s_1 = 1$	4
$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)} \ (n \geq 2)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p} \ (1 \leq p \leq n)$	$s_p = 1, s_j = 0 \ (j \neq p)$	4
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)} \ (n \geq 3)$	$\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$s_0 = s_1 = 1, s_2 = \dots = s_n = 0$	4
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)} \ (n \geq 3)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p} \ (2 \leq p \leq n-1)$	$s_p = 1, s_j = 0 \ (j \neq p)$	4
$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)} \ (n \geq 2)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$s_0 = s_n = 1, s_2 = \dots = s_{n-1} = 0$	4
$\mathfrak{e}_6^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$	$s_1 = 1, s_0 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$	4
$\mathfrak{d}_4^{(3)}$	$\mathfrak{g}_2$	$s_0 = 1, s_1 = s_2 = 0$	3
$\mathfrak{d}_4^{(3)}$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$	$s_1 = 1, s_0 = s_2 = 0$	6

これらの結果も, 井川-間下 ([4]) により, 有限位数の仮定は不要であることが証明されている.

5. 2重調和部分多様体

リーマン多様体の等長はめ込み $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ に対して

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

で bienegy 関数を定義する. ここで, $\tau(\varphi)$ は φ の tension 場である. いま $\varphi_0 = \varphi$ である任意の変分 φ_t に対して第1変分公式は, [5] によって次で与えられた:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(\varphi_t) = - \int_M h(\tau_2(\varphi), V) v_g.$$

ここで $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, $\tau_2(\varphi)$ は φ の bitension 場を表す.

定義. $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ が $\tau_2(\varphi) = 0$ をみたすとき, φ を 2重調和写像という.

注意. 2重調和写像の定義から, 調和写像は2重調和写像となる.

注意. $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ が調和写像であることと, M が N の極小部分多様体であることは同値である.

定義. 調和写像でない2重調和写像を proper な2重調和写像という

6. カルタン埋め込みの2重調和性

カルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \rightarrow G; gK \rightarrow g\sigma(g)^{-1}$ の2重調和性を決定するには, 次の定理を用いる.

定理 ([11]). $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ を等長はめ込みとする. また, すべての $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $\nabla_X^\perp \tau(\varphi) = 0$ と仮定する. このとき, φ が2重調和写像であることは次と同値である.

$$\sum_{k=1}^m R^h(\tau(\varphi), d\varphi(e_k))d\varphi(e_k) = \sum_{j,k=1}^m h(\tau(\varphi), B_\varphi(e_j, e_k))B_\varphi(e_j, e_k)$$

ここで, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は local orthonomal frame field, R^h は N のリーマン曲率テンソル, B_φ は φ の第二基本形式である.

この定理を用いると, 位数3と4の自己同型の場合について次を得る.

定理 ([9]). 位数3の内部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \rightarrow G$ が proper な 2重調和写像ならば極小である.

定理 ([9]). 位数4の内部自己同型 $\sigma = \tau_{\exp(2\pi\sqrt{-1}H)}$ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が2重調和写像 proper 2重調和写像である必要十分条件は, 表1の $(\mathfrak{g}, H, \mathfrak{k})$ のどれかになる.

定理 ([9]). 位数4の外部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が2重調和写像 proper 2重調和写像である必要十分条件は次の $\sigma = (\mathfrak{g}_N^{(n)}; s_0, s_1, \dots, s_n)$ が, 表2のどれかになる.

$\mathfrak{g}$	H	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{a}_n$ ($n \geq 1$)	$1/4 v_i \quad (1 \leq i \leq [(n+1)/2])$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-i} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n$ ($n \geq 2$)	$1/4 v_1$	$\mathfrak{b}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n$ ($n \geq 2$)	$1/2 (v_i + v_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{b}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_n$ ($n \geq 3$)	$1/4 v_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_{2m}$ ($m \geq 2$)	$1/4 (2 v_m + v_{2m})$	$\mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n$ ($n \geq 4$)	$1/4 v_1$	$\mathfrak{d}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n$ ($n \geq 5$)	$1/4 v_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n$ ($n \geq 4$)	$1/4 (v_1 + 2 v_2)$	$\mathfrak{d}_{n-2} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_{2n}$ ($n \geq 2$)	$1/4 (2 v_n + v_{2n})$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n$ ($n \geq 5$)	$1/2 (v_i + v_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-3, 2i+1 < n)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{d}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_6$	$1/4 v_1$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/4 v_7$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/2 (v_1 + v_2)$	$\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$

表 1: Proper biharmonic Cartan embeddings induced by inner automorphism

$\mathfrak{g}$	type	$\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}; s_0, s_1, \dots, s_n)$ ($n \geq 2$)	$s_0 = s_n = 1, s_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1)$ $s_1 = s_n = 1, s_i = 0 \quad (i \neq 1, n)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$ $\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$(\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}; s_0, s_1, \dots, s_n)$ ($n \geq 2$)	$s_p = s_{p+1} = 1, s_i = 0$ ($0 \leq p \leq n-1, 2p+1 \neq n$) ($i \neq p, p+1$)	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-2p-2} \oplus$ $\mathfrak{b}_{p+1} \oplus \mathbb{R}$

表 2: Proper biharmonic Cartan embeddings induced by outer automorphism

7. 4-symmetric spaces

位数 4 の自己同型写像の分類は Jimenez による分類がある ([6]). カルタン埋め込みの austere 部分多様体の分類では, 自己同型の位数は 2,3,4,6 のいずれかであり, $k=2$ のときは, 全測地的, $k=3,6$ については, ケーリー代数 $\mathbb{O}$ から決まる triality automorphism より決まる自己同型となる. そこで, $k=2,3,6$ 以外の位数 4 についてのカルタン埋め込みについて考える. すなわち, 4-対称空間 G/K についてのカルタン埋め込みを考える.

いま, (G, H, τ) をコンパクトエルミート対称対とすると, τ は, H のリー環 $\mathfrak{h}$ の 1 次元中心 $\mathfrak{c}$ の元 J_0 を用いて

$$\tau(g) = \exp(\pi J_0) g \exp(-\pi J_0) \quad (g \in G)$$

で定義される. いま G 上の自己同型 σ_k ($k \neq 2$) を

$$\sigma_k(g) = \exp\left(\frac{2\pi}{k} J_0\right) g \exp\left(-\frac{2\pi}{k} J_0\right) \quad (g \in G)$$

で定義すると $(\sigma_k)^k = id, (\sigma_4)^2 = \tau$.

$$K = \{g \in G \mid \sigma_4(g) = g\}, H = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$$

とおくと $K \subset H$ をみたすので, ファイバー H/K のファイバー束 $G/K \rightarrow G/H$ を得る. このとき, σ_4 が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_{σ_4} の像 $\Psi_{\sigma_4}(G/K)$ について考える.

$$\begin{array}{ccc} G/K & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ & \searrow \Psi_{\sigma_4} & \\ & & G \end{array}$$

位数 4 の自己同型写像 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_{σ} を proper 2 重調和写像と仮定すると, 先ほどの結果の考察により G/H はコンパクトエルミート対称空間となる. 逆は成り立たないことは, [6] の分類よりわかる. そこで, 先ほど定義したエルミート対称空間から決まる位数 k の自己同型写像 σ_k が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_{σ_k} を考えるとカルタン埋め込み Ψ_{σ_k} が proper 2 重調和写像である必要十分条件は, $k = 4$ に限ることが計算によりわかる. よって, 次を得る:

定理 ([10]). $\Psi_{\sigma_k} : G/K \rightarrow G$ を proper 2 重調和写像とする. このとき, G/K は 4-対称空間に限る.

注意. 上記の定理で, σ の位数 k については, 有限性を仮定しておく.

8. 謝辞

2024 年 12 月東京理科大学森戸記念館における研究集会「部分多様体とリー群作用 2024」に講演の機会を頂いた東京理科大学理学部・小池直之教授と東京理科大学創域理工学部・田中真紀子教授に感謝申し上げます.

加えて, 井川治先生, 田中真紀子先生, このたびご還暦をお迎えになられたことに, 心よりお喜び申し上げます.

参考文献

- [1] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, 50, Amer. Math. Soc, (1983).
- [2] O. Ikawa and H. Tasaki, *Totally geodesic submanifold of maximal rank in symmetric spaces*, Japan. J. Math., 26 no. 1 (2000), 1–29.
- [3] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan. Vol.61, No.2 (2009), 437–481.
- [4] O. Ikawa, triality automorphism の場合の σ -作用の軌道の幾何学, 「部分多様体幾何とリー群作用 2022」記録集.
- [5] G. Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formula*, Chinese Ann. Math., 7A (1986), 388–402; Note di Mat., 28 (2009), 209–232.
- [6] J.A. Jiménez, *Riemannian 4-symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 715–734.
- [7] T. Kimura and K. Mashimo, *Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds*, Hokkaido Math J. vol. 51 (2022), 1–23.
- [8] T. Kimura and K. Mashimo, *Stability of certain Cartan embeddings*, a preprint.
- [9] T. Kimura and K. Mashimo, *Biharmonic Cartan embeddings*, a preprint.
- [10] T. Kimura and K. Mashimo, *Biharmonic Cartan embeddings associated with Hermitian symmetric spaces*, in preparation.
- [11] S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, *Bi-harmonic homogeneous hypersurfaces in compact symmetric spaces*, Differential geometry and its applications, 43(2015), 155–179.

- [12] K. Mashimo, *On the stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces*, Arch. Math., 58(1992), 500–508.
- [13] K. Mashimo, *Cartan embeddings of compact Riemannian 3-symmetric spaces*, Tokyo J. of Math. 19(1996), 353–364.
- [14] K. Mashimo, *Cartan embeddings of compact Riemannian 4-symmetric spaces*, a preprint.
- [15] J.A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I*, J Differential geometry 2 (1968), 77–114.
- [16] J.A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, II*, J Differential geometry 2 (1968), 115–159.