

擬Riemann対称 R 空間の対蹠集合

杉本 恭司 (東京理科大学)*

1. はじめに

G を連結 Lie 群, L をその閉部分群とし, σ を G の非自明な対合的自己同型とする. このとき, $(G/L, \sigma)$ が対称空間であるとは,

$$(G^\sigma)_0 \subset L \subset G^\sigma$$

が成り立つことをいう. ここで, $G^\sigma := \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$, $(G^\sigma)_0$ はその連結成分を表す.

G/L を対称空間とする. $p \in G/L$ に対して, s_p で p における点対称を表す. 部分集合 $S \subset G/L$ が対蹠集合であるとは, 任意の $p, q \in G/L$ に対して, $s_p(q) = q$ が成り立つことをいう. 対蹠集合の概念は [1] において導入され, Riemann 対称空間論において, 多くの興味深い研究がなされてきた (例えば, [1, 6–8] 等). 一方で, 非 Riemann 対称空間においては, 対蹠集合に関する研究はほとんどなされなかったようである. 本稿では, 非 Riemann 対称空間の中でも, 半単純 Lie 群の双曲随伴軌道として実現される para-Hermite 対称空間, 及び半単純対称階別 Lie 代数に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合について得られた結果を紹介する.

ここで, para-Hermite 対称空間は [2] により導入された概念であり, それは, G 不変 para 複素構造 I と, I に関する G 不変 para-Hermite 計量 g を兼ね備えた対称空間 G/L である. ここで, para 複素構造 I とは, G/L 上の $(1, 1)$ 型テンソル場で, 以下の条件を満たすものである.

$$(1) \quad I^2 = \text{id}.$$

$$(2) \quad \dim T_p^+ G/L = \dim T_p^- G/L \quad (\forall p \in G/L). \text{ 但し, } T_p^+ G/L \text{ (resp. } T_p^- G/L) \text{ は } I_p \text{ の } (+1) \text{ (resp. } -1) \text{ 固有空間を表す.}$$

$$(3) \quad [IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0 \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)).$$

また, I に関する para-Hermite 計量 g とは G/L 上の擬 Riemann 計量で,

$$(4) \quad g(IX, Y) + g(X, IY) = 0 \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L))$$

を満たすものである. Para-Hermite 対称空間は Riemann でない対称空間であり, 特に para-Hermite 計量はニュートラル計量である. また, 擬 Riemann 対称 R 空間は [3] により導入された概念で, それは, 対称 R 空間の擬 Riemann の場合への一般化である. 擬 Riemann 対称 R 空間は直行対称階別 Lie 代数とよばれるある種の不変内積を兼ね備えた対称階別 Lie 代数と一対一に対応している. 半単純対称階別 Lie 代数は直行対称階別 Lie 代数であることに注意しておく. 本稿では, 擬 Riemann 対称 R 空間の中でも, 半単純対称階別 Lie 代数に付随したもののみを考える.

* 部分多様体幾何とリー群作用 2024 講演要旨

2. Para-Hermite 対称空間と para 実形

本節では para-Hermite 対称空間とその para 実形について, 基本的なことを復習する.
次の補題は概効果的半単純 para-Hermite 対称空間に関する基本的なものである.

補題 2.1 (cf. [2]) $(G/L, \sigma, I, g)$ を概効果的半単純 para-Hermite 対称空間, g を G の Lie 代数, $g = l \oplus u$ を σ_* に関する g の (± 1) 固有空間分解とする. このとき, 以下を満たす $Z \in l$ が唯一つ存在する.

$$(1) l = c_g(Z) = \{X \in g \mid [Z, X] = 0\}, \quad (2) I_o = \text{ad}Z|_u.$$

但し, o は G/L の原点を表す.

補題 2.1 の Z は g の半単純元であり, $\text{ad}Z$ の g 上の固有値は $0, \pm 1$ である. この Z を G/L の **特性元** という. $C_G(Z) := \{x \in G \mid \text{Ad}x(Z) = Z\}$ としたとき, 補題 2.1 より, $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$ となることがわかる. $L = C_G(Z)$ となるとき, G/L は **双曲軌道型** であるという. このとき, $G/L \cong \text{Ad}G(Z)$ である. 即ち, 双曲軌道型概効果的半単純 para-Hermite 対称空間は g 内の双曲随伴軌道として実現される.

Para-Hermite 対称空間 $(G/L, \sigma, I, g)$ に対して, G/L の対合的反 para 正則等長変換の固定点集合の連結成分を **para 実形** という. ただし, 可微分写像 $\Phi : G/L \rightarrow G/L$ が **反 para 正則** であるとは, 任意の $p \in G/L$ に対して

$$(d\Phi)_p \circ I_p = -I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p$$

を満たすことをいう. R を G/L の para 実形とすると, 原点 o を含む G/L の para 実形 R_o と, G/L の para 正則等長変換 Ψ が存在して, $\Psi(R) = R_o$ となることを注意しておく. 次は基本的な結果である.

補題 2.2 (cf. [2, 5]) $(G/L, \sigma, I, g)$ を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間とする.

(1) G/L には, para 正則等長変換で移りあうものを除いて, コンパクト para 実形が一意的に存在する.

(2) G/L のコンパクト para 実形は対称 R 空間である.

(3) R を G/L のコンパクト para 実形とすると, G/L は R の余接束と微分同型である.

逆に, 対称 R 空間の余接束は para-Hermite 対称空間の構造を持つことに注意しておく.

例 2.1 $G := SL(p+q, \mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq q$), $g := \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ とする.

$$Z := \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} qE_p & O \\ O & -pE_q \end{pmatrix}$$

とする. 但し E_α は α 次の単位行列を表す. このとき, Z は g の半単純元で $\text{ad}Z$ の g 上の固有値は $0, \pm 1$ であり, $M := \text{Ad}G(Z) \cong G/C_G(Z)$ は Z を特性元とする双曲軌道型単純 para-Hermite 対称空間になる. ここで, 対称空間を定義する G の対合 σ は, $\sigma(x) :=$

$(\exp \sqrt{-1}\pi Z)x(\exp \sqrt{-1}\pi Z)^{-1}$ ($x \in G$) によって与えられ, para-Hermite 計量 g は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の (0 でない定数倍の) G 不変拡張で与えられる. ここで,

$$C_G(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \in G \mid X \in GL(p, \mathbb{R}), Y \in GL(q, \mathbb{R}) \right\}$$

であり, $C_G(Z)$ は非連結である. 特に $p = q = 1$ のとき, M は一葉双曲面である.

$\Theta : G/C_G(Z) \rightarrow G/C_G(Z)$ を $xC_G(Z) \mapsto {}^t x^{-1}C_G(Z)$ とすると, Θ は $G/C_G(Z)$ の対合的反 para 正則等長変換である. このとき, Θ の固定点集合 $(G/C_G(Z))^\Theta$ は連結で, コンパクト para 実形である. このとき,

$$(G/C_G(Z))^\Theta = SO(p+q)/S(O(p) \times O(q))$$

となる.

$(G/L, \sigma, I, g)$ を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間とする. Q を G/L のコンパクト para 実形で o を含むもの, Θ を Q を定義する G/L の対合的反 para 正則等長変換とする. このとき, $\Xi := \Theta \circ s_o$ とおくと, Ξ は G/L の対合的反 para 正則等長変換で $\Xi(o) = o$ を満たす. Q^* を $(G/L)^\Xi$ の o を含む連結成分とする. 即ち, Q^* は Ξ により定義される o を含む G/L の para 実形である. このとき, Q^* は Q の非コンパクト双対とみなせる.

3. 擬 Riemann 対称 R 空間

本節では擬 Riemann 対称 R 空間の定義を復習し, 擬 Riemann 対称 R 空間と para 実形の関係について紹介する.

定義 3.1 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ を半単純第一種階別 Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 ρ が存在して,

$$(1) \mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1],$$

$$(2) \text{ad} : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1}) \text{ は忠実,}$$

を満たすとき, $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \rho)$ を半単純対称階別 Lie 代数という.

以下, 対称階別 Lie 代数を SGLA と略記する.

$(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \rho)$ を半単純 SGLA とし, Z を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の特性元とする. 即ち, Z は $\mathfrak{g}$ の半単純元で, $\mathfrak{g}_\lambda$ は $\text{ad}Z$ の λ 固有空間である ($\lambda = 0, \pm 1$). $\mathfrak{h}, \mathfrak{m}$ をそれぞれ ρ の ± 1 固有空間とし, H を $\exp(\text{ad}\mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}})$ で生成される $GL(\mathfrak{m})$ の連結 Lie 部分群とする. このとき, Z を通る H 軌道 $H(Z)$ を半単純 SGLA $(\mathfrak{g}, \rho)$ に付随した擬 Riemann 対称 R 空間という. 擬 Riemann 対称 R 空間は擬 Riemann 対称空間である. 特に ρ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合であるとき, $H(Z)$ は対称 R 空間である.

擬 Riemann 対称 R 空間と para 実形の関係について, 次が成り立つ.

命題 3.1 (cf. [4]) 半単純 SGLA に付随した擬 Riemann 対称 R 空間は, ある双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の原点を含む para 実形として実現でき, その逆も成り立つ.

4. 対蹠集合

まず, para-Hermite 対称空間の対蹠集合について得られた結果を紹介する.

定理 4.1 (cf. [5]) G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $S \subset G/L$ を対蹠集合とする. また, G/L の para-Hermite 計量 g は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}$ から誘導されているとする. 即ち, $g_o = \lambda B_{\mathfrak{g}}$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). このとき, あるコンパクト para 実形 $R \subset G/L$ が存在して, $S \subset R$. 従って,

$$\#_2 G/L = \#_2 R < \infty$$

が成り立つ. 但し, $M := G/L$ or R に対して, $\#_2 M$ は M の対蹠集合たちの濃度の上限を表し, これを M の **2-number** という.

定理 4.1 より, 次を定義する.

定義 4.1 G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $S \subset G/L$ を対蹠集合とする. $\#S = \#_2 G/L$ となると, S を **大対蹠集合** という.

定理 4.2 (cf. [5]) G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $Z \in \mathfrak{g}$ を G/L の特性元とする. また, G/L を Z を通る $\text{Ad } G$ 軌道 $M := \text{Ad } G(Z)$ と同一視する.

- (1) S を M の大対蹠集合とする. このとき, $\mathfrak{g}$ のある Cartan 対合 θ と $\mathfrak{g}^{-\theta}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ が存在して, $S = M \cap \mathfrak{a}$ となる. 従って S は (G, A) の Weyl 群の軌道である. 但し, $A := \exp \mathfrak{a}$ である.
- (2) M の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) S_1 と S_2 を M の二つの大対蹠集合とすると, ある para 正則等長変換 $\Phi : M \rightarrow M$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

次に, 擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合について述べる. まず, 双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間 G/L の para 実形 R について, 次が成り立つ. ここで, $\#_2 R \leq \#_2 G/L$ なので, R に対しても定義 4.1 と同様にして大対蹠集合の概念を定義できる.

定理 4.3 (cf. [5]) G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $Z \in \mathfrak{g}$ を G/L の特性元, R を G/L の原点を含む para 実形とする. また, G/L を Z を通る $\text{Ad } G$ 軌道 $M := \text{Ad } G(Z)$ と同一視する.

- (1) S を R の大対蹠集合とする. このとき, $\mathfrak{g}$ のある Cartan 対合 θ と対合的自己同型 ξ で $\xi \circ \theta = \theta \circ \xi$, $\xi(Z) = -Z$ を満たすものと, $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ が存在して, $S = R \cap \mathfrak{a}$ となる. 従って S は (H^a, A) の Weyl 群の軌道である. 但し, H^a はその Lie 代数が $(\mathfrak{g}^{\theta} \cap \mathfrak{g}^{\xi}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi})$ であるような G の連結部分 Lie 群で, $A := \exp \mathfrak{a}$ である.
- (2) R の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) S_1 と S_2 を R の二つの大対蹠集合とすると, ある等長変換 $\Phi : R \rightarrow R$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

命題 3.1 と定理 4.3 より, 次が成り立つ.

系 4.1 (cf. [5]) N を半単純 SGLA に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする.

- (1) $\#_2 N < \infty$.
- (2) N の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
- (3) S_1 と S_2 を N の二つの大対蹠集合とすると, ある等長変換 $\Phi : N \rightarrow N$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

半単純 SGLA に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の 2-number について次が成り立つ. ここで, 一般に M を対称空間としたとき, 任意の $p \in M$ に対して $\{p\}$ は M の対蹠集合になることに注意しておく.

命題 4.1 (cf. [5]) N を半単純 SGLA に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする. N がある対称 R 空間の非コンパクト双対でなければ $\#_2 N \geq 2$ が成り立つ.

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. **308** (1988), 273–297.
- [2] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. **8** (1985), 81–98.
- [3] H. Naitoh, Pseudo-Riemannian symmetric R -spaces, Osaka J. Math. **21** (1984), 733–764.
- [4] K. Sugimoto, Para-real forms of para-Hermitian symmetric spaces and real forms of pseudo-Hermitian symmetric spaces, Hiroshima Math. J. **53** (2023), 143–170.
- [5] K. Sugimoto, Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces, Differential Geom. Appl. **93** (2024).
- [6] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.
- [7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.
- [8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.