対称 Clifford 系と実 Grassmann 多様体の部分カンドルについて

藤井　忍　(公立千歳科技大・理工)

部分多様体幾何とリー群作用 2024
於 東京理科大学　神楽坂キャンパス 森戸記念館第 1 フォーラム
2024 年 12 月 2 日

研究テーマ

我々の期待

以下の二つは関係があるだろう:

- 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面,
- 運動量写像.

注意

我々の期待通りなら...

- 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面すべてを統一的に扱うことが出来る... かも,
- 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面の分類に応用できる... かも.

研究テーマ

研究のテーマ

4 つの主曲率をもつ, 球面内の OT–FKM 型等径超曲面を運動量写像で記述したい.

OT–FKM 型等径超曲面とは, 対称 Clifford 系 $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ によって構成される Cartan–Münzner 多項式

$$F(x) = \|x\|^4 - 2\sum_{i=0}^{m} \langle P_i x, x\rangle^2$$

のレベル集合と単位球面の共通部分として得られる球面内の超曲面.

今回のテーマ

問題

対称 Clifford 系 $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ を群作用の言葉で特徴づけできないか?

- 対称 Clifford 系は実対称行列の有限族,
- 実対称行列は直交行列で対角化可能 (群作用),
- { 実対称行列 }/直交行列 $\simeq$ 実 Grassmann 多様体

Contents of this talk

対称 Clifford 系について

Clifford 代数の定義

一般に,

- V: 有限次元実線型空間,
- $q : V \times V \to \mathbb{R}$: V 上の 2 次形式,

定義

(V, q) に付随する Clifford 代数

$$\mathrm{Cl}(V, q) := T(V)/I_q$$

- $T(V) := \bigoplus_k T^k(V)$: テンソル代数,
- $I_q := \left\langle v \otimes v + q(v) \;\middle|\; v \in V \right\rangle_{\text{bi–sided}}$: 両側イデアル.

定義

(V,q) に付随する Clifford 代数

$\mathrm{Cl}(V,q) := T(V)/I_q$

- $T(V) := \bigoplus_k T^k(V)$: テンソル代数,
- $I_q := \langle v \otimes v + q(v,v) \mid v \in V \rangle_{\text{bi–sided}}$: 両側イデアル.

以下, $V = \mathbb{R}^{m-1}$, $q = \langle -,- \rangle$: Euclid 内積, とする.
$\mathrm{Cl}(V,q) = \mathrm{Cl}_{m-1}$ と表す.

Clifford 代数の表現

定義

Clifford 代数 Cl_{m-1} の n 次表現
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R}$-代数準同型 $\rho : \mathrm{Cl}_{m-1} \to M_n(\mathbb{R})$ のこと.
ただし,

- $M_n(\mathbb{R}) := \{n$ 次実係数正方行列$\}$,
- $\mathbb{R}$–代数準同型とは, 以下が成り立つこと:
  1. $\rho(\xi + \eta) = \rho(\xi) + \rho(\eta)$,
  2. $\rho(\xi \otimes \eta) = \rho(\xi)\rho(\eta)$,
  3. $\rho(a\xi) = a\rho(\xi)$,

代数準同型を決めるには, 生成系の行き先を決めるだけで十分.

Clifford 代数の表現

代数準同型を決めるには, 生成系の行き先を決めるだけで十分.

事実

Cl_{m-1} は V の基底 $e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}$ で $\mathbb{R}$–代数として生成される.

$\rho(e_i) =: E_i \in M_n(\mathbb{R})$ とすると ρ は決まるが, 特に $E_i \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) := \{n$ 次実交代行列$\}$ とできる.

Clifford 代数の表現

$\rho(e_i) =: E_i \in M_n(\mathbb{R})$ とすると ρ は決まるが, 特に $E_i \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) := \{n$ 次実交代行列$\}$ とできる.

定義

Clifford 代数の表現 $\rho : \mathrm{Cl}_{m-1} \to M_n(\mathbb{R})$ は以下を満たす $\{E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}\} \subset \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ で決まる:

$$E_i E_j + E_j E_i = -2\delta_{ij} I_n.$$

このような $\{E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}\} \subset \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ を **Clifford 系**という.

対称 Clifford 系

- $\rho : \mathrm{Cl}_{m-1} \to M_n(\mathbb{R})$: 表現,
- $\{E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}\}$: ρ に付随する Clifford 系,

このとき, $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m \subset \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ を以下のように定める:

$$P_0 := \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline 0_n & -I_n \end{array}\right), \quad P_1 := \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right),$$

$$P_i := \left(\begin{array}{c|c} 0_n & E_{i-1} \\ \hline -E_{i-1} & 0_n \end{array}\right) \quad (i \in \{2, 3, \ldots, m\})$$

命題

$\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ は以下の関係式を満たす:

$$P_iP_j + P_jP_i = 2\delta_{ij} I_{2n}.$$

定義

$\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$: **2$n$ 次の対称 Clifford 系**

$\overset{\text{def}}{\iff}$

- $P_i \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}) \quad ({}^\forall i)$,
- $P_i P_j + P_j P_i = 2\delta_{ij} I_{2n}$.

事実

$2n$ 次の対称 Clifford 系から Clifford 系を構成することができる.

対称 Clifford 系と Clifford 球面

対称 Clifford 系と Clifford 球面

- $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ 上の内積 $\langle -, - \rangle$ を以下で定義:

$$\langle P, Q \rangle := \frac{1}{2n} \mathrm{Tr}(PQ) \quad \text{for} \quad P, Q \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}),$$

- $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_m\} \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$: 対称 Clifford 系,
- $L(\mathcal{P}) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{P_0, P_1, \ldots, P_m\} \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$,

定義

Clifford 球面 $\Sigma(\mathcal{P}) := \left\{ P \in L(\mathcal{P}) \;\middle|\; \|P\| = 1 \right\}$.

対称 Clifford 系と Clifford 球面

命題

Clifford 球面 $\Sigma(\mathcal{P})$ に対して, ${}^{\forall}P \in \Sigma(\mathcal{P})$, $P^2 = I_{2n}$.

この逆も成り立つ.

命題

$\Sigma \subseteq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$: 部分集合 s.t.

- $P^2 = I_{2n}$ for ${}^{\forall}P \in \Sigma$,
- $\Sigma \subsetneq \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$: 単位球面,

$\Longrightarrow \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$ の任意の正規直交基底は対称 Clifford 系.

対称 Clifford 系は Clifford 球面で決まる!

Clifford 球面と Grassmann 多様体

Clifford 球面 $\Sigma \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ について

- ${}^\forall P \in \Sigma$, P の固有値は ± 1 のみ,
- ${}^\forall P \in \Sigma$, P の $(+1)$–固有空間も (-1)–固有空間も n 次元.

$\rightsquigarrow$

問題

Clifford 球面と Grassmann 多様体
$\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) := \left\{ V \underset{\text{linear}}{\subsetneq} \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \dim_{\mathbb{R}} V = n \right\}$ はどのような関係があるか?

Clifford 球面 $\Sigma \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ は Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ の幾何と密接な関係がある.

命題 (Wang (1990), Wolf (1963))

$f_\Sigma : \Sigma \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を以下で定義:

$$\Sigma \ni P \xmapsto{f_\Sigma} P \text{ の } (+1)\text{–固有空間} \in \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}).$$

このとき, f_Σ は全測地的埋め込みで, その像は全測地的球面.
逆に, $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ 内の全測地的球面は, Clifford 球面の f_Σ の像として得られる.

$f_\Sigma(\Sigma)$ は isoclinic sphere と呼ばれる.

Clifford配置の定義

Clifford 配置

- $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_m\} \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$: 対称 Clifford 系,
- Σ: $\mathcal{P}$ に付随する Clifford 球面,
- $f_\Sigma : \Sigma \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$: Wang の定理の写像.

$\rightsquigarrow$

問題

$V_i := f_\Sigma(P_i)$ と定めると,
$f_\Sigma(\mathcal{P}) = \{V_0, V_1, \ldots, V_m\} \subsetneq \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ はどのような性質をもった有限部分集合か?

対称空間としての $\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$

定義

Riemann 多様体 (M,g) が **(Riemann) 対称空間**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists s : M \to \mathrm{Aut}(M),\ x \mapsto s_x$ (点対称) s.t.

1. $^\forall x \in M$, x は s_x の孤立固定点,
2. $^\forall x \in M$, $s_x \circ s_x = \mathrm{id}_M$,
3. $^\forall x \in M$, s_x は等長変換.

$\mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ の場合, $^\forall V \in \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ に対して,
$s_V : \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を以下で定義:

$$W \mapsto s_V(W) := \left\{ \pi_V(w) - \pi_{V^\perp}(w) \;\middle|\; w \in W \right\}.$$

ただし, $V^\perp$: V の直交補空間, π_V: V への直交射影.

Clifford 配置と Grassmann 多様体

- $\mathbb{R}^{2n}$ の正規直交基底を任意に一組選び固定,
- $\mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_m\} \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$:
  Clifford 代数の表現から構成される対称 Clifford 系,
- $\Sigma \subsetneq \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$: Clifford 球面,
- $f_\Sigma : \Sigma \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$: Wang の定理の写像,
- $V_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \right\}$, $V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \right\}$,
  $V_i := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ E_{i-1}x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (i = 2, \dots, m)$.

命題 (F., in preparation)

$$i \neq j \Longrightarrow s_{V_i}(V_j) = V_j^\perp.$$

Clifford 配置から対称 Clifford 系を構成する

定理 (F., in preparation)

以下の条件を満たす $\mathcal{V} = \{V_0, \ldots, V_\ell\} \subsetneq \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ を任意にとる:

$$\begin{cases} V_i \not\perp V_j \quad (i \neq j), \\ s_{V_i}(V_j) = V_j^{\perp} \quad (i \neq j). \end{cases}$$

$^\forall i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ に対して, $P_i \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ を

$$P_i := s_{V_i} \text{ の表現行列}$$

と定義するとき, $\{P_0, P_1, \ldots, P_\ell\}$ は対称 Clifford 系.

定義 (F.)

$\mathcal{V} = \{V_0, \dots, V_\ell\}$: $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $V_i \subsetneq \mathbb{R}^{2n}$: n 次元線型部分空間,
- ${}^\forall V_i \in \mathcal{V}$, $V_i^\perp \notin \mathcal{V}$,
- $\sigma_{V_i}(V_j) = V_j^\perp$ if $i \neq j$.

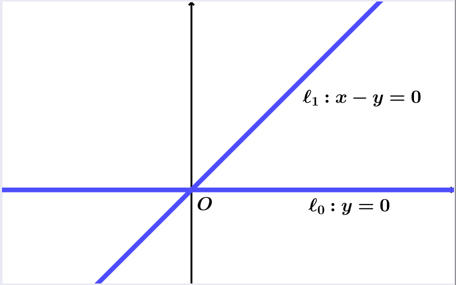
- 以下では, $\mathbb{R}^{2n}$ 内の Clifford 配置 $\{V_0, \dots, V_\ell\}$ を $\mathcal{C}\ell_\ell^n$ と表す.
- $n = 2^{4a+b} \times$ (奇数) と表したとき, $1 \leq \ell \leq \rho(n) := 8a + 2^b$.

例 ($n = 1$)

$\mathbb{R}^2$ 内の直線 ℓ_0, ℓ_1 を

$$\ell_0 : y = 0,$$
$$\ell_1 : x - y = 0$$

とするとき, $\{\ell_0, \ell_1\}$ は Clifford 配置.



$\mathbb{R}^2$ の標準基底で表すと

$$\ell_0 = \mathbb{R}e_1, \quad \ell_1 = \mathbb{R}(e_1 + e_2).$$

例 ($n = 2$)

$\mathbb{R}^4$ 内の 2 次元線型部分空間 V_0, V_1, V_2 を

$$V_0 := \left\{ {}^t(x, y, 0, 0) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_1 := \left\{ {}^t(x, y, x, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_2 := \left\{ {}^t(x, y, y, -x) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

とするとき, $\{V_0, V_1, V_2\}$ は Clifford 配置.

$\mathbb{R}^4$ の標準基底で表すと

$$V_0 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{e_1, e_2\}, \; V_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{e_1 + e_3, e_2 + e_4\},$$
$$V_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{e_1 - e_4, e_2 + e_3\}.$$

Clifford 配置の性質

問題

主定理に現れる $\mathcal{V} = \mathcal{C}\ell_\ell^n$ は何を表しているのか?

対蹠集合ではないことは簡単に分かる.

注) S: 対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x, {}^\forall y \in S,\ s_x(y) = y$.

命題 (F., in preparation)

$\mathcal{C}\ell_\ell^n$ に対して, $\left(\mathcal{C}\ell_\ell^n\right)^\perp := \left\{V^\perp \mid V \in \mathcal{C}\ell_\ell^n\right\}$ とするとき,

$$s_{s_V(W)} \circ s_V = s_V \circ s_W \quad \text{for } {}^\forall V, {}^\forall W \in \mathcal{C}\ell_\ell^n \sqcup \left(\mathcal{C}\ell_\ell^n\right)^\perp.$$

上の命題は s が $Q(\mathcal{C}\ell_\ell^n) := \mathcal{C}\ell_\ell^n \sqcup \left(\mathcal{C}\ell_\ell^n\right)^\perp$ 上のカンドル構造を定めることを意味する.

カンドル構造の復習

定義 (by Tamaru (2013))

- X: 集合,
- $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$, $x \mapsto s_x$: 写像,

s が X 上の**カンドル構造** (or (X, s): カンドル) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. ${}^\forall x \in X$, $s_x(x) = x$,
2. ${}^\forall x \in X$, s_x は全単射,
3. ${}^\forall x, {}^\forall y \in X$, $s_{s_x(y)} \circ s_x = s_x \circ s_y$.

一般に, 連結 Riemann 対称空間はカンドル構造を持つ (点対称がカンドル構造).

Clifford 配置に付随するカンドル

定義

(X, s), (X', s'): カンドル,
写像 $f : X \to X'$ が**カンドル準同型** $\overset{\text{def}}{\iff}$
${}^{\forall}x \in X$, $f \circ s_x = s'_{f(x)} \circ f$.

定理 (F., in preparation)

- $\mathcal{V} = \left\{ V_i \in \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; V_i \not\perp V_j,\quad s_{V_i}(V_j) = V_j{}^{\perp} \quad (i \neq j) \right\}$,
- $\mathcal{V}^{\perp} := \left\{ V^{\perp} \;\middle|\; V \in \mathcal{V} \right\}$,

このとき,

1. 点対称は $Q(\mathcal{V}) := \mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}^{\perp}$ のカンドル構造,
2. 包含写像 $\iota : Q(\mathcal{V}) \to \mathrm{Gr}_n^{2n}(\mathbb{R})$ はカンドル準同型.

Clifford 配置に付随するカンドルの性質

事実 (cf. Furuki–Tamaru (2024))

- $S^{N-1} \subsetneq \mathbb{R}^N$: 単位球面,
- S^{N-1} のカンドル構造: $s_x(y) := 2\langle x, y\rangle x - y$,
- $A^N := \{\pm e_1, \ldots, \pm e_N\} \subsetneq S^{N-1}$,

このとき, A^N は S^{N-1} の平坦, 等質, 非連結な有限部分カンドル.

命題 (F., in preparation)

カンドルとして $Q(\mathcal{C}\ell_\ell^n) \simeq A^{\ell+1}$.

$f : Q(\mathcal{C}\ell_\ell^n) \to A^{\ell+1}$ を
$f(V_i) := e_{i+1}$, $f(V_i^\perp) := -e_{i+1}$ と定めれば良い.

カンドルの s-可換性

s–可換性

(X, s): カンドル.

定義

$x, y \in X$: s–可換 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$.

定義

- $S \subset X$: 部分集合,

S: s–可換 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall x, {}^\forall y \in S$, x と y が s–可換.

- 極大 s–可換部分集合 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 包含関係において極大な s–可換部分集合,
- 対蹠集合 $\Longrightarrow$ s–可換部分集合,
- 極大 s–可換部分集合 $\Longrightarrow$ 部分カンドル.

有向 Grassmann 多様体の極大 s–可換部分集合

事実 (cf. Nagashiki (Master's Thesis, 2019))

k, n が以下の場合, 有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_k^n(\mathbb{R})^\sim$ の任意の極大 s–可換部分集合は

$$\{\pm \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$

に $\mathrm{O}(n)$–作用で合同:

1. $n \neq 2k$,
2. k: 奇数, $n = 2k$.

事実 (cf. Nagashiki (Master's Thesis, 2019))

有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換部分集合は

- $\pm\,\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i, e_j\} \quad (1 \leq i < j \leq 4)$,
- $\pm\,\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i \pm e_j, e_k \pm e_\ell\}$
  $(1 \leq i < j \leq 4,\ 1 \leq k < \ell \leq 4)$

からなる集合に $\mathrm{O}(4)$–作用で合同なもののみ.

$n \in 4\mathbb{Z}_+$, $n \geq 8$ のとき, 有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_k^{2k}(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換部分集合はよくわかっていない.

有向 Grassmann 多様体の極大 s–可換部分集合

命題 (F.)

有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換部分集合は $\mathbb{R}^4$ 内の full な Clifford 配置から構成可能である.

$\mathbb{R}^4$ 内の full な Clifford 配置は以下の部分空間からなる:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\},\\
V_1 &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_3, e_2 + e_4\},\\
V_2 &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_4, e_2 - e_3\}.
\end{aligned}
$$

有向 Grassmann 多様体の極大 s–可換部分集合

命題 (F., in preparation)

有向 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_2^4(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換部分集合は $\mathbb{R}^4$ 内の full な Clifford 配置から構成可能である.

1 組目	e_1, e_2	$e_1 + e_3, e_2 + e_4$	$e_1 + e_4, e_2 - e_3$
2 組目	e_1, e_3	$e_1 + e_4, e_2 + e_3$	$e_1 - e_2, e_3 + e_4$
3 組目	e_1, e_4	$e_1 + e_2, e_3 + e_4$	$e_1 - e_3, e_2 + e_4$

- 上に挙げた基底で張られる 2 次元空間: 9 枚,
- それらの直交補空間: 9 枚,
- 向きを考慮: 2 通り.

まとめ & 今後の課題

まとめ

- Clifford 代数の表現に付随する部分空間配置を定義した,
- Clifford 配置から対称 Clifford 系が復元されることを示した,
- Clifford 配置は Grassmann 多様体の部分カンドルを生成することを示した,
- Clifford 配置は有向 Grassmann 多様体の極大 s–可換集合と関係がありそうなことを確認した.

今後の課題

カンドル, 対蹠集合の観点から

- $n \in 4\mathbb{Z}_+$ の場合の極大 s-可換集合との関係．特に，$\mathrm{Gr}_4^8(\mathbb{R})^\sim$ の極大 s–可換部分集合の場合．

部分空間配置の観点から

- n を固定することの同値類の数: 計算中．
- Hilbert 多項式: Derksen の定理から容易に計算可能．
- 自由性: 不明．

その他の観点から

- OT–FKM 型等径超曲面との関係．

Thank you for your attention!