

3 次元 naturally reductive 等質空間の等質構造

大野 優 (北海道大学)*

概 要

Naturally reductive 等質空間は、リーマン対称空間の一般化であり、原点を通る測地線がリー環の指数写像による作用の軌道になるという重要な性質を持つ。特に、3 次元 naturally reductive 等質空間は、等長群の次元が 6 または 4 であり、完全に分類されている。一方、リーマン多様体の等質性は、Ambrose と Singer によって、等質構造と呼ばれる特別なテンソルの存在によって特徴づけられている。さらに、特別な状況においては、等質構造を用いることで、リーマン多様体の商空間表示を完全に分類できる。本講演において、等長群の次元が 4 である 3 次元 naturally reductive 等質空間の等質構造を分類し、それを用いて商空間表示を決定したことを報告した。特に、2 次元特殊線形群 $SL(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆群について、非自明な等質空間表示が存在した。

1 等質リーマン構造

リーマン多様体 (M, g) が等質であるとは、あるリー群 G がそのリーマン多様体に等長的かつ推移的に作用することを意味する。リーマン多様体 (M, g) 上の任意の 2 点 $p, q \in M$ に対し、 $\phi(p) = q$ となる局所等長変換 ϕ が存在するとき、リーマン多様体 (M, g) を局所等質リーマン多様体と呼ぶ。リーマン多様体 (M, g) が等質であるとき、 H をある点 $o \in M$ での G の作用に関する固定部分群とすると、商空間表示 $M \cong G/H$ が得られる。ここで、等質リーマン多様体 (M, g) の商空間表示は一意的でないことに注意する。

例 1 3 次元球面 S^3 は対称空間としての商空間表示 $S^3 \cong SO(4)/SO(3)$ を持つ。一方、 S^3 には特殊ユニタリ群 $SU(2)$ が単純推移的に作用するため、商空間表示 $S^3 \cong SU(2)/\{e\}$ を持つ。

ここで、 $M \cong G/H$ を等質空間とし、 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をそれぞれ G, H のリー環とする。ここで、リー群 H は単連結であると仮定する。このとき、等質空間が reductive であるとは、ある $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{m}$ が存在し、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ かつ $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ を満たすことを指し、この時 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ を reductive 分解と呼ぶ。等質空間 $M \cong G/H$ が reductive であり、その reductive 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ とすると、射影 $\pi: G \rightarrow G/H$ の微分写像によって、接空間 $T_o M$ と線形部分空間 $\mathfrak{m}$ が同一視される。等質リーマン多様体 (M, g) は reductive である

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学大学院理学院数学専攻

e-mail: ono.yu.h4@elms.hokudai.ac.jp

The first named author is partially supported by the establishment of university fellowships towards the creation of science technology innovation, Grant Number JPMJFS2101.

ことが知られている. 一方で, 等質リーマン多様体 (M, g) で reductive でないようなものが存在する.

一般に, 与えられたリーマン多様体が等質であるかどうかを直接示すのは難しい. 一方, リーマン多様体の等質性を特徴づける以下の定理が, Ambrose と Singer によって与えられている.

定理 1.1 (Ambrose-Singer) リーマン多様体 (M, g) が完備かつ単連結であるとする. この時, 以下は同値である:

- (1) リーマン多様体 (M, g) は等質である.
- (2) あるアファイン接続 $\tilde{\nabla}$ が存在し,

$$\tilde{\nabla}g = 0, \quad \tilde{\nabla}R = 0, \quad \tilde{\nabla}S = 0 \quad (1.1)$$

を満たす.

ここで, R はリーマン曲率であり, S はアファイン接続 $\tilde{\nabla}$ と Levi-Civita 接続 ∇ との差テンソル $S = \tilde{\nabla} - \nabla$ である.

この定理のアファイン接続 $\tilde{\nabla}$ を **Ambrose-Singer 接続** と呼び, $(1,2)$ -テンソル場 S を **等質リーマン構造** と呼ぶ.

例 2 (リーマン対称空間) リーマン多様体 (M, g) の局所対称性は, 曲率テンソルの平行性 $\nabla R = 0$ で特徴付けられている. このことから, 単連結リーマン対称空間は $S = 0$ をリーマン等質構造として持つことがわかる. 特に, リーマン対称空間は, 完備な等質空間である.

例 3 (リーマンリー群) リー群 G と, その上の左不変計量 g の組 (G, g) で得られるリーマン多様体を取る. これは, リーマン等質空間であり, ここでは **リーマンリー群** と呼ぶ. リー群 G の単位元を e と書くと, リーマンリー群 (G, g) は商空間表示 $G \cong G/\{e\}$ を持つ. さらに, この商空間表示に対する Ambrose-Singer 接続は,

$$\tilde{\nabla}_X Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

である. この接続 $\tilde{\nabla}$ は **Cartan-Schouten (-) 接続** と呼ばれる.

Ambrose と Singer による定理の証明は構成的である. すなわち, 等質リーマン多様体の reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ から Ambrose-Singer 接続 $\tilde{\nabla}$ を構成し, 逆に, Ambrose-Singer 接続 $\tilde{\nabla}$ から reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ を構成する. 以下で, Ambrose と Singer による構成法を具体的に簡単に述べる.

まず, リーマン多様体 (M, g) が等質であるとする. この時, reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ が存在する. この reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ から **cannonical 接続** $\tilde{\nabla}$ が

$$(\tilde{\nabla}_{X^*} Y^*)_o = -([X, Y]_{\mathfrak{m}})^*_o, \quad X, Y \in \mathfrak{m}$$

で定義される. ただし, X^* は $X \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$X_p^* = \left. \frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot p \right|_{t=0}$$

で定義される M 上のベクトル場である. この接続 $\tilde{\nabla}$ は式 (1.1) を満たし, 特に, Ambeose-Singer 接続である.

逆に, リーマン多様体の上に等質構造テンソル S が存在すると仮定する. この時, $\mathfrak{h}$ を $\tilde{\nabla} = \nabla + S$ のホロノミー代数とする. (つまり, $\tilde{R}(X, Y) \in \mathfrak{h}$ であり, $\tilde{R}$ は $\tilde{\nabla}$ の曲率テンソルである). リー代数 $\mathfrak{h}$ に対応する単連結リー群 $\tilde{H}$ を取る. ここで, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus T_o M$ 上にカッコ積 $[\cdot, \cdot]$ を

$$\begin{aligned} [U, V] &= UV - VU, \\ [U, X] &= U(X), \\ [X, Y] &= -\tilde{R}(X, Y) - S_X Y + S_Y X, \end{aligned}$$

で定義すれば, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus T_o M$ はリー環となり, 特に, $[\mathfrak{h}, T_o M] \in T_o M$ である. ($X, Y \in T_o M$, $U, V \in \mathfrak{h}$). $\mathfrak{g}$ に対応する単連結リー群 $\tilde{G}$ をとれば, $G = \tilde{G}/\Gamma$, $H = \tilde{H}/\Gamma$ かつ $M = G/H$ とでき, 特に, (M, g) が等質リーマン多様体であることがわかる.

この等質リーマン構造と reductive 分解の対応は一对一でないことに注意する. 特に, 異なる商空間表示から同型な等質リーマン構造が得られる場合がある.

例 4 ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の等質リーマン構造として $S = 0$ のみであることがわかる. 一方で, $\mathbb{R}^2$ は, 対称空間としての表示 $\mathbb{R}^2 = \text{SE}(2)/\text{SO}(2)$ と, 可換リー群としての表示 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2/\{0\}$ の 2 つの商空間表示を持つ.

このことから, 等質リーマン構造のみから, 商空間表示および reductive 分解をすべて分類することはできず, ケースバイケースでの議論が必要である.

2 次元等質リーマン多様体 (M, g) に関して, 以下の定理が Tricherri と Vanhecke によって示されている.

定理 1.2 (Tricherri-Vanhecke) 2 次元等質リーマン多様体 (M, g) が 0 ではない等質リーマン構造を持つとする. この時, (M, g) は負の定曲率空間である. 特に, (M, g) が単連結の場合は, (M, g) は双曲空間 $\mathbb{H}^2$ と同型である.

この定理における, 0 でない等質リーマン構造 S は, $\mathbb{H}^2 = \{x + yi \in \mathbb{C} | y > 0\}$ の可解リー群表示

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| y > 0 \right\}$$

と対応する. このリー群を $\text{GA}^+(1)$ と書く. 対応する商空間表示は $\mathbb{H}^2 \cong \text{GA}^+(1)/\{e\}$ である.

2 Naturally reductive 等質空間

等質リーマン多様体の重要な例である, naturally reductive 等質空間の定義を以下で与える.

定義 2.1 等質リーマン多様体 (M, g) が **naturally reductive 等質空間** であるとは, ある reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ が存在し, $o \in M$ を通り, $X \in \mathfrak{m} \cong T_o M$ に接する測地線 $\gamma(t)$ が,

$$\gamma(t) = (\exp tX) \cdot o$$

と表せることをいう. また, このような reductive 分解のことを, **naturally reductive 分解** と呼ぶ.

Naturally reductive 等質空間は, 等質リーマン構造によって特徴付けられている.

定理 2.2 (Tricherri-Vanhecke) 等質リーマン多様体 (M, g) に対し, 次は同値である:

(1) (M, g) 上の等質リーマン構造 S で,

$$S_X Y + S_Y X = 0$$

を満たすものが存在する.

(2) (M, g) は naturally reductive 等質空間である.

リーマン対称空間は $S = 0$ を等質リーマン構造にもつことに注意すれば, この定理から, リーマン対称空間は naturally reductive であることがわかる.

3 次元 naturally reductive 等質空間は Tricherri と Vanhecke によって以下のように分類されている.

定理 2.3 (Tricherri-Vanhecke) 3 次元等質リーマン多様体 (M, g) が naturally reductive であるとき, 次のいずれかと同型である:

- (1) リーマン対称空間 $S^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ ($d = 6$), $S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ($d = 4$).
- (2) ハイゼンベルグ群 Nil_3 ($d = 4$).
- (3) Berger 球面 ($d = 4$).
- (4) 普遍被覆群 $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ ($d = 4$).

ここで, d はリーマン多様体の等長群の次元である.

3 3 次元 naturally reductive 等質空間の等質構造

この章では, 定理 2.3 で分類された 3 次元 naturally reductive 等質空間の等質リーマン構造およびその商空間表示を分類したことを説明する.

まず, 先行研究について述べる. 空間形 $S^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ の等質リーマン構造および商空間表

示は 1986 年に岡山大の阿部貢士によって分類された [1]. さらに, ハイゼンベルグ群 Nil_3 に関して Tricherri と Vanhecke が [7], Berger 球面に関して Gadea と Oubiña が [3], それぞれ等質構造と商空間表示を分類している.

積多様体 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ に関して, 等質リーマン構造と商空間表示を分類した. 以下, $(1,2)$ -テンソル S に対し, $(0,3)$ -テンソル S_b を $S_b(X, Y, Z) = g(S_X Y, Z)$ で定義する.

定理 3.1 ([6]) 積多様体 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ の商空間表示は $(\text{SO}(3) \times \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ のみであり, reductive 分解は

$$\mathfrak{m}_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda w & v & 0 \\ -\lambda w & 0 & u & 0 \\ -v & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} \right\}$$

によって与えられる. 等質リーマン構造は

$$S_b^\lambda = \lambda(dz \otimes dV_{\mathbb{S}^2}), \quad (\lambda \geq 0)$$

で与えられる. この reductive 分解は $\lambda = 0$ のときのみ naturally reductive であり, 特に対称空間の商空間表示と対応する.

ここで, $\mathbb{S}^2$ および $\mathbb{R}$ の等質リーマン構造は $S = 0$ のみであることに注意する.

定理 3.2 ([6]) 積多様体 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(w = x + yi, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} | y > 0\}$ の商空間表示は

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} &\cong \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}/\text{SO}(2), \\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} &\cong \text{GA}^+(1) \times \mathbb{R}/\{e\} \end{aligned}$$

の 2 種類存在する. 対応する等質リーマン構造はそれぞれ

$$\begin{aligned} S_b^\lambda &= \lambda(dz \otimes dV_{\mathbb{H}^2}) \quad (\lambda \geq 0) \\ S_b &= \frac{dx}{y} \otimes dV_{\mathbb{H}^2} \end{aligned}$$

である. 対応する reductive 分解は $\lambda = 0$ のときのみ naturally reductive であり, 特に対称空間の商空間表示と対応する.

普遍被覆群 $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ の場合に関しても, 等質リーマン構造と商空間表示を分類した. ここで, $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ のリー環 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ で,

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2$$

を満たし, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ かつ $\lambda_3 > 0$ となるようなものを取れる. さらに, $\{e_1, e_2, e_3\}$ の双対基底を $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ とする.

定理 3.3 ([4]) $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ の等質リーマン構造は

$$S_b^t = 2t\theta^3 \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) - \lambda_3\theta^1 \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) - \lambda_3\theta^2 \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1)$$

および

$$S_b = 2\rho \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) - \lambda_3\theta^1 \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) - \lambda_3\theta^2 \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1)$$

の 2 種類である. ただし, ρ は

$$\rho = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3} \cos \phi \theta^1 + \sqrt{-\lambda_1\lambda_3} \sin \phi \theta^2 + \frac{\lambda_3}{2} \theta^3,$$

を満たす 1 形式であり, ϕ は $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ 上のある関数である. 普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ の商空間表示は以下の通りである:

- (1) $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2))/\mathrm{SO}(2)$. 対応する等質リーマン構造は S^t で $t \neq -\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}$ のとき. $t = -\frac{\lambda_3}{2}$ のときのみ naturally reductive.
- (2) $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\{e\}$. 対応する等質リーマン構造は $t = -\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}$ のとき. $\tilde{\nabla} = \nabla + S^{-\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}}$ は, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ の Cartan-Schouten $(-)$ 接続である.
- (3) $\mathrm{GA}^+(1) \times \mathbb{R}/\{e\}$. 対応する等質リーマン構造は S . $\tilde{\nabla} = \nabla + S$ は $\mathrm{GA}^+(1) \times \mathbb{R}$ の Cartan-Schouten $(-)$ 接続である.

この定理に関して, 2 つ注意を述べる. まず, 2023 年に 3 次元リーマンリー群の等質構造に関する論文 [2] が出たが, 普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ の場合の (3) のケースが抜けていた. これは, 等質リーマン構造にリー群作用に関する左不変性を仮定していたためである. 実際, (3) のケースの等質リーマン構造 S は左不変ではない. また, 普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ はユニモデュラーであるが, $\mathrm{GA}^+(1) \times \mathbb{R}$ は非ユニモデュラーであり, 互いにリー群として同型でない. 一方, リーマン多様体としては互いに等長的である.

先行研究と, 定理 3.1, 3.2, 3.3 を合わせて, 3 次元 naturally reductive 等質空間の等質リーマン構造と商空間表示の分類を得る.

参考文献

- [1] Abe, K., The classification of homogeneous Riemannian structures on 3-dimensional space forms, *Math. J. Okayama Univ.* **28** (1986), no. 1, 173–189.
- [2] Calviño-Louzao, E., Ferreiro-Subrido, M., García-Río, E. and Vázquez-Lorenzo, R., Homogeneous Riemannian structures in dimension three, *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.* **117** (2023), 70.
- [3] Gadea, P. M. and Oubiña, J. A., Homogeneous Riemannian structures on Berger 3-spheres, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **48** (2005), no. 2, 375–387.
- [4] J. Inoguchi, Y. Ohno; Homogeneous structures of 3-dimensional Sasakian space forms, *Tsukuba J. Math.*, to appear.
- [5] J. Inoguchi, Y. Ohno; Inoguchi, J. and Ohno, Y., Homogeneous structures of 3-dimensional Lie groups, preprint.

- [6] Y. Ohno; Homogeneous structures on $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ and $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, Tsukuba J. Math. **47** (2023), no. 2, 239–246.
- [7] Tricerri, F. and Vanhecke, L., *Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds*, Lecture Notes Series, London Math. Soc. **52**, (1983), Cambridge Univ. Press.