
左不変計量のリッチ曲率が満たす恒等式
— 3次元の場合 —

阿賀岡 芳夫 (広島大学)

2024年12月3日

agaoka@hiroshima-u.ac.jp

井川 治さん, 田中 真紀子さん

ご還暦おめでとうございます

まず、私の昔話から

35年前に、東京理科大学で講演したことがあります

「曲率と不変式」 “東京理科大学微分幾何学研究会”

1989年7月12日

当時の東京理科大学の先生方

理学部

安達忠次, 安部直人, 池畠良, 大槻富之助,
小池直之, 増山元三郎, 山口誠一, …

理工学部

浅野啓三, 大森英樹, 木村俊房, 国沢清典,
小松醇郎, 佐々木重夫, 嶋田君枝, 古谷賢朗,
細井勉, 吉岡朗, …

「Prescribed curvature problem」を考えたい

リーマン計量 $g_{ij} \implies$ レビ・チビタ接続 $\nabla \implies$ 曲率 R^i_{jkl}

曲率 R^i_{jkl} の性質

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$$

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 \quad (\text{第一ビアンキの恒等式})$$

$$\nabla_m R^i_{jkl} + \nabla_k R^i_{jlm} + \nabla_l R^i_{jmk} = 0$$

(第二ビアンキの恒等式)

では逆に, これらの性質を満たすテンソル場 R^i_{jkl} が
与えられていたら, それはあるリーマン計量の定める
曲率テンソル場になっているか?

⇒

答は, 一般に「No」!!

問題: どのような条件を満たすテンソル場なら,
計量の定める曲率テンソル場になるのか?

Known results

2次元では、

J.L.Kazdan, F.E.Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. **99** (1974) 等

低次元のときの必要条件については、物理の人達の試み

論文は数多く出ているが、決定打はまだ出ていない...

(local, global, 低次元, 一般次元, それぞれについて)

今回は、この問題の左不変versionを考える

更に問題を限定して、リッチ曲率についての prescribed curvature problem を考えることにする

更に問題を限定して、3次元の場合を考えることにする

リッチ曲率の場合は, 決定打が既に得られている

D.M.DeTurck, Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: Local theory, Inv. Math. **65** (1981)

主結果

対称テンソル T_{ij} が非退化なら, 局所的にあるリーマン計量 g が存在して $\text{Ric}_g = T$ となる (次元 ≥ 3)

等質空間・リー群の場合, 事情はかなり異なる
(\implies これについて, 次ページ以降で説明します)

だが, 最近では $\text{Ric}_g = cT$ となる計量 g と定数 $c > 0$
の存在に関する研究が多い

R.M.Arroyo, T.Buttsworth, M.D.Gould, A.M.Krishnan,
J.Lauret, A.Pulemotov, C.E.Will, W.Ziller, \dots

◎ 今回は, もともとの $\text{Ric}_g = T$ について考察します

Formulation (一般次元の多様体, 局所座標表示)

$$g_{ij} : \underline{\text{擬}}\text{リーマン計量}, \quad \sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

Γ_{jk}^i : レビ・チビタ接続

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right), \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

R_{jkl}^i : 曲率

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x_l} + \sum_m (\Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i)$$

R_{ij} : リッチ曲率

$$R_{ij} = \sum_k R_{ikj}^k, \quad R_{ij} = R_{ji}$$

重要な性質

計量を定数倍しても, レビ・チビタ接続は変わらない

従って, 曲率, リッチ曲率も変わらない

しかし $\varphi_x : S_{nd}^2(T_x^*M) \longrightarrow S^2(T_x^*M) \quad (x \in M)$

$$\varphi_x(g_{ij}) = R_{ij}$$

という写像が定まるわけではない! (S_{nd}^2 : 非退化)

何故なら, リッチ曲率 R_{ij} を計算するには計量 g_{ij} の
2階微分までの情報が必要

ところが, リー群の左不変計量の場合は, 上の写像が
定まり, φ の像の余次元は1次元以上ある

⇒ 像の定義方程式は, 左不変計量のリッチ曲率が
満たすべき恒等式を与える

リー群上の左不変計量の場合

擬リーマン計量 g から定まるレビ・チビタ接続 ∇ :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)$$

左不変ベクトル場からなる基底 $\{X_1, \dots, X_n\}$ を使うと

$$2 \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \sum_l (c_{ij}^l g_{lk} + c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li})$$

$$\text{ただし, } \nabla_{X_i} X_j = \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l, \quad [X_i, X_j] = \sum_l c_{ij}^l X_l$$

両辺に g^{km} をかけて, m について和をとる
(以下, アインシュタインの記法を使う)

$$2\Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = (c_{ij}^l g_{lk} + c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li}) g^{km}$$

\implies

$$2\Gamma_{ij}^l \delta_l^m = c_{ij}^l \delta_l^m + (c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li}) g^{km} \quad \text{より}$$

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} c_{ij}^m + \frac{1}{2} (c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li}) g^{km}$$

今の場合, 一般に $\Gamma_{ij}^m \neq \Gamma_{ji}^m$ であることに注意する

曲率は

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{[X_i, X_j]} X_k$$

$$\text{より } R^l_{kij} = \Gamma^l_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} - c^m_{ij} \Gamma^l_{mk}$$

リッチ曲率は

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = \Gamma^k_{km} \Gamma^m_{ji} - \Gamma^k_{jm} \Gamma^m_{ki} - c^m_{kj} \Gamma^k_{mi}$$

\implies

$$\varphi_c : S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*) \quad \varphi_c(g) = \text{「リッチ曲率」}$$

が定まる (\mathfrak{g} はリー群のリー代数, g は左不変計量)

φ_c はリー代数の構造定数 c^i_{jk} に依存する写像

改めて、計量 g を定数倍しても、 Γ_{jk}^i は不変曲率、リッチ曲率も不変だから

$$\varphi_c(kg) = \varphi_c(g) \quad (k \neq 0)$$

従って、 $\text{Im } \varphi_c \subset S^2(\mathfrak{g}^*)$ の余次元は1次元以上ある

⇒ 像の定義方程式は、左不変計量のリッチ曲率が満たすべき恒等式を与える

⇒ これが求まれば、prescribed Ricci curvature problem が部分的に解けたことになる!

$\varphi_c : (g_{ij}) \mapsto (R_{kl})$ は (c_{qr}^p) に依存した写像
つまり

$$R_{kl} = \text{「} g_{ij} \text{ と } c_{qr}^p \text{ 達の関数」}$$

この $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の等式から g_{ij} 達を消去して、
 R_{kl} と c_{qr}^p の関係式を導き出せば、それが φ_c の像の
定義方程式になる

($\text{Im } \varphi_c \subset S^2(\mathfrak{g}^*)$ は余次元1以上あることが分かっているから、このような関係式は必ず存在する!)

しかし, φ_c は複雑な写像 (逆行列 g^{km} が現れるため)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}c_{ij}^m + \frac{1}{2}(c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li})g^{km} \text{ を}$$

$$R_{ij} = R_{ikj}^k = \Gamma_{km}^k \Gamma_{ji}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{ki}^m - c_{kj}^m \Gamma_{mi}^k \text{ に代入}$$

$$g^{km} = \frac{g_{ij} \text{ の } n-1 \text{ 次式}}{|g|}, \quad |g| = \det(g_{ij})$$

一般に, φ_c の像の「定義方程式」は捉え難い!!

(\because この式から g_{ij} を消去して, R_{kl} と c_{qr}^p の式を
求めるのだが, 消去する変数の個数が多くて,
かつ式の次数が高い)

2次元のときは簡単

$$[X_1, X_2] = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 \text{ とおくと}$$

$$R_{jkl}^i = k (\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk})$$

$$\text{ただし, } k = -\frac{1}{|g|} \{ (c_{12}^1)^2 g_{11} + 2 c_{12}^1 c_{12}^2 g_{12} + (c_{12}^2)^2 g_{22} \}$$

となり, リッチ曲率 $R_{ij} = k g_{ij}$ は恒等式

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{vmatrix} + \{ (c_{12}^1)^2 R_{11} + 2 c_{12}^1 c_{12}^2 R_{12} + (c_{12}^2)^2 R_{22} \} = 0$$

を満たす. しかし, 3次元以上ではこう簡単にはゆかない

「群作用」を利用して、定義方程式をつかまえよう!

群 $GL(n, \mathbf{R})$ が \mathfrak{g} (n 次元リー代数) に作用している

\implies

$g_{ij}, R_{kl} \in S^2(\mathfrak{g}^*)$ や $c_{qr}^p \in \wedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ にも $GL(n, \mathbf{R})$ は自然に作用する

従って、多項式環 $\mathbf{R}[g_{ij}], \mathbf{R}[g_{ij}, c_{qr}^p]$ にも $GL(n, \mathbf{R})$ は作用している

また、 φ_c は $GL(n, \mathbf{R})$ -同変写像

$$\text{i.e., } \varphi_{A \cdot c}(A \cdot g) = A \cdot \varphi_c(g) \quad (A \in GL(n, \mathbf{R}))$$

話はここから3次元

3次元 ($n = 3$) の場合に, 多項式環 $\mathbf{R}[g_{ij}, c_{qr}^p]$ の $GL(3, \mathbf{R})$ -相対不変式をいくつか求めてみる

ここに,

$f \in \mathbf{R}[g_{ij}, c_{qr}^p]$ が $GL(3, \mathbf{R})$ -相対不変式

$$\iff A \cdot f = |A|^k f \quad (\exists k \in \mathbf{Z}, \forall A \in GL(3, \mathbf{R}))$$

相対不変式 1

$$c = \begin{pmatrix} c_{23}^1 & c_{23}^2 & c_{23}^3 \\ c_{31}^1 & c_{31}^2 & c_{31}^3 \\ c_{12}^1 & c_{12}^2 & c_{12}^3 \end{pmatrix}, \quad |c| = \det c$$

$A \in GL(3, \mathbf{R})$ に対して

$$A \cdot c = \begin{pmatrix} (Ac)_{23}^1 & (Ac)_{23}^2 & (Ac)_{23}^3 \\ (Ac)_{31}^1 & (Ac)_{31}^2 & (Ac)_{31}^3 \\ (Ac)_{12}^1 & (Ac)_{12}^2 & (Ac)_{12}^3 \end{pmatrix} \quad \text{となる}$$

ここに, $(Ac)_{23}^1 = A[A^{-1}X_2, A^{-1}X_3]$ の X_1 成分

$$\implies \quad |A \cdot c| = |A|^{-1} |c|$$

相対不変式 2

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad |g| = \det g$$

$A \in GL(3, \mathbf{R})$ に対して

$$A \cdot g = \begin{pmatrix} (Ag)_{11} & (Ag)_{12} & (Ag)_{13} \\ (Ag)_{12} & (Ag)_{22} & (Ag)_{23} \\ (Ag)_{13} & (Ag)_{23} & (Ag)_{33} \end{pmatrix} \quad \text{となる}$$

$$\text{ここに, } (Ag)_{11} = g(A^{-1}X_1, A^{-1}X_1)$$

$$\implies \quad |A \cdot g| = |A|^{-2}|g|$$

相对不变式 3

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \mathfrak{S}_{ijk} \sum_{\alpha} c_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} \\ &= c_{23}^1 g_{11} + c_{31}^2 g_{22} + c_{12}^3 g_{33} + (c_{31}^1 + c_{23}^2) g_{12} \\ &\quad + (c_{12}^2 + c_{31}^3) g_{23} + (c_{23}^3 + c_{12}^1) g_{31} \\ &= \text{Tr}(c g) \end{aligned}$$

$$\implies A \cdot I_{1,1} = |A|^{-1} I_{1,1}$$

相对不变式 4

$$\begin{aligned}
 I_{2,2} &= -\frac{1}{4} \sum \varepsilon(i_1, i_2, i_3) \varepsilon(j_1, j_2, j_3) c_{i_1 i_2}^\alpha c_{i_3 j_1}^\beta g_{\alpha j_2} g_{\beta j_3} \\
 &= (c_{13}^1 c_{23}^2 - c_{23}^1 c_{13}^2) (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) + (c_{23}^1 c_{12}^3 \\
 &\quad - c_{12}^1 c_{23}^3) (g_{11} g_{33} - g_{13}^2) + (c_{12}^2 c_{13}^3 - c_{13}^2 c_{12}^3) \\
 &\quad (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) + (c_{23}^1 c_{12}^2 - c_{12}^1 c_{23}^2 + c_{13}^1 c_{23}^3 \\
 &\quad - c_{23}^1 c_{13}^3) (g_{11} g_{23} - g_{12} g_{13}) + (c_{13}^1 c_{12}^2 - c_{12}^1 c_{13}^2 \\
 &\quad + c_{23}^2 c_{13}^3 - c_{13}^2 c_{23}^3) (g_{13} g_{22} - g_{12} g_{23}) + (c_{12}^1 c_{13}^3 \\
 &\quad - c_{13}^1 c_{12}^3 + c_{23}^2 c_{12}^3 - c_{12}^2 c_{23}^3) (g_{12} g_{33} - g_{13} g_{23}) \\
 &= |c g| \operatorname{Tr} (c g)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A \cdot I_{2,2} = |A|^{-2} I_{2,2}
 \end{aligned}$$

多項式環 $\mathbf{R}[g_{ij}, c_{qr}^p]$ の相対不変式がこれらで生成されるかどうかは分からない

ただし, $\mathbf{R}[g_{ij}]$ の相対不変式は $|g|$ のべき乗で尽くされることはよく知られている

今は, この4個があれば十分

ここで、次に多項式環 $\mathbf{R}[\underline{R_{ij}}, c_{qr}^p]$ を考えよう

g_{ij} も R_{ij} も共に対称な2次共変テンソルだから
 $GL(3, \mathbf{R})$ -相対不変式は、全く同じ構造をしている

$$\text{相対不変式 } 2' : \quad |\text{Ric}| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{相対不変式 } 3' : \quad K_{1,1} = \text{Tr}(c \text{ Ric})$$

$$\text{相対不変式 } 4' : \quad K_{2,2} = |c \text{ Ric}| \text{Tr}(c \text{ Ric})^{-1}$$

この3つの相対不変式 $|\text{Ric}|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ の $\text{Ric} = (R_{ij})$ のところに $\varphi_c(g)$ を代入する

\implies

φ_c は $GL(3, \mathbf{R})$ -同変だから、代入後の式は $GL(3, \mathbf{R})$ -相対不変になる (ただし, 有理式になる)

$\because f(\text{Ric}, c)$ を相対不変式, $A \in GL(3, \mathbf{R})$ に対して $A \cdot f = |A|^k f$ を満たすとする. $F(g, c)$ を $F(g, c) = f(\varphi_c(g), c)$ で定義すると

$$(A \cdot F)(g, c) = F(A^{-1}g, A^{-1}c) = f(\varphi_{A^{-1}c}(A^{-1}g), A^{-1}c)$$
$$= f(A^{-1}\varphi_c(g), A^{-1}c) = (A \cdot f)(\varphi_c(g), c) = (|A|^k f)(\varphi_c(g), c)$$
$$= |A|^k (f(\varphi_c(g), c)) = |A|^k F(g, c) \quad \text{より, } A \cdot F = |A|^k F$$

⇒

ということは, 代入した後の $f(\varphi_c(g), c)$ は $\mathbf{R}[g_{ij}, c_{qr}^p]$ の相対不変式 $|c|, |g|, I_{1,1}, I_{2,2}$ を用いて表示できている可能性がある ($f = |\text{Ric}|, K_{1,1}, K_{2,2}$ のとき)

- 実際の計算はなかなか大変
計算機を使って実行する
- リー代数の型によって, 結果が異なる!

まず, unimodular の場合

$$|\text{Ric}| = \frac{1}{8|g|^2} (I_{1,1}^3 - 4I_{1,1}I_{2,2} + 8|c||g|)^2$$

$$K_{1,1} = \frac{1}{2|g|} (I_{1,1}^3 - 4I_{1,1}I_{2,2} + 12|c||g|)$$

$$K_{2,2} = -\frac{1}{4|g|^2} (I_{1,1}^3 - 4I_{1,1}I_{2,2} + 8|c||g|) \\ \times (I_{1,1}I_{2,2} - 6|c||g|)$$

$$\implies 2|\text{Ric}| = (K_{1,1} - 2|c|)^2$$

という恒等式が得られる!

$$|\text{Ric}| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_{1,1} = c_{23}^1 R_{11} + c_{31}^2 R_{22} + c_{12}^3 R_{33} + (c_{31}^1 + c_{23}^2) R_{12} \\ + (c_{12}^2 + c_{31}^3) R_{23} + (c_{23}^3 + c_{12}^1) R_{31}$$

で、恒等式 $2|\text{Ric}| = (K_{1,1} - 2|c|)^2$ が全ての計量に対して成り立つ (擬リーマン計量も含む)

\implies もしリッチ平坦な計量が存在するなら $|c| = 0$

$\iff |c| \neq 0$ なら, リッチ平坦な計量は存在しない

$$|c| = \begin{vmatrix} c_{23}^1 & c_{23}^2 & c_{23}^3 \\ c_{31}^1 & c_{31}^2 & c_{31}^3 \\ c_{12}^1 & c_{12}^2 & c_{12}^3 \end{vmatrix}$$

だから, $|c| = 0 \iff \dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2$

従って, 「 $\mathfrak{o}(3), \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ 上にはリッチ平坦な計量は存在しない」ことが即座に分かる

◎ 同じようなことが, 高次元で出来たら面白い!!

次に, solvable の場合

結果を述べるために, 少し準備が必要

\mathfrak{g} を nilpotent でない 3次元リー代数とする

X を \mathfrak{g} の generic な元とし, $\text{ad } X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ の固有値を

$0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ とすると, $\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ は X のとり方に

よらずに定まる. この値を $\chi(\mathfrak{g})$ と表すことにする

(ただし, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$ のときは $\chi(\mathfrak{g}) = \infty$ とおく)

(cf. Kirillov-Neretin, Tasaki-Umehara)

$\chi(\mathfrak{g})$ の値

		χ
\mathbf{R}^3		—
\mathfrak{h}_3	$[X_1, X_2] = X_3$	—
\mathfrak{r}_3	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3, [X_1, X_3] = X_3$	4
$\mathfrak{r}_{3,k}$	$[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = kX_3 \quad (k \leq 1)$	$\frac{(k+1)^2}{k}$
$\mathfrak{r}'_{3,k}$	$[X_1, X_2] = kX_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + kX_3 \quad (k \geq 0)$	$\frac{4k^2}{k^2+1}$
$\mathfrak{o}(3)$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1,$ $[X_3, X_1] = X_2$	0
$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$	$[X_1, X_2] = -X_3, [X_2, X_3] = X_1,$ $[X_3, X_1] = X_2$	0

3次元リー代数の模式図

orbit の次元

6

$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}), \mathfrak{o}(3) = \Sigma_{\text{unimodular}}$

5

\mathfrak{r}_3

$\mathfrak{r}_{3,-1}$

$\mathfrak{r}_{3,k} (k \neq \pm 1)$

$= \Sigma_{\text{solv}}$

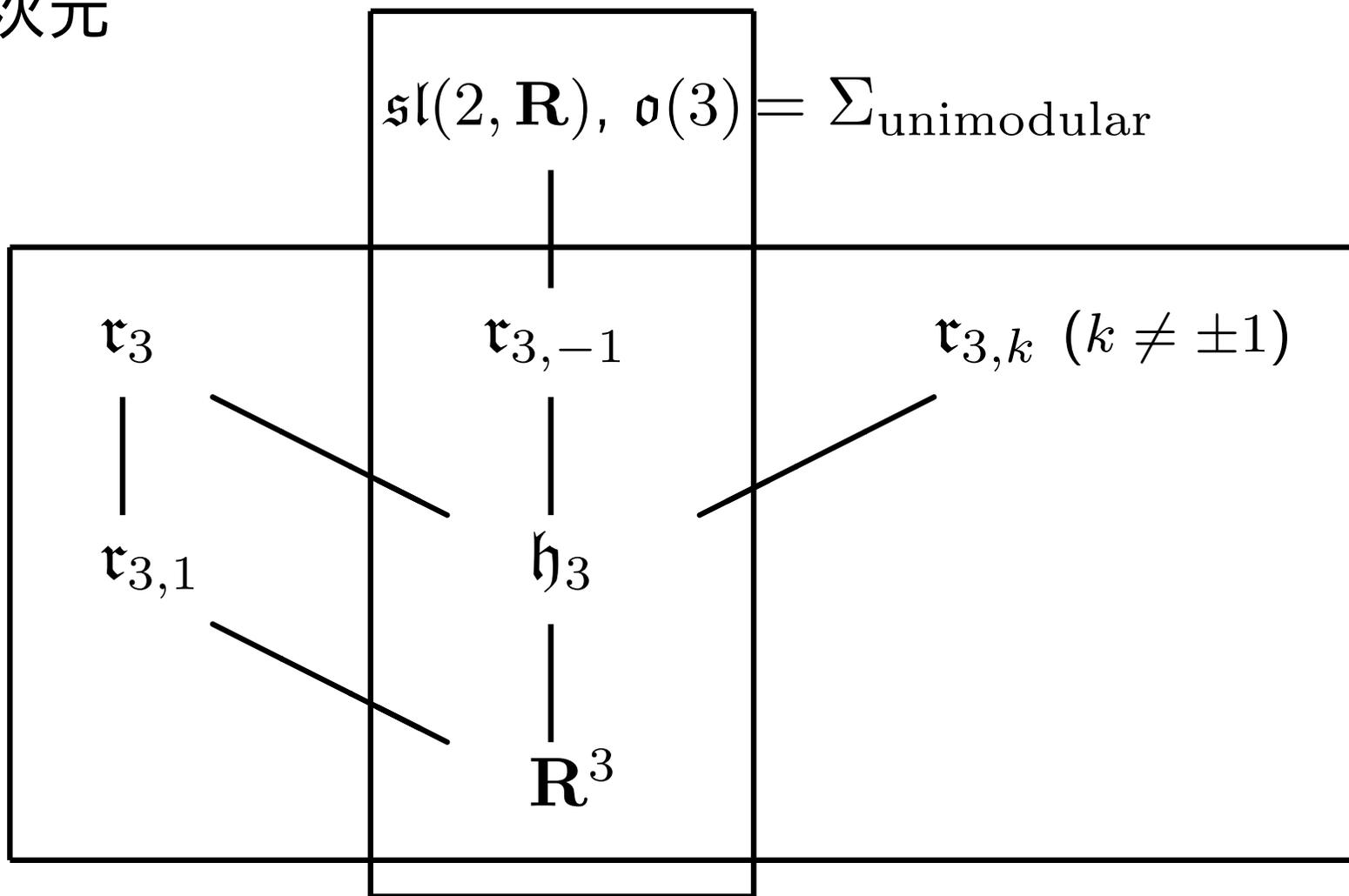
3

$\mathfrak{r}_{3,1}$

\mathfrak{h}_3

0

\mathbf{R}^3



k も $\chi(\mathfrak{g})$ も, 連続変形するリー代数の同型類を類別する量であるが,

k はリー代数の標準形のとり方に依存するパラメータ

$\chi(\mathfrak{g})$ は標準形のとり方, 基底のとり方に依存しない,
リー代数の同型類により定まる不変量

(注) : $\chi(\mathfrak{g})$ の値が等しいリー代数は同型になる
というわけではない

$\varphi_c(g)$ を $|\text{Ric}|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ に代入すると

$$|\text{Ric}| = \frac{1}{8|g|^2} \{I_{1,1}^2 + 2(\chi - 2)I_{2,2}\} \\ \times \{I_{1,1}^4 + 2(\chi - 2)I_{1,1}^2I_{2,2} - 4\chi I_{2,2}^2\}$$

$$K_{1,1} = \frac{1}{2|g|} I_{1,1}(I_{1,1}^2 - 4I_{2,2})$$

$$K_{2,2} = -\frac{1}{4|g|^2} I_{2,2} \{I_{1,1}^4 + 2(\chi - 2)I_{1,1}^2I_{2,2} - 4\chi I_{2,2}^2\}$$

\implies solvable のとき

$$\begin{aligned} & 2 \{ |\text{Ric}| + (\chi - 2)K_{2,2} \} (|\text{Ric}| + \chi K_{2,2})^2 \\ &= K_{1,1}^2 \{ |\text{Ric}|^2 + (\chi - 2)|\text{Ric}|K_{2,2} - \chi K_{2,2}^2 \} \end{aligned}$$

という恒等式が得られる! (これは R_{ij} の9次式)

ただし, \mathbf{R}^3 , $\mathfrak{h}_3(\text{nilpotent})$, $\mathfrak{r}_{3,0}(\chi = \infty)$ を除く

solvable かつ unimodular のときは, $\chi = 0$ なので

$$2|\text{Ric}|^2(|\text{Ric}| - 2K_{2,2}) = K_{1,1}^2|\text{Ric}|(|\text{Ric}| - 2K_{2,2}),$$

つまり

$$|\text{Ric}|(2|\text{Ric}| - K_{1,1}^2)(|\text{Ric}| - 2K_{2,2}) = 0$$

となる. これは unimodular のときの恒等式

$$2|\text{Ric}| = (K_{1,1} - 2|c|)^2$$

において $|c| = 0$ とした $2|\text{Ric}| = K_{1,1}^2$ から導かれる

(3次元のときは

$$\mathfrak{g} \text{ が solvable} \iff \dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2 \iff |c| = 0)$$

\mathbf{R}^3 , \mathfrak{h}_3 (nilpotent), $\mathfrak{r}_{3,0}$ ($\chi = \infty$) の場合

- \mathbf{R}^3 : 左不変計量は, すべてリッチ平坦
- \mathfrak{h}_3 : $2|\text{Ric}| = K_{1,1}^2$ (と $K_{2,2} = 0$)
- $\mathfrak{r}_{3,0}$: ($K_{2,2} = 0$)

\mathfrak{h}_3 と $\mathfrak{r}_{3,0}$ の場合, $K_{2,2}$ の係数はすべて0になるので,
これはリッチ曲率の恒等式ではなく, 自明な式

$\varphi_c : S_{nd}^2(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*)$ の微分の階数について

	$\text{rank } (\varphi_c)_{*g}$
\mathbf{R}^3	0
\mathfrak{h}_3	5
\mathfrak{r}_3	5
$\mathfrak{r}_{3,k}$	5
$\mathfrak{r}'_{3,k}$	5
$\mathfrak{o}(3)$	5
$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$	5

$r_{3,0}$ ($\chi = \infty$) のときは, 特別扱いが必要

$r_{3,k}$ のときは

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= (c_{13}^1 c_{23}^2 - c_{23}^1 c_{13}^2)(R_{11}R_{22} - R_{12}^2) + \dots \\ &= k \times (R_{ij} \text{ の 2 次式}) \end{aligned}$$

と k でくくれる. (だから, $k = 0$ のとき $K_{2,2} = 0$)

$\implies K_{2,2} = k \times \bar{K}_{2,2}$ とおくと, $r_{3,0}$ のときの恒等式は

$$2(|\text{Ric}| + \bar{K}_{2,2})^2 = K_{1,1}^2 |\text{Ric}| \quad \text{となる}$$

$\mathfrak{r}_{3,1}$ でも特別なことが起こっている

- $\mathfrak{r}_{3,1}$: $|\text{Ric}| + 2K_{2,2} = 0$ (と $K_{1,1} = 0$: 自明な式)

solvable のときの恒等式に $\chi = 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} 2|\text{Ric}|(|\text{Ric}| + 2K_{2,2})^2 &= K_{1,1}^2(|\text{Ric}|^2 - 2K_{2,2}^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

一般に、リー代数が退化すると、リッチ曲率も退化して 0 に近づく。リッチ曲率の恒等式も退化して、多項式としての次数は低くなる。

実は、いつでも定曲率で $R_{jkl}^i = -\frac{I_{2,2}}{|g|} (\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk})$

4次元の場合

多項式環 $\mathbf{R}[g_{ij}, c_{qr}^p]$ の $GL(4, \mathbf{R})$ -相対不変式が, 十分な
個数見つければ, 同じ方法で恒等式を求めることは可能

ただし4次元の場合は, リー代数の作る代数的集合は
 $\wedge^2(\mathbf{R}^*)^4 \otimes \mathbf{R}^4$ の中で4個の既約成分に分かれる

(3次元の場合は, unimodular と solvable の2個の既約
成分に分かれていた. ちなみに, 5次元では7個, 6次元
では17個に分かれる...)

例えば, $\mathbf{R}[c_{qr}^p]$ の $GL(4, \mathbf{R})$ -相対不変式について

- 多項式としての次数は, 必ず 4 の倍数になる
- 4 次の相対不変式は 2 個存在する

⇒ ところが, それは大変長い式になる!

3次元のときのように, この相対不変式がリッチ平坦計量が存在するための obstruction の働きをしてくれる可能性もあるので, 大切な式なのだが...

例えばその一つは

$$\begin{aligned} & (c_{12}^1)^2 c_{13}^2 c_{24}^2 - (c_{12}^1)^2 c_{14}^2 c_{23}^2 + (c_{12}^1)^2 c_{34}^2 c_{13}^3 + (c_{12}^1)^2 c_{34}^2 c_{14}^4 \\ & - c_{12}^1 c_{13}^1 c_{12}^2 c_{24}^2 + c_{12}^1 c_{13}^1 c_{13}^2 c_{24}^3 - c_{12}^1 c_{13}^1 c_{14}^2 c_{23}^3 - c_{12}^1 c_{13}^1 c_{23}^2 \\ & c_{14}^3 - c_{12}^1 c_{13}^1 c_{24}^2 c_{14}^4 - c_{12}^1 c_{13}^1 c_{34}^2 c_{12}^3 + c_{12}^1 c_{13}^1 c_{13}^3 c_{34}^3 + c_{12}^1 c_{13}^1 \\ & c_{34}^3 c_{14}^4 + c_{12}^1 c_{14}^1 c_{12}^2 c_{23}^2 + c_{12}^1 c_{14}^1 c_{13}^2 c_{24}^4 - c_{12}^1 c_{14}^1 c_{14}^2 c_{23}^4 + c_{12}^1 \\ & c_{14}^1 c_{23}^2 c_{13}^3 + c_{12}^1 c_{14}^1 c_{24}^2 c_{13}^4 - c_{12}^1 c_{14}^1 c_{34}^2 c_{12}^4 + c_{12}^1 c_{14}^1 c_{13}^3 c_{34}^4 + \\ & c_{12}^1 c_{14}^1 c_{14}^4 c_{34}^4 + c_{12}^1 c_{23}^1 c_{12}^2 c_{14}^2 + c_{12}^1 c_{23}^1 c_{14}^2 c_{13}^3 + c_{12}^1 c_{23}^1 c_{14}^2 c_{14}^4 \\ & - c_{12}^1 c_{24}^1 c_{12}^2 c_{13}^2 - c_{12}^1 c_{24}^1 c_{13}^2 c_{13}^3 - c_{12}^1 c_{24}^1 c_{13}^2 c_{14}^4 - c_{12}^1 c_{34}^1 c_{12}^2 \\ & c_{13}^3 - c_{12}^1 c_{34}^1 c_{12}^2 c_{14}^4 - c_{12}^1 c_{34}^1 (c_{13}^3)^2 - 2c_{12}^1 c_{34}^1 c_{13}^3 c_{14}^4 - c_{12}^1 c_{34}^1 \\ & (c_{14}^4)^2 + c_{12}^1 c_{12}^2 c_{34}^2 c_{23}^3 + c_{12}^1 c_{12}^2 c_{34}^2 c_{24}^4 + c_{12}^1 c_{13}^2 c_{23}^2 c_{24}^3 - 2c_{12}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{13}^2 c_{24}^2 c_{23}^3 - c_{12}^1 c_{13}^2 c_{24}^2 c_{24}^4 - c_{12}^1 c_{13}^2 c_{24}^3 c_{34}^4 + c_{12}^1 c_{13}^2 c_{34}^3 c_{24}^4 + \\
& c_{12}^1 c_{14}^2 c_{23}^2 c_{23}^3 + 2c_{12}^1 c_{14}^2 c_{23}^2 c_{24}^4 - c_{12}^1 c_{14}^2 c_{24}^2 c_{23}^4 + c_{12}^1 c_{14}^2 c_{23}^3 \\
& c_{34}^4 - c_{12}^1 c_{14}^2 c_{34}^3 c_{23}^4 - c_{12}^1 (c_{23}^2)^2 c_{14}^3 + c_{12}^1 c_{23}^2 c_{24}^2 c_{13}^3 - c_{12}^1 c_{23}^2 \\
& c_{24}^2 c_{14}^4 - c_{12}^1 c_{23}^2 c_{34}^2 c_{12}^3 + c_{12}^1 c_{23}^2 c_{13}^3 c_{34}^3 + c_{12}^1 c_{23}^2 c_{14}^3 c_{34}^4 + c_{12}^1 \\
& (c_{24}^2)^2 c_{13}^4 - c_{12}^1 c_{24}^2 c_{34}^2 c_{12}^4 + c_{12}^1 c_{24}^2 c_{34}^3 c_{13}^4 + c_{12}^1 c_{24}^2 c_{14}^4 c_{34}^4 + \\
& c_{12}^1 c_{34}^2 c_{12}^3 c_{34}^4 - c_{12}^1 c_{34}^2 c_{13}^3 c_{23}^3 - c_{12}^1 c_{34}^2 c_{13}^3 c_{24}^4 - c_{12}^1 c_{34}^2 c_{23}^3 c_{14}^4 \\
& - c_{12}^1 c_{34}^2 c_{34}^3 c_{12}^4 - c_{12}^1 c_{34}^2 c_{14}^4 c_{24}^4 - (c_{13}^1)^2 c_{12}^2 c_{24}^3 - (c_{13}^1)^2 c_{12}^3 \\
& c_{34}^3 - (c_{13}^1)^2 c_{14}^3 c_{23}^3 - (c_{13}^1)^2 c_{24}^3 c_{14}^4 + c_{13}^1 c_{14}^1 c_{12}^2 c_{23}^3 - c_{13}^1 c_{14}^1 \\
& c_{12}^2 c_{24}^4 - c_{13}^1 c_{14}^1 c_{12}^3 c_{34}^4 + c_{13}^1 c_{14}^1 c_{13}^3 c_{23}^3 - c_{13}^1 c_{14}^1 c_{14}^3 c_{23}^4 + c_{13}^1 \\
& c_{14}^1 c_{24}^3 c_{13}^4 - c_{13}^1 c_{14}^1 c_{34}^3 c_{12}^4 - c_{13}^1 c_{14}^1 c_{14}^4 c_{24}^4 + c_{13}^1 c_{23}^1 c_{12}^2 c_{14}^3 + \\
& c_{13}^1 c_{23}^1 c_{13}^3 c_{14}^3 + c_{13}^1 c_{23}^1 c_{14}^3 c_{14}^4 + c_{13}^1 c_{24}^1 (c_{12}^2)^2 + c_{13}^1 c_{24}^1 c_{12}^2 c_{13}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2c_{13}^1c_{24}^1c_{12}^2c_{14}^4 + c_{13}^1c_{24}^1c_{13}^3c_{14}^4 + c_{13}^1c_{24}^1(c_{14}^4)^2 + c_{13}^1c_{34}^1c_{12}^2 \\
& c_{12}^3 + c_{13}^1c_{34}^1c_{12}^3c_{13}^3 + c_{13}^1c_{34}^1c_{12}^3c_{14}^4 - c_{13}^1c_{12}^2c_{23}^2c_{24}^3 + c_{13}^1c_{12}^2 \\
& c_{24}^2c_{23}^3 + c_{13}^1c_{12}^2c_{23}^3c_{34}^3 + c_{13}^1c_{12}^2c_{24}^3c_{34}^4 - c_{13}^1c_{13}^2c_{23}^3c_{24}^3 - c_{13}^1 \\
& c_{13}^2c_{24}^3c_{24}^4 + c_{13}^1c_{14}^2(c_{23}^3)^2 + c_{13}^1c_{14}^2c_{23}^3c_{24}^4 - 2c_{13}^1c_{23}^2c_{12}^3c_{34}^3 \\
& +c_{13}^1c_{23}^2c_{13}^3c_{24}^3 - c_{13}^1c_{23}^2c_{14}^3c_{23}^3 + c_{13}^1c_{23}^2c_{14}^3c_{24}^4 - c_{13}^1c_{23}^2c_{24}^3 \\
& c_{14}^4 - c_{13}^1c_{24}^2c_{12}^3c_{34}^4 - c_{13}^1c_{24}^2c_{14}^3c_{23}^4 + c_{13}^1c_{24}^2c_{24}^3c_{13}^4 - c_{13}^1c_{24}^2 \\
& c_{34}^3c_{12}^4 + c_{13}^1c_{34}^2c_{12}^3c_{23}^3 + c_{13}^1c_{34}^2c_{12}^3c_{24}^4 + c_{13}^1c_{12}^3c_{34}^3c_{34}^4 - c_{13}^1 \\
& c_{13}^3c_{24}^3c_{34}^4 + 2c_{13}^1c_{14}^3c_{23}^3c_{34}^4 - c_{13}^1c_{14}^3c_{34}^3c_{23}^4 - c_{13}^1c_{23}^3c_{34}^3c_{14}^4 + \\
& c_{13}^1c_{24}^3c_{34}^3c_{13}^4 + c_{13}^1c_{24}^3c_{14}^4c_{34}^4 - c_{13}^1(c_{34}^3)^2c_{12}^4 - c_{13}^1c_{34}^3c_{14}^4c_{24}^4 \\
& +(c_{14}^1)^2c_{12}^2c_{23}^4 + (c_{14}^1)^2c_{13}^3c_{23}^4 - (c_{14}^1)^2c_{12}^4c_{34}^4 + (c_{14}^1)^2c_{13}^4 \\
& c_{24}^4 - c_{14}^1c_{23}^1(c_{12}^2)^2 - 2c_{14}^1c_{23}^1c_{12}^2c_{13}^3 - c_{14}^1c_{23}^1c_{12}^2c_{14}^4 - c_{14}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{23}^1 (c_{13}^3)^2 - c_{14}^1 c_{23}^1 c_{13}^3 c_{14}^4 - c_{14}^1 c_{24}^1 c_{12}^2 c_{13}^4 - c_{14}^1 c_{24}^1 c_{13}^3 c_{13}^4 - \\
& c_{14}^1 c_{24}^1 c_{13}^4 c_{14}^4 + c_{14}^1 c_{34}^1 c_{12}^2 c_{12}^4 + c_{14}^1 c_{34}^1 c_{13}^3 c_{12}^4 + c_{14}^1 c_{34}^1 c_{12}^4 c_{14}^4 \\
& - c_{14}^1 c_{12}^2 c_{23}^2 c_{24}^4 + c_{14}^1 c_{12}^2 c_{24}^2 c_{23}^4 + c_{14}^1 c_{12}^2 c_{34}^3 c_{23}^4 + c_{14}^1 c_{12}^2 c_{24}^4 \\
& c_{34}^4 - c_{14}^1 c_{13}^2 c_{23}^3 c_{24}^4 - c_{14}^1 c_{13}^2 (c_{24}^4)^2 + c_{14}^1 c_{14}^2 c_{23}^3 c_{23}^4 + c_{14}^1 c_{14}^2 c_{23}^4 c_{24}^4 \\
& - c_{14}^1 c_{23}^2 c_{12}^3 c_{34}^4 - c_{14}^1 c_{23}^2 c_{14}^3 c_{23}^4 + c_{14}^1 c_{23}^2 c_{24}^3 c_{13}^4 - c_{14}^1 c_{23}^2 c_{34}^3 \\
& c_{12}^4 + c_{14}^1 c_{24}^2 c_{13}^3 c_{23}^4 - c_{14}^1 c_{24}^2 c_{23}^3 c_{13}^4 - 2c_{14}^1 c_{24}^2 c_{12}^4 c_{34}^4 + c_{14}^1 c_{24}^2 \\
& c_{13}^4 c_{24}^4 - c_{14}^1 c_{24}^2 c_{14}^4 c_{23}^4 + c_{14}^1 c_{34}^2 c_{23}^3 c_{12}^4 + c_{14}^1 c_{34}^2 c_{12}^4 c_{24}^4 + c_{14}^1 \\
& c_{12}^3 (c_{34}^4)^2 - c_{14}^1 c_{13}^3 c_{23}^3 c_{34}^4 + c_{14}^1 c_{13}^3 c_{34}^3 c_{23}^4 - c_{14}^1 c_{13}^3 c_{24}^4 c_{34}^4 + \\
& c_{14}^1 c_{14}^3 c_{23}^4 c_{34}^4 - c_{14}^1 c_{24}^3 c_{13}^4 c_{34}^4 - c_{14}^1 c_{34}^3 c_{12}^4 c_{34}^4 + 2c_{14}^1 c_{34}^3 c_{13}^4 \\
& c_{24}^4 - c_{14}^1 c_{34}^3 c_{14}^4 c_{23}^4 - c_{23}^1 c_{12}^2 c_{14}^2 c_{23}^3 - c_{23}^1 c_{12}^2 c_{14}^2 c_{24}^4 + c_{23}^1 c_{12}^2 \\
& c_{23}^2 c_{14}^3 + c_{23}^1 c_{12}^2 c_{24}^2 c_{14}^4 - c_{23}^1 c_{12}^2 c_{14}^3 c_{34}^4 + c_{23}^1 c_{12}^2 c_{34}^3 c_{14}^4 - c_{23}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{14}^2 c_{13}^3 c_{23}^3 - c_{23}^1 c_{14}^2 c_{13}^3 c_{24}^4 - c_{23}^1 c_{14}^2 c_{23}^3 c_{14}^4 - c_{23}^1 c_{14}^2 c_{14}^4 c_{24}^4 + \\
& c_{23}^1 c_{23}^2 c_{13}^3 c_{14}^4 + c_{23}^1 c_{23}^2 c_{14}^3 c_{14}^4 + c_{23}^1 c_{24}^2 c_{13}^3 c_{14}^4 + c_{23}^1 c_{24}^2 (c_{14}^4)^2 \\
& - c_{23}^1 c_{13}^3 c_{14}^3 c_{34}^4 + c_{23}^1 c_{13}^3 c_{34}^3 c_{14}^4 - c_{23}^1 c_{14}^3 c_{14}^4 c_{34}^4 + c_{23}^1 c_{34}^3 \\
& (c_{14}^4)^2 + c_{24}^1 c_{12}^2 c_{13}^2 c_{23}^3 + c_{24}^1 c_{12}^2 c_{13}^2 c_{24}^4 - c_{24}^1 c_{12}^2 c_{23}^2 c_{13}^3 - c_{24}^1 \\
& c_{12}^2 c_{24}^2 c_{13}^4 + c_{24}^1 c_{12}^2 c_{13}^3 c_{34}^4 - c_{24}^1 c_{12}^2 c_{34}^3 c_{13}^4 + c_{24}^1 c_{13}^2 c_{13}^3 c_{23}^3 + \\
& c_{24}^1 c_{13}^2 c_{13}^3 c_{24}^4 + c_{24}^1 c_{13}^2 c_{23}^3 c_{14}^4 + c_{24}^1 c_{13}^2 c_{14}^4 c_{24}^4 - c_{24}^1 c_{23}^2 (c_{13}^3)^2 \\
& - c_{24}^1 c_{23}^2 c_{13}^3 c_{14}^4 - c_{24}^1 c_{24}^2 c_{13}^3 c_{13}^4 - c_{24}^1 c_{24}^2 c_{13}^4 c_{14}^4 + c_{24}^1 (c_{13}^3)^2 \\
& c_{34}^4 - c_{24}^1 c_{13}^3 c_{34}^3 c_{13}^4 + c_{24}^1 c_{13}^3 c_{14}^4 c_{34}^4 - c_{24}^1 c_{34}^3 c_{13}^4 c_{14}^4 - c_{34}^1 \\
& (c_{12}^2)^2 c_{23}^3 - c_{34}^1 (c_{12}^2)^2 c_{24}^4 + c_{34}^1 c_{12}^2 c_{23}^2 c_{12}^3 + c_{34}^1 c_{12}^2 c_{24}^2 c_{12}^4 - \\
& c_{34}^1 c_{12}^2 c_{12}^3 c_{34}^4 - c_{34}^1 c_{12}^2 c_{13}^3 c_{23}^3 - c_{34}^1 c_{12}^2 c_{13}^3 c_{24}^4 - c_{34}^1 c_{12}^2 c_{23}^3 c_{14}^4 \\
& + c_{34}^1 c_{12}^2 c_{34}^3 c_{12}^4 - c_{34}^1 c_{12}^2 c_{14}^4 c_{24}^4 + c_{34}^1 c_{23}^2 c_{12}^3 c_{13}^3 + c_{34}^1 c_{23}^2 c_{12}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{14}^4 + c_{34}^1 c_{24}^2 c_{13}^3 c_{12}^4 + c_{34}^1 c_{24}^2 c_{12}^4 c_{14}^4 - c_{34}^1 c_{12}^3 c_{13}^3 c_{34}^4 - c_{34}^1 c_{12}^3 \\
& c_{14}^4 c_{34}^4 + c_{34}^1 c_{13}^3 c_{34}^3 c_{12}^4 + c_{34}^1 c_{34}^3 c_{12}^4 c_{14}^4 + c_{12}^2 c_{23}^2 c_{23}^3 c_{34}^3 + c_{12}^2 \\
& c_{23}^2 c_{34}^3 c_{24}^4 + c_{12}^2 c_{24}^2 c_{23}^3 c_{34}^4 + c_{12}^2 c_{24}^2 c_{24}^4 c_{34}^4 - c_{12}^2 c_{34}^2 (c_{23}^3)^2 - \\
& 2c_{12}^2 c_{34}^2 c_{23}^3 c_{24}^4 - c_{12}^2 c_{34}^2 (c_{24}^4)^2 - c_{13}^2 c_{23}^2 c_{23}^3 c_{24}^3 - c_{13}^2 c_{23}^2 c_{24}^3 \\
& c_{24}^4 + c_{13}^2 c_{24}^2 (c_{23}^3)^2 + c_{13}^2 c_{24}^2 c_{23}^3 c_{24}^4 + c_{13}^2 c_{23}^3 c_{24}^3 c_{34}^4 - c_{13}^2 c_{23}^3 \\
& c_{34}^3 c_{24}^4 + c_{13}^2 c_{24}^3 c_{24}^4 c_{34}^4 - c_{13}^2 c_{34}^3 (c_{24}^4)^2 - c_{14}^2 c_{23}^2 c_{23}^3 c_{24}^4 - c_{14}^2 \\
& c_{23}^2 (c_{24}^4)^2 + c_{14}^2 c_{24}^2 c_{23}^3 c_{23}^4 + c_{14}^2 c_{24}^2 c_{23}^4 c_{24}^4 - c_{14}^2 (c_{23}^3)^2 c_{34}^4 + \\
& c_{14}^2 c_{23}^3 c_{34}^3 c_{23}^4 - c_{14}^2 c_{23}^3 c_{24}^4 c_{34}^4 + c_{14}^2 c_{34}^3 c_{23}^4 c_{24}^4 - (c_{23}^2)^2 c_{12}^3 c_{34}^3 \\
& + (c_{23}^2)^2 c_{13}^3 c_{24}^3 + (c_{23}^2)^2 c_{14}^3 c_{24}^4 - c_{23}^2 c_{24}^2 c_{12}^3 c_{34}^4 - c_{23}^2 c_{24}^2 c_{13}^3 \\
& c_{23}^3 - c_{23}^2 c_{24}^2 c_{14}^3 c_{23}^4 + c_{23}^2 c_{24}^2 c_{24}^3 c_{13}^4 - c_{23}^2 c_{24}^2 c_{34}^3 c_{12}^4 + c_{23}^2 c_{24}^2 \\
& c_{14}^4 c_{24}^4 + c_{23}^2 c_{34}^3 c_{12}^3 c_{23}^3 + c_{23}^2 c_{34}^3 c_{12}^4 c_{24}^4 + c_{23}^2 c_{12}^3 c_{34}^3 c_{34}^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2c_{23}^2 c_{13}^3 c_{24}^3 c_{34}^4 + c_{23}^2 c_{13}^3 c_{34}^3 c_{24}^4 + c_{23}^2 c_{14}^3 c_{23}^3 c_{34}^4 - c_{23}^2 c_{14}^3 c_{34}^3 \\
& c_{23}^4 - c_{23}^2 c_{14}^3 c_{24}^4 c_{34}^4 + c_{23}^2 c_{24}^3 c_{34}^3 c_{13}^4 - c_{23}^2 (c_{34}^3)^2 c_{12}^4 + c_{23}^2 c_{34}^3 \\
& c_{14}^4 c_{24}^4 - (c_{24}^2)^2 c_{23}^3 c_{13}^4 - (c_{24}^2)^2 c_{12}^4 c_{34}^4 - (c_{24}^2)^2 c_{14}^4 c_{23}^4 + c_{24}^2 \\
& c_{34}^2 c_{23}^3 c_{12}^4 + c_{24}^2 c_{34}^2 c_{12}^4 c_{24}^4 + c_{24}^2 c_{12}^3 (c_{34}^4)^2 + c_{24}^2 c_{13}^3 c_{23}^3 c_{34}^4 + \\
& c_{24}^2 c_{14}^3 c_{23}^4 c_{34}^4 - c_{24}^2 c_{23}^3 c_{34}^3 c_{13}^4 + c_{24}^2 c_{23}^3 c_{14}^4 c_{34}^4 - c_{24}^2 c_{24}^3 c_{13}^4 c_{34}^4 \\
& - c_{24}^2 c_{34}^3 c_{12}^4 c_{34}^4 + c_{24}^2 c_{34}^3 c_{13}^4 c_{24}^4 - 2c_{24}^2 c_{34}^3 c_{14}^4 c_{23}^4 - c_{34}^2 c_{12}^3 c_{23}^3 \\
& c_{34}^4 - c_{34}^2 c_{12}^3 c_{24}^4 c_{34}^4 + c_{34}^2 c_{23}^3 c_{34}^3 c_{12}^4 + c_{34}^2 c_{34}^3 c_{12}^4 c_{24}^4 + c_{13}^3 c_{24}^3 \\
& (c_{34}^4)^2 - c_{13}^3 c_{34}^3 c_{24}^4 c_{34}^4 - c_{14}^3 c_{23}^3 (c_{34}^4)^2 + c_{14}^3 c_{34}^3 c_{23}^4 c_{34}^4 + c_{23}^3 \\
& c_{34}^3 c_{14}^4 c_{34}^4 - c_{24}^3 c_{34}^3 c_{13}^4 c_{34}^4 + (c_{34}^3)^2 c_{13}^4 c_{24}^4 - (c_{34}^3)^2 c_{14}^4 c_{23}^4
\end{aligned}$$

となる. この式の, 簡単な「表示法」はあるのだろうか?

$\mathbf{R}[c_{qr}^p]$ の $GL(n, \mathbf{R})$ -相対不変式の個数

$n = 3$ のとき, 2個

$n = 4$ のとき, 2個

$n = 5$ のとき, 4個

$n = 6$ のとき, 8個

$n = 7$ のとき, 21個

$n = 8$ のとき, 47個

⋮

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) が n の分割のとき, plethysm $S_\lambda(S_{11}) = S_\lambda \circ S_{11} = \{1, 1\} \otimes \{\lambda\}$ の中の $S_{\lambda+1} = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1)$ の重複度が相対不変式の個数になる

しかし, 一般に plethysm の分解公式は知られていないので, 重複度は計算してみないことには分からない

$n = 3$ のときのもう一つの3次相対不変式は

$$\begin{aligned} & (c_{12}^1)^2 c_{13}^2 - c_{12}^1 c_{13}^1 c_{12}^2 + c_{12}^1 c_{13}^1 c_{13}^3 + c_{12}^1 c_{12}^2 c_{23}^2 \\ & - 2c_{12}^1 c_{13}^2 c_{23}^3 + 3c_{12}^1 c_{23}^2 c_{13}^3 - (c_{13}^1)^2 c_{12}^3 + 3c_{13}^1 c_{12}^2 c_{23}^3 \\ & - 2c_{13}^1 c_{23}^2 c_{12}^3 + c_{13}^1 c_{13}^3 c_{23}^3 - c_{23}^1 (c_{12}^2)^2 - 2c_{23}^1 c_{12}^2 c_{13}^3 \\ & - c_{23}^1 (c_{13}^3)^2 + c_{12}^2 c_{23}^2 c_{23}^3 + c_{13}^2 (c_{23}^3)^2 - (c_{23}^2)^2 c_{12}^3 \\ & - c_{23}^2 c_{13}^3 c_{23}^3 \end{aligned}$$

しかし、この式は Jacobi 律を満たす $\{c_{qr}^p\}$ については恒等的に0になる