極大対蹠部分群と奇数次数の被覆準同型写像*

田中 真紀子

東京理科大学創域理工学部

1 序論

コンパクト Riemann 対称空間の部分集合 A は、A の任意の点 x における点対称 s_x が A の各点を固定するときに対蹠集合とよばれる。例えば球面 $S^n(\subset \mathbb{R}^{n+1})$ の場合、対蹠点からなる集合 $\{x, -x\}$ $(x \in S^n)$ は対蹠集合である。Chen–Nagano[1] はコンパクト Lie 群の 2-rank（可換部分群 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ の階数の最大値）のある意味での拡張と考えられるコンパクト Riemann 対称空間 M の 2-number $\#_2 M$（対蹠集合の位数の最大値）について詳細に研究し、多くのコンパクト Riemann 対称空間の 2-number を決定した。Chen–Nagano[1] や Takeuchi[2] などにより $\#_2 M$ と M の位相構造との関係が知られている。筆者は田崎博之氏との共同研究で古典型コンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の分類に取り組んできた ([3, 4, 6])。よく知られているようにコンパクト Lie 群は両側不変 Riemann 計量により Riemann 対称空間である。我々が得た（連結とは限らない）コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類結果および Lie 群ではない古典型コンパクト Riemann 対称空間の商空間の極大対蹠集合の分類結果において、いずれも自然な射影の被覆次数が奇数の場合と偶数の場合で状況が異なり、奇数の場合は自然な射影を通して極大対蹠部分群や極大対蹠集合がある意味変わらない。[3] において、コンパクト Lie 群 G, G' の間の奇数次数の被覆準同型写像 $\pi : G \to G'$ に対して、G が連結の場合にこの事実を証明したが、[5] において、G の連結性の仮定なしにこの事実を証明した。詳しい内容について 3 節で述べる。

2 コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群

コンパクト Lie 群 G には両側不変 Riemann 計量が存在し、$s_x(y) = xy^{-1}x$ $(x, y \in G)$ により x における点対称 s_x が定義され、G は Riemann 対称空間である。G の点対称は G の群構造で定まるので、G が連結でなくても点対称は定義される。

A を G の対蹠集合とする。左移動と右移動は G の等長変換であり、A は G の単位元 e を含むと仮定しても一般性を失わない。このとき、任意の $x \in A$ に対して $s_e(x) = x^{-1} = x$、すなわち、$x^2 = e$ が成り立つ。$x, y \in A$ に対して $x^2 = y^2 = e$ が成り立つことから、任意の $x, y \in A$ に対して、$s_x(y) = y$ が成立することと x と y が可換なことは同値である。A が G

*研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2024」2024 年 12 月 2 日–3 日（東京理科大学神楽坂キャンパス森戸記念館）記録集

の極大対蹠集合であれば A は G の部分群であり、A は $\mathbb{Z}_2$ のいくつかの直積 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型な可換部分群である。コンパクト Lie 群 G の 2-rank $\mathrm{r}_2(G)$ と 2-number $\#_2 G$ の間には $\#_2 G = 2^{\mathrm{r}_2(G)}$ という関係が成り立つ。G の部分群が対蹠集合であるとき G の**対蹠部分群**という。A が G の対蹠部分群であることは、A が G の可換部分群で各元が対合的であることと同値である。つまり、コンパクト Lie 群 G の対蹠部分群は $\mathbb{Z}_2$ のいくつかの直積 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ に同型な部分群であり、その逆も成り立つ。G の対蹠部分群が包含関係について極大のとき**極大対蹠部分群**といい、位数が $\#_2 G$ に等しい対蹠部分群を**大対蹠部分群**という。G の大対蹠部分群は $(\mathbb{Z}_2)^{\mathrm{r}_2(G)}$ と同型な部分群である。大対蹠部分群は極大対蹠部分群であるが、逆は一般に成立しない。

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

とおく。Δ_n は対角成分が ± 1 の n 次対角行列全体である。$G = O(n), U(n), Sp(n)$ のとき、Δ_n は共役を除いて唯一の G の極大対蹠部分群であり、したがって大対蹠部分群である。$\#_2 G = |\Delta_n| = 2^n$ である。正方行列からなる集合 X に対して $X^{\pm} := \{x \in X \mid \det x = \pm 1\}$ と定める。$G = SO(n), SU(n)$ のとき、Δ_n^+ は共役を除いて唯一の G の極大対蹠部分群であり、したがって大対蹠部分群である。$\#_2 G = |\Delta_n^+| = 2^{n-1}$ である。[3] でこれらの古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の共役類を分類し、代表元を行列を用いて具体的に表示した。さらに、各代表元の位数を求め、位数の最大値と最大値を与える極大対蹠部分群(つまり、大対蹠部分群)を決定した。具体的には $\mathbb{Z}_\mu := \{\alpha 1_n \mid \alpha^\mu = 1\}$ として $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$(μ は自然数), $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$(μ は n を割り切る), $Sp(n)/\mathbb{Z}_2, O(n)/\mathbb{Z}_2, SO(2m)/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠部分群の共役類を分類した。

3 奇数次数の被覆準同型写像と対蹠部分群

この節では [5] の結果について述べる。G, G' を(連結とは限らない)コンパクト Lie 群とし、$\pi : G \to G'$ を被覆準同型写像とする。対蹠部分群の定義から次の補題が成り立つことがわかる。

補題 3.1. A が G の対蹠部分群ならば $\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。

π の被覆次数が奇数の場合には、この補題における「対蹠部分群」を「極大対蹠部分群」に置き換えても成り立つ。

命題 3.2. $\pi : G \to G'$ の被覆次数は奇数とする。このとき、A が G の極大対蹠部分群ならば $\pi(A)$ は G' の極大対蹠部分群である。

この命題の証明には次の Sylow の定理を用いる。

定理 3.3 (Sylow)**.** H を有限群とし p を $|H|$ の素因数とする。$|H| = p^n m$ とする。ただし、p は m を割り切らない。 このとき次が成り立つ。

(1) H には位数が p^n の部分群が存在する。これを H の **p-Sylow 部分群**という。

(2) H の 2 つの p-Sylow 部分群は共役である。

(3) H の任意の p-部分群（位数が p の冪の部分群）はある p-Sylow 部分群に含まれる。

まず次の補題を示す。

補題 3.4. $\pi : G \to G'$ の被覆次数は奇数とする。このとき、G' の任意の対蹠部分群 A' に対して、G の対蹠部分群 B で次の (1), (2) を満たすものが存在する。

(1) B は $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群であり $|B| = |A'|$ を満たす。

(2) π の B への制限は B から A' への同型写像である。

証明. A' は G' の対蹠部分群なので、ある自然数 t に対して $A' \cong (\mathbb{Z}_2)^t$ で $|A'| = 2^t$ である。仮定より $k := |\ker(\pi)|$ は奇数である。$\pi^{-1}(A')$ は G の部分群で、$|\pi^{-1}(A')| = |A'||\ker(\pi)| = 2^t k$ だから、Sylow の定理より $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群 B が存在し、$|B| = 2^t = |A'|$ である。$B \cap \ker(\pi)$ の元の位数は 2 の冪かつ奇数だから $B \cap \ker(\pi) = \{e\}$ である。よって π の B への制限は単射で、$\pi|_B : B \to A'$ は同型写像であり、B は G の対蹠部分群である。 □

命題 3.2 の証明. $Z' = \ker(\pi)$ とおくと $|Z'|$ は奇数である。A を G の極大対蹠部分群とする。補題 3.1 より $\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。$\pi(A)$ の極大性を示すために、A' を G' の対蹠部分群で $\pi(A) \subset A'$ を満たすものとする。補題 3.4 より $\tilde{A} := \pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群 B が存在し、$\pi|_B : B \to A'$ は同型写像である。B は G の対蹠部分群である。$B, Z' \subset \tilde{A}$ より $BZ' \subset \tilde{A}$ である。$B \cap Z'$ の元の位数は 2 の冪かつ奇数だから $B \cap Z' = \{e\}$ であり、BZ' の各元は $bz\,(b \in B, z \in Z')$ と一意的に表せるので、$|BZ'| = |B||Z'| = |A'||Z'| = |\tilde{A}|$ となり $BZ' = \tilde{A}$ である。A は位数が 2 の冪の $\tilde{A}$ の部分群なので、Sylow の定理からある $g \in \tilde{A}$ に対して $gAg^{-1} \subset B$ となるが、A の極大性から $gAg^{-1} = B$ が成り立つ。よって $|\pi(A)| = |\pi(gAg^{-1})| = |\pi(B)| = |A'|$ となるので $\pi(A) = A'$ であり、$\pi(A)$ は G' の極大対蹠部分群である。 □

補題 3.4 より次が成り立つことに注意しておく。

系 3.5. $\pi : G \to G'$ の被覆次数は奇数とする。このとき、G' の任意の対蹠部分群 A' に対して、G の対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像である。

この補題における「対蹠部分群」を「極大対蹠部分群」に置き換えた次の命題が成り立つ。

命題 3.6. $\pi : G \to G'$ の被覆次数は奇数とする。このとき、G' の任意の極大対蹠部分群 A' に対して、G の極大対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像である。

証明. A' は G' の対蹠部分群なので、系 3.5 より G の対蹠部分群 A で $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像であるものが存在する。A の極大性を示すために、C を G の対蹠部分群で $A \subset C$ を満たすものとする。補題 3.1より$\pi(C)$ は G' の対蹠部分群である。$A' = \pi(A) \subset \pi(C)$ と A' の極大性から $A' = \pi(A) = \pi(C)$ が成り立つ。$C \cap \ker(\pi)$ の元の位数は 2 の冪かつ奇数だから $C \cap \ker(\pi) = \{e\}$ であり、π の C への制限は単射である。したがって $A = C$ が成り立ち、A は G の極大対蹠部分群である。 □

以上のことを踏まえて次の定理を述べる。G の 2 つの部分群が G の元で共役のとき、これらは G 共役であるといい、G の単位連結成分 G_0 の元で共役のとき、これらは G_0 共役であるという。

定理 3.7. G, G' をコンパクト Lie 群とし、$\pi : G \to G'$ を奇数次数の被覆準同型写像とする。G_0, G'_0 をそれぞれ G, G' の単位連結成分とする。

(1) A が G の対蹠部分群ならば $\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。A が G の極大対蹠部分群ならば $\pi(A)$ は G' の極大対蹠部分群である。G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が G 共役ならば、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1), \pi(A_2)$ は G' 共役である。G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が G_0 共役ならば、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1), \pi(A_2)$ は G'_0 共役である。

(2) A' が G' の対蹠部分群ならば G の対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。A' が G' の極大対蹠部分群ならば G の極大対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。G' の極大対蹠部分群 A'_1, A'_2 が G' 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 は G 共役である。G_0 が $\ker(\pi)$ を含む場合は、G' の極大対蹠部分群 A'_1, A'_2 が G'_0 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 は G_0 共役である。

証明. 共役性に関する部分の他はすでに証明済みなので共役性に関する部分を証明する。

(1) G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が G 共役、つまり、ある $g \in G$ に対して $A_2 = gA_1g^{-1}$ とすると、$\pi(A_2) = \pi(g)\pi(A_1)\pi(g)^{-1}$ だから $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G' 共役である。$g \in G_0$ ならば $\pi(g) \in \pi(G_0) = G'_0$ だから $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G'_0 共役である。

(2) G' の極大対蹠部分群 A'_1, A'_2 が G' 共役、つまり、ある $g' \in G'$ に対して $A'_2 = g'A'_1{g'}^{-1}$ とすると、$\pi^{-1}(A'_2) = \pi^{-1}(g'A'_1{g'}^{-1})$ が成り立つ。$\pi^{-1}(g')$ の元を 1 つ取り g とすると $\pi^{-1}(g'A'_1(g')^{-1}) = g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1}$ が成り立つ。命題 3.6 より G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が存在して $\pi|_{A_i} : A_i \to A'_i \, (i = 1, 2)$ は同型写像になる。ここで A_i は $\pi^{-1}(A'_i)$ の 2-Sylow 部分群である $(i = 1, 2)$ から、gA_1g^{-1} は $g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1} = \pi^{-1}(A'_2)$ の 2-Sylow 部分群であり、Sylow の定理から gA_1g^{-1} は $\pi^{-1}(A'_2)$ の元で A_2 と共役である。よって A_1 は G の元で A_2 と共役である。次に、G_0 が $\ker(\pi)$ を含むとする。上の議論における g' が $g' \in G'_0$ を満たすならば、$\pi(G_0) = G'_0$ より上で取った g を $g \in G_0$ と取れる。先ほどの議論から gA_1g^{-1} は A_2 と $\pi^{-1}(A'_2)$ の元で共役である。よってある $x \in \pi^{-1}(A'_2)$ に対して $xgA_1g^{-1}x^{-1} = A_2$ となる。$\pi^{-1}(A'_2) = A_2\ker(\pi)$ であり、$A_2 \cap \ker(\pi) = \{e\}$ から $x \in \pi^{-1}(A'_2)$ は $x = az \, (a \in A_2, z \in \ker(\pi))$ と一意的に表せる。よって $azgA_1g^{-1}(az)^{-1} = A_2$ となり、これより $zgA_1g^{-1}z^{-1} = a^{-1}A_2a = A_2$ となる。$z \in \ker(\pi) \subset G_0$ だから $zg \in G_0$ であり、A_1, A_2 は G_0 共役である。 □

つまり、$\pi : G \to G'$ が奇数次数の被覆準同型写像の場合は、π によって G の極大対蹠部分群は G' の極大対蹠部分群に同型に写され、G の極大対蹠部分群の G 共役類と G' の極大対蹠部分群の G' 共役類は π により一対一に対応する。さらに、$\ker(\pi) \subset G_0$ が成り立つときは、G の極大対蹠部分群の G_0 共役類と G' の極大対蹠部分群の G'_0 共役類は π により一対一に対応する。

定理 3.7 は次の Chen-Nagano の結果をコンパクト Lie 群の場合に精密化したものと言える。

命題 3.8 ([1] Proposition 3.1)**.** *One has* $\#_2 M' = \#_2 M$*, if there exists a* k*-fold covering morphism* $f : M' \to M$ *between compact Riemannian symmetric spaces and* k *is odd.*

4 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

この節では例として $U(n)$ の被覆準同型写像 $\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ を扱う。ここで、$\mathbb{Z}_\mu = \{\alpha 1_n \mid \alpha^\mu = 1\}$ は $U(n)$ の中心の部分群である。$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ はコンパクト Lie 群であり、自然な射影 $\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は μ 重被覆準同型写像である。

命題 4.1. $U(n)$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役である。Δ_n は大対蹠部分群であり $\#_2 U(n) = 2^n$ である。

証明. Δ_n は $U(n)$ の極大対蹠部分群である。A を $U(n)$ の極大対蹠部分群とすると、A は可換だから同時対角化可能である。$a \in A$ は $a^2 = 1_n$ を満たすので、$g \in U(n)$ が存在して $gAg^{-1} \subset \Delta_n$ となる。A の極大性から $gAg^{-1} = \Delta_n$ が成り立つ。よって Δ_n は大対蹠部分群で $\#_2 U(n) = |\Delta_n| = 2^n$ である。 □

この命題と定理 3.7 により、μ が奇数の場合の $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類結果を得る。

定理 4.2. μ が奇数ならば、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は $\pi_n(\Delta_n)$ $(\cong \Delta_n)$ に共役である。$\pi_n(\Delta_n)$ は大対蹠部分群であり $\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu = 2^n$ である。

μ が偶数の場合の $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類結果は、μ が奇数の場合に比べて複雑である。μ が偶数の場合の結果を述べるために必要な記号を準備する。1_m で m 次単位行列を表す。

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in O(2)$$

とおく。

$$D[4] := \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2)$$

は正方形を不変にする二面体群である。自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の k 乗と奇数 l の積に分解し、$0 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s に対して

$$\begin{aligned} D(s,n) &:= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \\ &= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4]\,(1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \subset O(n) \end{aligned}$$

とおく。$D(s,n)$ の位数は $|D(s,n)| = 2^{2s+2^{k-s}\cdot l}$ である。

定理 4.3 ([3] Theorem 5.1)**.** θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。μ が偶数ならば、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n が奇数のとき: $\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$.

(2) n が偶数のとき: $\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$, ただし、$s=k-1, n=2^k$ の場合は除外する。

$s=k-1, n=2^k$ の場合は、$\Delta_2 = \{\pm 1_2, \pm I_1\} \subsetneq D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\}$ であることから、

$$D(k-1,2^k) = \underbrace{D[4]\otimes\cdots\otimes D[4]}_{k-1} \otimes \Delta_2 \subsetneq D(k,2^k) = \underbrace{D[4]\otimes\cdots\otimes D[4]}_{k}$$

となるので $D(k-1,2^k)$ は極大ではないため除外する。

$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n), \pi_n(\{1,\theta\}D(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$ に θ が含まれているが、一般に $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の任意の極大対蹠部分群は $\pi_n(\theta 1_n)$ を含むので、それを説明する。$\theta 1_n$ は $U(n)$ の中心の元であり、$\pi_n(\theta 1_n)$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の中心の元である。$\ker(\pi_n) = \{1_n, \theta^2 1_n, \ldots, \theta^{2\mu-2}1_n\}$ に注意すると、$\pi_n(\theta 1_n)^2 = \pi_n((\theta 1_n)^2) = \pi_n(\theta^2 1_n) = \pi_n(1_n)$ となり、$\pi_n(\theta 1_n)$ は対合的である。A を $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群とすると、$\pi_n(\theta 1_n)$ は A の任意の元と可換で対合的な $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の元なので、A の極大性から $\pi_n(\theta 1_n) \in A$ である。よって $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の任意の極大対蹠部分群は $\pi_n(\theta 1_n)$ を含む。$\theta^\mu = -1$ に注意すると、μ が奇数 $(\mu = 2m+1)$ のとき、

$$\pi_n(\theta 1_n) = \pi_n(\theta^{2m}\theta 1_n) = \pi_n(\theta^\mu 1_n) = \pi_n(-1_n)$$

である。

系 4.4. μ が偶数のとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の大対蹠部分群とその位数 $\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は次の通り。

(1) n が奇数のとき: $\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$, $\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu = 2^n$.

(2) n が偶数のとき: $n=2$ のとき $\pi_2(\{1,\theta\}D[4])$, $\#_2 U(2)/\mathbb{Z}_\mu = 2^3 = 8$.
$n=4$ のとき $\pi_4(\{1,\theta\}D(2,4))$, $\#_2 U(4)/\mathbb{Z}_\mu = 2^5 = 32$.
$n \neq 2,4$ のとき $\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$, $\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu = 2^n$.

注意 4.5. μ が偶数、奇数のいずれの場合も $\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は [1] Proposition 5.2 で得られている。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[2] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., **115** (1989), 43–46.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, J. Lie Theory, **27** (2017), 801–829.

[4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of some classical compact symmetric spaces, Differ. Geom. Appl., **73** (2020), 101682.

[5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups and covering homomorphisms with odd degree, Int. Electron. J. Geom., **17** (2024), 153–156.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of some classical compact symmetric spaces II, in preparation.