# 複素射影空間を定義域とする同変調和写像について[*1]

古賀　勇（九州国際大学）

## 1　導入

本稿の目的は複素射影空間 $\mathbf{C}P^m$ から複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ または四元数射影空間 $\mathbf{H}P^n$ への同変調和写像のモジュライ空間を構成することである．

複素射影空間間の同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{C}P^n$ について考える．充満な $\mathrm{SU}(m+1)$ 同変調和写像は大仁田 [10] によって完全に分類されている．次に $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像についてであるが，これは小林が [4] で考察しており，$\mathrm{Sp}(m+1)$ 既約表現空間から誘導される複素射影空間への同変調和写像を全て決定している．しかし小林の結果は複素射影空間間の全ての $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像の構成には至っていない．本稿第 2 節ではこのような写像を全て構成する．証明には一般化された do Carmo-Wallach 理論 [9] を用いる．

次に複素射影空間から四元数射影空間への $\mathrm{SU}(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ について考える．$m = 1$ の場合，[2]，[3] という独立した 2 つの結果がある．前者では Harmonic sequence と Moving frame の手法を，後者では $\mathrm{SU}(2)$ 軌道の分類というアプローチをとっているが，両者の結果は違いがある．本稿では [2] の結果を支持する．$m > 1$ の場合は剛性が成り立つことを示す．

最後に，非同変調和写像のモジュライ空間の研究の 1 つとして，3 次元球面 $S^3$ から $\mathbf{C}P^n$ への全実調和写像のモジュライ空間を構成する．

本稿の内容は長友康行氏（明治大学）との共同研究 [5, 6, 7, 8] に基づく．

## 2　複素射影空間から複素射影空間への調和写像

$\mathbf{C}^{n+1}$ を $n+1$ 次元複素線型空間，$\mathbf{C}P^n = \mathbf{P}(\mathbf{C}^{n+1})$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ の複素 1 次元部分空間全体のなす複素射影空間とする．$\mathbf{C}^{n+1}$ の標準内積 $(\cdot,\cdot)_{n+1}$ が自然に誘導する $\mathbf{C}P^n$ の Fubini-Study 計量を $g_{FS}$ とする．本節の目的は複素射影空間間の写像 $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{C}P^n$ のモジュライ空間の構成である．そのためにまず以下の用語を定義する．

**定義 2.1.** $M$ をリーマン多様体，$f : M \to \mathbf{C}P^n$ を写像とする．

[*1] 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2024」記録集原稿

(1) $f$ の像 $f(M)$ が任意の線型部分空間 $\mathbf{C}P^{n'} \subset \mathbf{C}P^n$ の部分集合とならないとき，$f$ は**充満**であるという．

(2) $M$ にリー群 $G$ が作用しているとする．ある群準同型 $\rho : G \to \mathrm{U}(n+1)$ が存在して任意の $g \in G$ と $x \in M$ に対して $f(gx) = \rho(g)f(x)$ が成り立つとき，$f$ を $G$ **同変写像**という．

**定義 2.2.** $f_1, f_2 : M \to \mathbf{C}P^n$ を充満な写像とする．ある等長変換 $\psi \in \mathrm{U}(n+1)$ が存在して $f_2 = \psi \circ f_1$ となるとき，$f_1$ と $f_2$ は**像同値**であるという．

## 2.1 誘導写像

$(M, g)$ をリーマン多様体，$L \to M$ を $M$ 上の複素直線束，$W^{n+1} \subset \Gamma(L)$ を $L \to M$ の大域切断のなす $n+1$ 次元複素線型空間とする．自明束 $\underline{W} = M \times W$ から $L \to M$ への束写像 $ev : \underline{W} \to L$，$ev_x(t) = t(x)$ を**評価写像**という．任意の $x \in M$ に対して評価写像 $ev_x : W \to L_x$ が全射のとき，$L \to M$ は $W$ で**大域的に生成されている**という．このとき $M$ から複素射影空間 $Gr_n(W) = \mathbf{P}(W^*)$ への写像 $f$ を

$$f(x) = \mathrm{Ker}\, ev_x$$

と定義する．これを $(L \to M, W)$ の**誘導写像**という．

逆に，$f : M \to \mathbf{C}P^n$ を写像とする．$\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^n$ を次数 1 の正則直線束とすると $H^0(\mathcal{O}(1)) = \mathbf{C}^{n+1^*}$ である．したがって $f$ による $\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^n$ の引き戻し束を $f^*\mathcal{O}(1) \to M$ とすると，線型写像 $F : \mathbf{C}^{n+1^*} \to \Gamma(f^*\mathcal{O}(1))$ が自然に定義される．ここで，写像 $f$ が充満であることと $F$ が単射であることは同値であることに注意しておく．$\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^n$ は同語反復束の双対であることに注意すると，$(f^*\mathcal{O}(1) \to M, \mathbf{C}^{n+1^*})$ の誘導写像は元の写像 $f$ と一致することがわかる．

高橋の定理の一般化 [9] から，以下のことがわかる．

**定理 2.3.** [9] $f : M \to \mathbf{C}P^n$ を写像とする．$(\mathcal{O}(1), \nabla^{\mathcal{O}(1)})$ を $\mathbf{C}P^n$ 上の次数 *1* の正則直線束と標準接続とし，$f$ による引き戻しを $(f^*\mathcal{O}(1), \nabla^{f^*\mathcal{O}(1)})$ とする．$\nabla^{f^*\mathcal{O}(1)}$ から定まるラプラシアンを $\Delta^{f^*\mathcal{O}(1)}$ とする．$f$ がエネルギー密度関数一定調和写像であるための必要十分条件は，$f$ が誘導する線型写像 $F : \mathbf{C}^{n+1^*} \to \Gamma(f^*\mathcal{O}(1))$ の像がある $\Delta^{f^*\mathcal{O}(1)}$ の固有空間 $W_\mu$ に含まれることである．

## 2.2 シンプレクティック群同変調和写像

偶数次元複素線型空間 $\mathbf{C}^{2m+2}$ にシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(m+1)$ の作用を考える．これは $\mathbf{C}P^{2m+1}$ への推移的作用 $\mathrm{Sp}(m+1) \curvearrowright \mathbf{C}P^{2m+1}$ を誘導する．充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$ のモジュライ空間を構成しよう．

$f : \mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$ を $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像とする．はじめに引き戻し直線束 $(f^*\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^{2m+1}, \nabla^{f^*\mathcal{O}(1)})$ について考える．

**命題 2.4.** [6] 等質直線束 $(f^*\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^{2m+1}, \nabla^{f^*\mathcal{O}(1)})$ は，ある整数 $k$ が存在して，次数 $k$ の正則直線束と標準接続の組 $(\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^{2m+1}, \nabla^k)$ とゲージ同値である．すなわち，接続を保つベクトル束の同型写像 $\phi : f^*\mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(k)$ が存在する．

$\mathbf{C}P^{m+1}$ 上の次数 $k$ の正則直線束 $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^{2m+1}$ の標準接続のなすラプラシアンを $\Delta^k$，$\Delta^k$ の $l+1$ 番目の固有空間を $\mathcal{H}(k,l)$ とする．命題 2.4 より，$\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像は $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^{2m+1}$ と $\mathcal{H}(k,l)$ の部分表現空間 $W$ の誘導写像として表すことができる．

**定義 2.5.** [6] $k$ を整数，$l$ を非負整数とする．正則直線束 $(\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^{2m+1}, \nabla^k)$ と線型空間 $W \subset \mathcal{H}(k,l)$ の誘導写像 $f : \mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{P}(W^*)$ を**双次数** $(k,l)$ **の調和写像**という．

$\mathbf{C}P^{2m+1}$ から $\mathbf{P}(\mathcal{H}(k,l)^*)$ への双次数 $(k,l)$ の充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像の像同値類全体のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}_{k,l}$ とする．

同変調和写像に対する一般化された do Carmo-Wallach の定理 [6] より，$\mathcal{M}_{k,l}$ は，$\mathcal{H}(k,l)$ 上の $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変正値エルミート準同型 $T : \mathcal{H}(k,l) \to \mathcal{H}(k,l)$ で $ev \circ T^2 \circ ev^* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(k)}$ を満たすもの全体の集合と同一視できる．ここで $ev : \underline{\mathcal{H}(k,l)} \to \mathcal{O}(k)$ は評価写像である．

## 2.3 大域切断の空間の $\mathrm{Sp}(m+1)$ 既約分解

$\mathbf{C}P^{2m+1}$ 上の次数 $k$ の大域切断の空間は $\mathrm{SU}(2m+2)$ 表現空間として次のように既約分解される：

$$\Gamma(\mathcal{O}(k)) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}(k,l).$$

一方，小林 [4] により $\mathrm{Sp}(m+1)$ 既約分解も知られている．

**命題 2.6.** [4] $\varpi_i$ をリー代数 $\mathfrak{sp}(m+1)$ の基本ウェイトとする．ただし番号づけは *Bourbaki* に従う．支配的整ウェイト $\varpi$ を最高ウェイトとする $Sp(m+1)$ の既約ユニタリ表現を $F_{m+1}(\varpi)$ とする．この時 $\Gamma(\mathcal{O}(k))$ の $Sp(m+1)$ 既約分解は次のようになる：

$$\Gamma(\mathcal{O}(k)) = \bigoplus_{i,j=0}^{\infty} F_{m+1}((k+2j)\varpi_1 + i\varpi_2).$$

小林 [4] は上の命題を用いて $\mathrm{Sp}(m+1)$ 既約表現空間から得られる同変調和写像を全て構成し，そのエネルギー密度関数も求めている．一般化された高橋の定理より，エネルギー密度関数は引き戻された直線束のラプラシアンの固有値と関係する．この関係から次の結果を得る．

**補題 2.7.** [6] $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^{2m+1}$ の標準接続のなすラプラシアンの固有空間 $\mathcal{H}(k,l)$ は $Sp(m+1)$ 表現空間として次のように既約分解される：

$$\mathcal{H}(k,l) = \bigoplus_{j=0}^{l} F((k+2j)\varpi_1 + (l-j)\varpi_2)$$

$F_{k,l,j} = F((k+2j)\varpi_1 + (l-j)\varpi_2)$ とおく．これまでの考察から次の結果を得る．

**定理 2.8.** [7] 像同値を法とする双次数 $(k,l)$ の充満な $Sp(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{P}(\mathcal{H}(k,l)^*)$ のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{k,l}$ とする．$\mathcal{M}_{k,l}$ の位相を $\mathcal{H}(k,l)$ 上のエルミート準同型全体のなす空間 $H(\mathcal{H}(k,l))$ の相対位相として定義し，閉包を $\overline{\mathcal{M}_{k,l}}$ とする．このとき次の同一視を得る．

$$\overline{\mathcal{M}_{k,l}} = \left\{ (x_0, \cdots, x_l) \in \mathbf{R}^{l+1} \;\middle|\; x_j \geqq 0,\ \sum_{j=0}^{l} (\dim F_{k,l,j}) x_j^2 = \dim \mathcal{H}(k,l) \right\}$$

注意 2.9.
(1) 双次数 $(k,l)$ の $\mathrm{SU}(2m+2)$ 同変調和写像は $(1,1,\cdots,1) \in \mathbf{R}^{l+1}$ である．
(2) $x_0, \cdots, x_l$ がある 1 つを除いて 0 のとき，対応する写像は小林の写像である．

# 3 複素射影空間から四元数射影空間への調和写像

$\mathbf{H}^{n+1}$ を $n+1$ 次元四元数線型空間，$\mathbf{H}P^n$ を四元数射影空間，$\mathbf{H} \to \mathbf{H}P^n$ を $\mathbf{H}P^n$ の同語反復束とする．

リーマン多様体 $M$ から $\mathbf{H}P^n$ への写像 $f : M \to \mathbf{H}P^n$ が**充満**であるとは $f(M)$ が任意の線型部分空間 $\mathbf{H}P^{n'} \subset \mathbf{H}P^n$ の部分集合にならないことであり，$f$ が $G$ **同変写像**であ

るとは，$M$ に作用するリー群 $G$ に対してリー群の準同型 $\rho : G \to \mathrm{Sp}(n+1)$ が存在して，$g \in G$，$x \in M$ に対して $f(gx) = \rho(g)f(x)$ が成り立つときにいう．これらは終域が複素射影空間の場合の定義（定義 2.1）を書き換えたものである．写像 $f_1, f_2 : M \to \mathbf{H}P^n$ に対してある等長変換 $\psi \in \mathrm{Sp}(n+1)$ が存在して $f_2 = \psi \circ f_1$ が成り立つ時に $f_1$ と $f_2$ は**像同値**であるというのも同様である．

複素射影空間 $\mathbf{C}P^m$ から $\mathbf{H}P^n$ への $\mathrm{SU}(m+1)$ 同変調和写像 $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ を考える．$\mathbf{H}P^n$ 上の同語反復束 $\mathbf{H} \to \mathbf{H}P^n$ の自明束 $\underline{\mathbf{H}^{n+1}} \to \mathbf{H}P^n$ への自然な包含写像 $i : \mathbf{H} \to \underline{\mathbf{H}^{n+1}}$ を $f$ で引き戻すと $\mathbf{C}P^m$ 上の四元数ベクトル束とその間の束写像 $i : f^*\mathbf{H} \to \underline{\mathbf{H}^{n+1}} = \mathbf{C}P^m \times \mathbf{H}^{n+1}$ を得る．ここで係数体を複素数 $\mathbf{C}$ に制限すると，$\mathbf{H}^{n+1} \cong \mathbf{C}^{2n+2}$ は四元数構造 $J$ を持つ $2n+2$ 次元複素線型空間，$f^*\mathbf{H} \to \mathbf{C}P^m$ は四元数構造 $j_{\mathbf{H}}$ をもつ階数 2 の複素等質ベクトル束とみなすことができ，束写像 $i$ は 2 つの四元数構造を保つ．また四元数構造 $j_{\mathbf{H}}$ から，ベクトル束 $f^*\mathbf{H} \to \mathbf{C}P^m$ は次数 0 であることもわかる．係数体の制限により $\mathbf{H}P^n$ から階数 2 の複素グラスマン多様体 $Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ への全測地的埋め込み $\iota : \mathbf{H}P^n \to Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ を得る．

我々は四元数射影空間への同変調和写像を分類するために，それと階数 2 の複素グラスマン多様体への同変調和写像の間の関係に注目する．階数 2 の複素グラスマン多様体 $Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ の同語反復束を $S \to Gr_n(\mathbf{C}^{2n+2})$ とすると，これは自明束 $\underline{\mathbf{C}^{2n+2}}$ の部分束である．したがって双対をとることで束写像 $\pi_{S^*} : \underline{\mathbf{C}^{2n+2^*}} \to S^*$ を得る．写像 $f : \mathbf{C}P^m \to Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ でこれを引き戻すと $\pi_{S^*} : \mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}^{2n+2^*} \to f^*S^*$ を得るが，これにより $\mathbf{C}^{2n+2^*}$ を $\Gamma(f^*S^*)$ の部分空間とみなす．$S \to Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ の標準接続 $\nabla^S$ の誘導する $f^*S^* \to \mathbf{C}P^m$ の接続を $\nabla^{f^*S^*}$，そのラプラシアンを $\Delta^{f^*S^*}$ とする．

**命題 3.1.** [5] $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ を *SU*$(m+1)$ 同変調和写像とすると，$\iota \circ f : \mathbf{C}P^m \to Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ は次数 *0* の *SU*$(m+1)$ 同変調和写像で，任意の $t \in \mathbf{C}^{2n+2^*}$ に対して $\Delta^{f^*S^*}t = \dfrac{e(f)}{4}t$ が成り立つ．ここで $e(f)$ は $f$ のエネルギー密度関数を表す．

**命題 3.2.** [5] $\tilde{f} : \mathbf{C}P^m \to Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ を次数 *0* の *SU*$(m+1)$ 同変調和写像とし，任意の $t \in \mathbf{C}^{2n+2^*}$ に対して $\Delta^{\tilde{f}^*S^*}t = \dfrac{e(\tilde{f})}{4}t$ が成り立つとする．ベクトル束 $f^*S^* \to \mathbf{C}P^m$ と線型空間 $\mathbf{C}^{2n+2^*}$ に四元数構造 $j$，$J$ で $\pi_{S^*} \circ J = j \circ \pi_{S^*}$ を満たすものが存在するとき，$Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ の全測地的部分多様体 $\iota : \mathbf{H}P^n \subset Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ と *SU*$(m+1)$ 同変調和写像 $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ で，$\tilde{f} = \iota \circ f$ が成り立つものが取れる．

このことから，まず $Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ を終域とする次数 0 の $\mathrm{SU}(m+1)$ 同変調和写像を分

類する．複素射影空間への誘導写像の場合と同様にして，$\mathbf{C}P^m$ 上の階数 2 のベクトル束 $V \to \mathbf{C}P^m$ とそれを大域的に生成する大域切断の空間 $W \subset \Gamma(V)$ の誘導写像として表すことにする．

始域が複素射影直線 $\mathbf{C}P^1$ の場合は [6] ですでに分類されている．この場合，正則直線束のラプラシアンの固有空間 $\mathcal{H}(k,l)$ は SU(2) 表現空間として

$$\mathcal{H}(k,l) \cong \mathcal{H}(-k,l) \cong S^{k+2l}\mathbf{C}^2, \quad k \geqq 0$$

となることを用いる．

以下の定理で現れる大域切断の空間には $L^2$ 内積を定めておく．

**定理 3.3.** [5, 6] *以下の写像は全て複素射影直線 $\mathbf{C}P^1$ を始域とする $SU(2)$ 同変調和写像であり，逆に $\mathbf{C}P^1$ から階数 2 の複素グラスマン多様体 $Gr_2(\mathbf{C}^{n+2})$ への充満な $SU(2)$ 同変調和写像は以下のいずれかと像同値である．*

*(1)* $k > 0$，$l \geqq 0$ とする．$\big(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2\big)$ の誘導写像 $\tilde{f}_\Delta$.

*(2)* $k, l \geqq 0$ とする．$\big(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2\big)$ の誘導写像 $f_0$.

*(3)* *(2)* の状況のもとで $0 < c < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2} & c \\ c & \sqrt{1-c^2} \end{pmatrix} \in End(S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ とする．$\tilde{f}_c = T^{-1}\tilde{f}_0$,

始域が複素 2 次元以上の複素射影空間の場合，写像の剛性が成り立つ．

**定理 3.4.** [5] *$m \geqq 2$，$k, l \geqq 0$ とする．複素ベクトル束 $\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^m$ とラプラシアンの固有空間 $\mathcal{H}(-k,l) \oplus \mathcal{H}(k,l)$ の誘導写像は次数 0 の $SU(m+1)$ 同変調和写像であり，逆に任意の充満な次数 0 の $SU(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \to Gr_2(\mathbf{C}^{2m+2})$ はそのいずれかに像同値である．*

上記の定理に現れるベクトル束と大域切断の空間に定まる四元数構造を考える．始めに $\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^m$，$m \geqq 1$ の四元数構造について考える．等質ベクトル束として $\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k) = \mathrm{SU}(m+1) \times_{\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(m))} \mathbf{C}_k \oplus \mathbf{C}_{-k}$ である．ここで $\mathbf{C}_k$，$\mathbf{C}_{-k}$ はそれぞれ $\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(m))$ の中心 $\mathrm{U}(1)$ のウェイト $k$，$-k$ の 1 次元既約表現である．$\mathbf{C}_k$ と $\mathbf{C}_{-k}$ は互いに双対の関係にあるから，四元数構造 $j_{f^*S^*}$ を

$$j_{f^*S^*}(v_k, v_{-k}) = \big(h(\ \cdot\ , v_{-k}), h(\ \cdot\ , v_k)\big), \quad v_k \in \mathbf{C}_k,\ v_{-k} \in \mathbf{C}_{-k}$$

と定義することができる．$\mathrm{SU}(m+1)$ 不変な四元数構造はこれに限る．

次に大域切断の空間に定まる四元数構造について考える．$m=1$ と $m \geqq 2$ で場合分けする．$m=1$ のとき，$\mathbf{C}^2$ は SU(2) 不変四元数構造を持つので，$S^{k+2l}\mathbf{C}^2$ は，$k+2l$ が奇数の時不変四元数構造 $j$ を，$k+2l$ が偶数の時は不変実構造 $\sigma$ を持つ．このことから $S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2$ に不変四元数構造 $J$ を，$k+2l$ が奇数の時は $J(w_1,w_2)=(jw_2,jw_1)$ として，$k+2l$ が偶数の時は $J(w_1,w_2)=(-\sigma(w_2),\sigma(w_1))$ として定めることで $\pi_{S^*}\circ J = j_{f^*S^*}\circ \pi_{S^*}$ が成り立つ．以上と命題 3.2 から次の定理を得る．

**定理 3.5.** [5] 以下の写像は全て $\mathbf{C}P^1$ を始域とする $SU(2)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^1 \to \mathbf{H}P^n$ であり，逆に $f:\mathbf{C}P^1 \to \mathbf{H}P^n$ を充満な $SU(2)$ 同変調和写像とすると，$f$ は以下のいずれかと像同値である．ただし，以下の記号ではベクトル束と線型空間は適切な四元数構造を持つとする．

*(1)* $k$ は 0 より大きい奇数，$l \geqq 0$ とする．$\left(\mathcal{O}(-k)\oplus\mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2\right)$ の誘導写像 $f_\Delta$.

*(2)* $k,l \geqq 0$ とする．$\left(\mathcal{O}(-k)\oplus\mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2\oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2\right)$ の誘導写像 $f_0$.

*(3)* *(2)* のもとでさらに $k$ を奇数，$0<c<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする．$T=\begin{pmatrix}\sqrt{1-c^2} & c\\ c & \sqrt{1-c^2}\end{pmatrix}\in End(S^{k+2l}\mathbf{C}^2\oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ とする．$f_c = T^{-1}f_0$.

**定理 3.6.** [5] $m \geqq 2$，$k,l \geqq 0$ とする．複素ベクトル束 $\mathcal{O}(-k)\to\mathcal{O}(k)\to\mathbf{C}P^m$ とラプラシアンの固有空間 $\mathcal{H}(-k,l)\oplus\mathcal{H}(k,l)$ に上述の四元数構造 $j_{f^*S^*}$ と $J$ をそれぞれ定める．このとき $(\mathcal{O}(-k)\oplus\mathcal{O}(k),\mathcal{H}(-k,l)\oplus\mathcal{H}(k,l))$ の誘導写像は終域を四元数射影空間とする充満な $SU(m+1)$ 同変調和写像である．

逆に任意の充満な $SU(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ は上記の写像のいずれかと像同値である．

# 4 非同変調和写像のモジュライ空間の構成

最後に，非同変調和写像のモジュライ空間の構成の例として標準計量をもつ 3 次元球面 $(S^3, g_{std})$ から複素射影空間 $(\mathbf{C}P^n, g_{FS})$ への全実調和写像のモジュライ空間の構成について述べる．

3 次元球面を等質空間として $S^3=\mathrm{SU}_+(2)\times\mathrm{SU}_-(2)/\mathrm{SU}_\Delta(2)$ とする．$\mathrm{SU}_\bullet(2)$ の既約表現空間を $S^l\mathbf{C}^2_\bullet$ と表すことにする．このとき $S^3$ 上の $C^\infty$ 関数空間 $C^\infty(S^3)$ は

$\mathrm{SU}_+(2)\times\mathrm{SU}_-(2)$ 表現空間として

$$C^\infty(S^3)=\bigoplus_{l=0}^{\infty}S^l\mathbf{C}^2_+\otimes S^l\mathbf{C}^2_-=\bigoplus_{l=0}^{\infty}\mathcal{H}^l$$

と既約分解される．これはラプラシアンの固有空間分解と一致する．

3 次元球面 $S^3$ から $\mathbf{C}P^n$ への充満な全実調和写像を $f:S^3\to\mathbf{C}P^n$ とすると，全実より $f^*\mathcal{O}(1)=\underline{\mathbf{C}}$ で，一般化された髙橋の定理から $\mathbf{C}^{n+1^*}$ はある $\mathcal{H}^l$ の部分空間である．この時の $f$ を**次数 $l$ の調和写像**の調和写像と呼ぶことにする．

$S^3$ から $\mathbf{P}(\mathcal{H}^{l^*})$ へのエネルギー密度関数一定, 全実, 充満, 次数 $l$ の調和写像の像同値類全体のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}_l$ とする．一般化された do Carmo-Wallach の定理より，$\mathcal{M}_l$ は半正値エルミート準同型 $T:\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l$ で $ev\circ T^2\circ ev^*=\mathrm{id}_{\underline{\mathbf{C}}}$, $ev\circ T^2\circ(\nabla ev^*)=0$ を満たすもの全体の集合と同一視できる．$ev:\underline{\mathcal{H}^l}\to\underline{\mathbf{C}}$ は評価写像である．このことから以下の定理を得る．

**定理 4.1.** [8] *標準計量をもつ 3 次元球面 $S^3$ から Fubini-Study 計量をもつ複素射影空間 $\mathbf{P}(\mathcal{H}^l)$ へのエネルギー密度関数一定，全実，充満な調和写像のモジュライ空間を $\mathcal{M}_l$ とする．$\mathcal{M}_l$ の位相を $\mathcal{H}^l$ のエルミート準同型全体の集合 $H(\mathcal{H}^l)$ の相対位相として定義し，閉包を $\overline{\mathcal{M}_l}$ とすると，*

$$\overline{\mathcal{M}_l}=\left\{C\in\bigoplus_{a,b=0,|a-b|\geqq 2}^{l}S^{2a}\mathbf{C}^2_+\otimes S^{2b}\mathbf{C}^2_-\;\middle|\;id_{\mathcal{H}^l}+C\ \text{:半正値}\right\}\tag{1}$$

*が成り立つ．*

注意 4.2. 式 (1) の右辺では $H(\mathcal{H}^l)$ を $\mathrm{SU}_+(2)\times\mathrm{SU}_-(2)$ 表現空間として既約分解し，その部分集合として記述している．詳細は [8] に譲る．

注意 4.3. モジュライ空間 $\mathcal{M}_l$ を $\mathcal{H}^l$ の半正値エルミート準同型全体の集合の部分集合と同一視する際，条件として

$$ev\circ T^2\circ(\nabla ev^*)=0$$

も考察したが，これは $\underline{\mathbf{C}}\to S^3$ と $W\subset\mathcal{H}^l$ の誘導写像 $f:S^3\to\mathbf{P}(W^*)$ による引き戻し束 $(f^*\mathcal{O}(1)\to S^3,\nabla^{f^*\mathcal{O}(1)})$ が $(\underline{\mathbf{C}}\to S^3,d)$ とゲージ同値であるための条件である（$d$ は外微分を表す）．第 2 節においてモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k,l}$ を $\mathcal{H}(k,l)$ の半正値エルミート準同型全体の集合の部分集合と同一視するときにこの条件を考慮しなかったのは，第 2 節では写像は $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変であると仮定されており，この場合 $\mathcal{O}(k)\to\mathbf{C}P^m$ と $W\subset\mathcal{H}(k,l)$

の誘導写像 $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{P}(W^*)$ による引き戻し束 $(f^*\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^m, \nabla^{f^*\mathcal{O}(1)})$ は自動的に $(\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^m, \nabla^k)$ とゲージ同値になるからである.

# 参考文献


[1] M. P. do Carmo and N. R. Wallach, *Minimal immersions of spheres into spheres*, Ann. Math., **93** (1971), 43 – 62.

[2] J. Fei and L. He, *Classification of Homogeneous Minimal Immersions from $S^2$ to $\mathbf{H}P^n$*, Ann. Mat. Pura Appl., **196** (2017), 2213 – 2237.

[3] J. Fei, C. Peng and X. Xu, *Minimal Two-spheres with Constant Curvature in the Quaternionic Projective Space*, Sci. China Math., **63** (2020), 993 – 1006.

[4] T. Kobayashi, *$Sp(n)$-equivariant Harmonic Maps between Complex Projective Spaces*, Tsukuba J. Math., **20** (1996), 123 – 136.

[5] I. Koga and Y. Nagatomo, *Equivariant harmonic maps of the complex projective spaces into the quaternion projective spaces*, Differ. Geom. Appl., **96** (2024), 102167.

[6] I. Koga and Y. Nagatomo, *Equivariant Harmonic Maps of the Complex Projective Line into Complex Grassmannians of Rank Two*, to appear in Tsukuba Journal of Mathematics.

[7] I. Koga and Y. Nagatomo, *The Classification of Equivariant Harmonic Maps between Complex Projective Spaces under the Symplectic Group*, submitted.

[8] I. Koga and Y. Nagatomo, *Harmonic Totally Real maps of the 3-sphere into the Complex Projective Spaces*, to appear in Osaka Journal of Mathematics.

[9] Y. Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmannian manifolds*, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan.

[10] Y. Ohnita, *Homogeneous Harmonic Maps into Complex Projective Spaces*, Tokyo J. Math., **13** (1990), 104 – 116.