概アーベルリー群上のリッチ平坦左不変ローレンツ計量

佐藤 雄一郎 (早稲田大学 グローバルエデュケーションセンター) *

概要

リー群が概アーベルであるとは余次元 1 の可換正規部分群を持つことをいう．本稿では概アーベルリー群に対してリッチ平坦となる左不変ローレンツ計量の分類定理を概説する．応用として相対論における古典解の一つであるペトロフ解の高次元化に相当する真空解について紹介する．

1 等質時空

本稿では特に断らない限り n は 4 以上の自然数とし，ローレンツ計量は負の固有値をただ一つのみ持つ多様体上の滑らかな $(0,2)$ 型非退化対称テンソル場とする．連結かつ時間的向き付け可能な n 次元ローレンツ多様体 (M, g_M) を n 次元**時空**という．ローレンツ多様体 (M, g_M) に対して時間的向き付け可能でないとしても適当な二重被覆を考えることにより，被覆空間は時間的向き付け可能である ([O'Nei83, Lemma 7.17])．

通常は $n = 4$ のときに時空と呼ばれるが，素粒子論の興味から一般次元においても時空と呼ぶことにする．リッチ平坦な時空は数学のみならず相対論や素粒子論など理論物理学においても重要な研究対象であり，宇宙項なしのアインシュタイン方程式の真空解として理解されている．

時空 (M, g_M) が**等質**であるとは，その等長変換群が M に推移的に作用することをいう．定曲率時空であるミンコフスキー時空，ド・ジッター時空および反ド・ジッター時空とはよく知られた等質時空であり，それぞれリーマン幾何学におけるユークリッド空間，球面および双曲空間に対応する．

宇宙物理学の標準的な考え方では我々の宇宙は 4 次元であり，より正しくは空間的に一様等方な 4 次元時空というものである．その宇宙の膨張や収縮を表すスケール因子は物質の種類や状態に依存して変化するため，時間方向を含めた宇宙全体が等質であると主張することは難しい．

しかしながら，現在の宇宙で最も支配的な物質の約 7 割は宇宙項であり，未来その割合は増える一方であるため，大雑把に全て宇宙項と近似すれば，ド・ジッター時空であるため等質といえる．本研究では，4 次元に制限するとド・ジッター時空であるとしても，高次元時空全体としては等質かつリッチ平坦である可能性は否定できないことから，古典解であるペトロフ解を主軸に高次元のリッチ平坦な等質時空の例を構成する．

定理 1 ([FGV22, OC23])**.** 左不変ローレンツ計量 g_G を持つ 4 次元リー群 (G, g_G) はリッチ平坦であり，局所対称でも平面波でもないとする．このとき，計量の定数倍の差を除いて，次のリー代数で決定されるリー群に局所等長同型である．

$$[X_1, X_4] = -2X_1, \quad [X_2, X_4] = X_2 + \sqrt{3}X_3, \quad [X_3, X_4] = -\sqrt{3}X_2 + X_3$$

ここで $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ はリー代数上の X_3 を時間的とする正規直交基底である．

この特徴付けられた等質なリッチ平坦ローレンツ多様体は，相対論において古典的な真空解である**ペトロフ解**として知られている．またペトロフ解は等長変換群が概単純推移的に作用する唯一の 4 次元真空解として発見されたものである ([SKM+03])．

* 部分多様体幾何とリー群作用 2024 講演記録．また，本稿の内容は露木孝尚氏（北海道情報大学）との共同研究に基づく．

一般次元において等質なリッチ平坦ローレンツ多様体の分類は完了していないが，ローレンツ対称空間や低次元リー群の場合には分類定理が得られている ([CW70, CZ13, BT20])．本稿では，概アーベルリー群の場合にリッチ平坦な左不変ローレンツ計量の分類定理を紹介する．

以下，G は連結かつ単連結な n 次元リー群として，そのリー代数を $\mathfrak{g}$ で表し，G 上の左不変ローレンツ計量を g_G で表す．このとき (G, g_G) は等質時空である．実際，G 上の左不変な時間的ベクトル場が存在することから時間的向け付け可能である．

よく知られているように G 上の左不変ローレンツ計量 g_G と同じ符号を持つ $\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ の間には一対一対応が存在する．

注意 2. 等質時空 (G, g_G) は必ずしも測地的完備であるとは限らない．ローレンツ幾何学において等質性が完備性を誘導するとは限らないが，いくつかの十分条件が知られている．例えば (リー群に限らず一般に等質空間でよいが) G がコンパクトならば (G, g_G) は測地的完備である ([Mar73])．また g_G が両側不変ならば (G, g_G) は測地的完備である．さらに (G, g_G) は平坦であるとき，リー群 G がユニモジュラーであるための必要十分条件は (G, g_G) が測地的完備になることである ([AM03])．比較として等質なリーマン多様体において，リッチ平坦であることと平坦であることが同値になることは特筆すべき事実 [AK75] であろう．従ってローレンツ幾何学においてリッチ平坦な等質空間を考えることに意味がある．

リー群 G が概アーベルであるとは，余次元 1 の可換正規部分群を持つことであり，リー代数の言葉でいえば，そのリー代数 $\mathfrak{g}$ が余次元 1 の可換イデアル $\mathfrak{a}$ を持つことである．

定義より，n 次元概アーベルリー群の同型類の全体と $(n-1)$ 次実正方行列の同値類の全体の間には一対一対応が存在する．ここでサイズの等しい二つの実正方行列 A と B が同値であるとは，零でない定数倍の差を除いて相似になることである．また $\mathrm{M}_k\mathbb{R}$ で k 次実正方行列全体の集合を表す．

$\mathfrak{g}$ を n 次元概アーベル実リー代数とする．このとき，そのリー代数の生成子 $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$ と $(n-1)$ 次実正方行列 $A = [A_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathrm{M}_{n-1}\mathbb{R}$ を用いて

$$[X_n, X_j] = \sum_{i=1}^{n-1} A_{ij} X_i \quad (1 \leq j \leq n-1)$$

と表せる．ここで可換イデアルは $\mathfrak{a} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ である．また他の関係式は自明になっているとする．さらに行列 A を生成子 $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$ に同伴する行列と呼ぶことにする．生成子の取り換えは行列の同値類の代表元の取り換えに対応する．

注意 3. n 次元概アーベルリー群について次が成立する．

- G は適当なリー群構造を持つ $\mathbb{R}^n$ と同型である．
- 概アーベルリー群は 2 ステップ可解リー群である (メタアーベル群であるともいう)．
- 2 次元リー群はすべて概アーベルリー群である．
- 3 次元リー群は概アーベルリー群か半単純リー群のどちらか一方である．
- 概アーベルリー群が冪零であるための必要十分条件は同伴する行列が冪零になることである．
- 概アーベルリー群がユニモジュラーであるための必要十分条件は同伴する行列のトレースが零になることである．
- 定理 1 で与えたペトロフ解は概アーベルリー群である．実際，$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{X_1, X_2, X_3\}$ は余次元 1 の可換イデアルであり，生成子 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ に同伴する行列 A は次で与えられる．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

補題 4. n 次元概アーベルリー群 G 上に左不変ローレンツ計量 g_G を考え，そのリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の非退化対称双線形形式 $\langle\,,\,\rangle$ と同一視する．このとき，ある $\mathfrak{g}$ の生成子 $\{X_1,\dots,X_{n-1},X_n\}$ が存在して

$$\mathrm{span}\{X_1,\dots,X_{n-1}\}=\mathfrak{a},\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{a}\rtimes\mathbb{R}X_n$$

を満たし，この生成子に関する $g_G=\langle\,,\,\rangle$ の行列表示は次のいずれかである．

$$\text{(a) diag}\,(1,\dots,1,-1),\quad \text{(b) diag}\,(-1,1,\dots,1),\quad \text{(c) diag}\,(1,\dots,1)\oplus\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

ここで $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換イデアルである．

2 分類定理

補題 4 にある計量 (a), (b), (c) に対して，リッチ平坦条件を解くことにより，次の結果を得る．

定理 5. 左不変ローレンツ計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G,g_G) に対して, 同伴する行列を $A\in\mathrm{M}_{n-1}\mathbb{R}$ とする．

(1) 計量 g_G が (a) に帰着されるとき，リッチ平坦であるための必要十分条件は，A を対称行列 S と反対称行列 T の和に分解するとき $S=O$ を満たすことである．さらにこのとき (G,g_G) は平坦である．

(2) 計量 g_G が (b) に帰着されるとき，リッチ平坦であるための必要十分条件は

$$J=\mathrm{diag}\,(-1,1,\dots,1)\in\mathrm{M}_{n-1}\mathbb{R}$$

とおき，A を ${}^tS_L=JS_LJ$ を満たす S_L と ${}^tT_L=-JT_LJ$ を満たす T_L の和に分解するとき

$$\mathrm{tr}\,S_L=\mathrm{tr}\,S_L^2=0,\quad [S_L,T_L]=O$$

を満たすことである．

(3) 計量 g_G が (c) に帰着されるとき，リッチ平坦であるための必要十分条件は，スケーリングを許して

$$A=\begin{bmatrix}A'&\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{c}&d\end{bmatrix}\quad (A'\in\mathrm{M}_{n-2}\mathbb{R},\ \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{n-2},\ d=0,1)$$

とブロック分割し，A' を対称行列 S' と反対称行列 T' の和に分解するとき

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\quad S'=O\ (d=0\text{ のとき}),\quad \mathrm{tr}\,S'=\mathrm{tr}\,S'^2\ (d=1\text{ のとき})$$

を満たすことである．

注意 6. 左不変リーマン計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G,g_G) に対して，同伴する行列を $A\in\mathrm{M}_{n-1}\mathbb{R}$ とする．このとき，リッチ平坦であるための必要十分条件は A が実交代行列になることであり，これは定理 5 の左不変ローレンツ計量が (a) の場合に帰着されたときの結論に類似する．また定理 1 にあるペトロフ解は $n=4$ かつ定理 5 の計量が (b) の場合に一致する．さらに Calvaruso–Zaeim [CZ13] は 4 次元リー群に対してアインシュタインになるための条件を導いており，定理 5 は $n=4$ のとき，その一部に含まれるが，(c) の場合の分類は不完全であることに注意する．

一般に時空 (M,g_M) に対して，そのレヴィ・チヴィタ接続，曲率テンソルをそれぞれ ∇,R で表す．(M,g_M) が**局所対称**であるとは $\nabla R=0$ を満たすことである．

時空 (M,g_M) が **pp 波**であるとは，ある平行な光的ベクトル場 $V\in\Gamma(TM)$ が存在して，横断的平坦であることである．すなわち，任意の $X,Y\in V^\perp$ に対して $R(X,Y)=0$ を満たすことである．ここで $V\in\Gamma(TM)$ が平行な光的ベクトル場であるとは，零点を持たず

$$\nabla V=0,\quad g_M(V,V)=0$$

を満たすことであり，そのような V に対して

$$V^{\perp} = \{X \in \Gamma(TM) \mid g_M(X, V) = 0\}$$

で定め，M 上の階数 $(n-1)$ のベクトル束になる．しかしながら，M の接束 TM が V が定める直線束と $V^{\perp}$ の直交直和に分解されるわけではないことに注意する．実際 $V \in \Gamma(V^{\perp})$ が成立する．pp 波時空の “pp” は *Plane-fronted wave with Parallel rays* を意味する略語である．また pp 波時空では $V^{\perp}$ が可積分分布であり，時空に葉層構造が定まる．その葉は平坦な全測地的光的超曲面である．

時空 (M, g_M) が **pr 波**であるとは，あるリカレントな光的ベクトル場 $V \in \Gamma(TM)$ が存在して，横断的平坦であることである．すなわち，任意の $X, Y \in V^{\perp}$ に対して $R(X, Y) = 0$ を満たすことである．ここで $V \in \Gamma(TM)$ がリカレントなベクトル場であるとは，ある微分 1 形式 $\omega \in \Gamma(T^*M)$ が存在して $\nabla V = \omega \otimes V$ を満たすことである．pr 波時空の “pr” は *Plane-fronted wave with Recurrent rays* を意味する略語である．明らかに pp 波時空は pr 波時空である．

時空 (M, g_M) が**平面波**であるとは，pp 波時空であり，かつ任意の $X \in V^{\perp}$ に対して $\nabla_X R = 0$ を満たすことである．平面波時空はローレンツ幾何学特有の局所対称に近いローレンツ多様体のクラスである．

命題 7 ([Lei06])**.** (M, g_M) は pr 波時空とする．このとき，pp 波時空になるための必要十分条件はリッチテンソルが完全等方になることである．ここで (M, g_M) のリッチテンソルが完全等方であるとは，リッチテンソルを計量 g_M によって $(1,1)$ 型テンソル場 Q としたとき，任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して $g_M(Q(X), Q(X)) = 0$ を満たすことである．

注意 8. ローレンツ幾何学におけるホロノミーの観点からも pp 波時空は興味深い．実際，ローレンツ多様体に対して，(制限) ホロノミー群の作用は可約であるが分解不可能であるとき，可換群になることとして pp 波時空は特徴付けられる．詳細については例えば [Lei06] に詳しい．

さてペトロフ解は計量が定理 5 の (b) の場合に帰着され，局所対称でも平面波でもない解であった．そこでペトロフ解の高次元化に相当する解を分類結果である定理 5 から探求する．

3 高次元化

まず補題を三つ準備する．

補題 9. リッチ平坦な左不変リーマン計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G, g_G) に対して，局所対称であるための必要十分条件は平坦になることである．

補題 10. リッチ平坦な左不変リーマン計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G, g_G) に対して，その計量は補題 4 の (b) の場合とする．またその同伴する行列を定理 5 と同様に $A = S_L + T_L$ と分解する．このとき，ローレンツ計量 g_G は次のような表示を持つ．

$$g_G = {}^t d\boldsymbol{x} \begin{bmatrix} e^{-{}^tAx_{n+1}} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} e^{-Ax_{n+1}} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} d\boldsymbol{x} = {}^t d\boldsymbol{x} J \begin{bmatrix} e^{-2S_L x_{n+1}} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} d\boldsymbol{x}.$$

ここで $G = \mathbb{R}^n$ と同一視したものとし，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ である．

補題 11. リッチ平坦な左不変リーマン計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G, g_G) に対して，その計量は補題 4 の (c) の場合とする．このとき，(G, g_G) は平面波時空である．

補題 11 の証明の方針は以下の通りである．補題 4 の生成子 $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$ に対して X_{n-1} を G 上の左不変ベクトル場とみなしたとき，光的であるが平行ではない．しかしながら，リカレントであることが示せる．

さらに (G, g_G) は pr 波時空になることが示せるため，リッチ平坦性と命題 7 より pp 波時空である．最後に平面波時空であることを定義に従い，確認することによって主張が示される．

平坦時空は局所的にミンコフスキー時空と等長的であるため，平坦性は以下では考えないこととする．従って，定理 5 より計量が補題 4 の (a) の場合は除外する．また補題 9 よりリッチ平坦性の下では，局所対称性と平坦性は等価である．

計量が補題 4 の (c) の場合は補題 11 より平面波時空である．これは平坦になる可能性も含んでいることに注意する．実際，定理 5 の (3) において $d = 0$ のときの条件はいつでも平坦になる．また平坦でない等質な平面波時空について，その等長変換群は概単純推移的ではない．すなわち，等長変換群は 1 次元以上のイソトロピー部分群を持つ ([HMZ23])．ここで等長変換群が概単純推移的に作用するとは，固定部分群が離散的であることをいう．

また高次元解はリー群構造を含めた同型類ではなく，多様体構造までの等長類で求めたい．従って，補題 10 より計量が (b) の場合であれば，同伴する行列 $A = S_L + T_L$ に対して T_L を忘れて $A = S_L$ となっているときのみを考えればよい．

次の命題は実対称行列に対する直交変換による標準形のローレンツ版と思える．

命題 12 ([SS94])**.** 実正方行列 $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ は

$$
{}^tA = JAJ
$$

を満たすとする．このとき，A は適当なローレンツ変換 $P \in \mathrm{O}(1, n-1)$ により対角行列または対角行列と次の行列のいずれかの一つとの直和した行列に共役である．

$$
\text{(i)} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} -1+r & -1 \\ 1 & 1+r \end{bmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma & -1 \\ \gamma & \gamma & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

ここで $\alpha, \beta, r, \gamma \in \mathbb{R}$ であり $\alpha \neq 0$ とする．また $J = \mathrm{diag}\,(-1, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ として

$$
\mathrm{O}(1, n-1) = \{P \in \mathrm{M}_n\mathbb{R} \mid {}^tPJP = J\}
$$

である．

さてここまでの準備の下，ペトロフ解の高次元解を導出する．計量が補題 4 の (b) の場合に $A = S_L$ とする．定理 5 よりリッチ平坦条件は

$$
\mathrm{tr}\, S_L = \mathrm{tr}\, S_L^2 = 0
$$

であった．そして命題 12 より標準形に直してもよい．実際，ローレンツ変換は計量の行列表示 (b) と上記のリッチ平坦条件を保つ．以下，場合分けして議論する．

対角行列

S_L が対角行列の場合，リッチ平坦条件より直ちに $S_L = O$ を得るが，これは平坦になることが導かれる．

対角行列と (ii) の直和

このとき S_L は

$$
S_L = \begin{bmatrix} -1+r & -1 \\ 1 & 1+r \end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(\lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1})
$$

とおける．リッチ平坦条件より直ちに $r = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ を得るが，$S_L^2 = O$, $\mathrm{rank}\, S_L \leq 1$ から平坦になることが導かれる．

対角行列と (iii) の直和

　このとき S_L は

$$S_L = \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma & -1 \\ \gamma & \gamma & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(\lambda_4, \dots, \lambda_{n-1})$$

とおける．リッチ平坦条件より直ちに $\lambda_4 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ を得るが，これより平坦でないが平面波時空であることが示される．実際，補題 4 の生成子 $\{X_1, \dots, X_{n-1}, X_n\}$ に対して $X_1 - X_2$ を G 上の左不変ベクトル場とみなしたとき，平行な光的ベクトル場であり，平面波時空の定義を満足することが直接計算により分かる．

対角行列と (i) の直和

　このとき S_L は

$$S_L = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}), \quad \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$$

とおける．リッチ平坦条件より直ちに

$$2\alpha + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i = 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i^2 = 0$$

を得るが，これから $\beta \neq 0$ でなければならない．もし $\beta = 0$ とすると $S_L = O$ となり，平坦になってしまう．特に (同伴する行列のスケーリングに等価であるが) 計量のスケーリングをすることによって

$$S_L = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1})$$

とできる．このとき，平坦でないことが示される．特に局所対称ではない．さらに pp 波時空でないことも示される．特に平面波時空でない．

　一般にリー群 G が**分解可能**であるとは，二つの非自明なリー部分代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}$ が存在して直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ が成立することである．リー群 G が**分解不可能**であるとは，分解可能でないことである．

補題 13. n 次元概アーベルリー群 G は次の行列

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathrm{M}_{n-1}\mathbb{R}$$

で決定されるものとする．このとき，G が分解可能であるための必要十分条件はある $i \in \{3, \dots, n-1\}$ が存在して $\lambda_i = 0$ を満たすことである．

　$\lambda_i = 0$ となる i の個数を m とすると，概アーベルリー群 G は m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ と $(n-m)$ 次元概アーベルリー群 G' の直積と同型になる．

定理 14. 左不変リーマン計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G, g_G) は分解不可能でリッチ平坦であるとする．このとき，局所対称でも平面波でもないならば次の行列で決定される概アーベルリー群に合同である．

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}, \quad \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}.$$

ここで

$$2\alpha + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i = 0, \quad 2\alpha^2 + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i^2 = 2, \quad \prod_{i=3}^{n} \lambda_i \neq 0$$

を満たす．またその計量は，計量の定数倍の差を除いて補題 4 の (b) である．さらにこの逆も成立する．

補題 15. 左不変リーマン計量 g_G を持つ n 次元概アーベルリー群 (G, g_G) に対して，G は次の行列

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \oplus \operatorname{diag}(\lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}),$$

ここで

$$2\alpha + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i = 0, \quad 2\alpha^2 + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i^2 = 2, \quad \prod_{i=3}^{n} \lambda_i \neq 0$$

を満たすもので決定されるものとし，計量は補題 4 の (b) で与えられたものとする．このとき，等長変換群が概単純推移的に作用するための必要十分条件は各 λ_i $(3 \leq i \leq n-1)$ が互いに相異なることである．

補題 15 の証明の鍵は $\mathrm{Isom}(G, g_G)_e$ を単位元 $e \in G$ における等長変換群のイソトロピー部分群としたときに

$$\mathrm{Isom}(G, g_G)_e \subset \mathrm{Sym}(G, g_G) \subset \mathrm{O}(1, n-1) \cap \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

という群の包含列が成立することであり

$$\mathrm{Sym}(G, g_G) = \{P \in \mathrm{O}(1, n-1) \mid P^* R = R\}$$

で定義される群が離散的であることを示すことによって主張を得る．ここで R は曲率テンソルであり，そのリー代数 $\mathfrak{g}$ 上に誘導したものも R で表している．

元々のペトロフ解は 4 次元時空であって等長変換群が概単純推移的に作用する唯一の真空解として発見されたものであった．この観点から概単純推移的に作用するものを定理 14 から補題 15 を用いて選り分けることにより次を得る．また平坦でない平面波時空では，等長変換群の作用は概単純推移的ではなかったことに注意する．

系 16. (G, g_G) は定理 14 で特徴付けられた分解不可能な局所対称でも平面波でもないリッチ平坦な n 次元概アーベルリー群とする．このとき，概単純推移的に作用するための必要十分条件は $\lambda_3 > \ldots > \lambda_{n-1}$ を満たすことである．

4 関連事項

計量が補題 4 の (b) であるとき，リッチ平坦条件は次のように書き換えられる．

$$\operatorname{tr} A = 0, \quad {}^t(AJ)(JA) - (AJ)^t(JA) = O, \quad \operatorname{tr} A^2 + \operatorname{tr}\left[(AJ)^t(JA)\right] = 0.$$

中央の条件

$${}^t(AJ)(JA) - (AJ)^t(JA) = O$$

は実正規行列のローレンツ版とも思える．実際，J が単に単位行列であったとき，この条件は実正規行列であることに一致する．ここで次の集合を定める．

$$N = \{A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R} \mid {}^t(AJ)(JA) - (AJ)^t(JA) = O\}.$$

このとき，次のリー群の作用が定まる．

$$\mathrm{O}(1, n-1) \curvearrowright N; \quad N \ni A \mapsto P^{-1}AP \in N.$$

従って，軌道空間を調べることによって群作用の観点から $\mathrm{O}(1, n-1) \curvearrowright N$ の標準形を明らかにするという問題を提起することができる．

参考文献

[AK75] D. V. Alekseevskiĭ and B. N. Kimel'fel'd, *Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature*, Funkcional. Anal. i Priložen. **9** (1975), no. 2, 5–11.

[AM03] A. Aubert and A. Medina, *Groupes de Lie pseudo-riemanniens plats*, Tohoku Math. J. (2) **55** (2003), no. 4, 487–506.

[BT20] M. Boucetta and O. Tibssirte, *On Einstein Lorentzian nilpotent Lie groups*, J. Pure Appl. Algebra **224** (2020), no. 12, 106443, 22 pp.

[CW70] M. Cahen and N. R. Wallach, *Lorentzian symmetric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 585–591.

[CZ13] G. Calvaruso and A. Zaeim, *Four-dimensional Lorentzian Lie groups*, Differential Geom. Appl. **31** (2013), no. 4, 496–509.

[FGV22] M. Ferreiro-Subrido, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Ricci solitons on four-dimensional Lorentzian Lie groups*, Anal. Math. Phys. **12** (2022), no. 2, Paper No. 61, 35 pp.

[HMZ23] M Hanounah, L Mehidi and A Zeghib, *On homogeneous plane waves*, arXiv:2311.07459.

[Lei06] T. Leistner, *Conformal holonomy of C-spaces, Ricci-flat, and Lorentzian manifolds*, Differential Geom. Appl. **24** (2006), no. 5, 458–478.

[Mar73] J. E. Marsden, *On completeness of homogeneous pseudo-riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972/73), 1065–1066.

[O'Nei83] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London (1983).

[OC23] T. Otero-Casal, *Métricas de Einstein en grupos de Lie lorentzianos*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Santiago de Compostela, (2023).

[SKM+03] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, second ed. (2003).

[SS94] D. A. Singer and D. H. Steinberg, *Normal forms in Lorentzian spaces*, Nova J. Algebra Geom. **3** (1994), no. 1, 1–9.