複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉，コンパクト対称三対の標準形とその応用

井川　治

京都工芸繊維大学

部分多様体幾何とリー群作用 2024
2024/12/03

概要

複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉が離散的になるための必要十分条件をこれまでに知られていたものを含む形で述べる．実旗多様体の離散的な交叉はある Weyl 群の軌道であり，複素旗多様体の「対蹠集合」になる．応用として，複素旗多様体内の実旗多様体は大域的タイトになることを示す．複素旗多様体と二つの実旗多様体の組は，コンパクト対称三対から構成されるが，出発点となるコンパクト対称三対を「標準的」なものにとれることを示す．
この講演は，馬場蔵人，大野晋司，酒井高司，田崎博之との共同研究であり，馬場蔵人との共同研究，入江博，奥田隆幸，酒井高司，田崎博之との共同研究の内容も含む．

文献

BI=K. Baba and O. Ikawa, Double Satake diagrams and canonical forms in compact symmetric triads, International Electronic Journal of Geometry, **17**, no. 2, (2024), 466–495.

IIOST=O. Ikawa, H. Iriyeh, T. Okuda, T. Sakai and H. Tasaki, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, in preparation.

O=S. Ohno, Geometric properties of orbits of Hermann actions, Tokyo J. Math. **46** (2023), no. 1, 63–91.

コンテンツ

1 モデル： 2 次元球面内の 2 つの大円の交叉

2 複素旗多様体の二つの実旗多様体の離散的な交叉

3 今後の課題

4 定理 (1/2) と定理 (2/2) の証明の概要

モデル： 2 次元球面内の 2 つの大円の交叉

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ni J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad [X, Y] = 2X \times Y$$

$$G = SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos\varphi & -e^{i\beta} \sin\varphi \\ e^{-i\beta} \sin\varphi & e^{-i\alpha} \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$$

主役 $M := \mathrm{Ad}(G)J = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \sin(\alpha+\beta) \\ \sin 2\varphi \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \right\} = S^2$

対合 $\theta : G \to G; g \mapsto \bar{g} \quad K := F(\theta, G) = SO(2)$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ (標準分解)

$\mathfrak{p} = \left\{ i \begin{pmatrix} x & z \\ z & -x \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{a} := \mathbb{R}J$ (極大可換部分空間),

$A = \exp \mathfrak{a} = S^1$

主役 $L := \mathrm{Ad}(K)J = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ 0 \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} \right\} = S^1 = M \cap \mathfrak{p}$

問題 $L \cap \mathrm{Ad}(g)L\ (g \in G)$ を考えたい

脇役 $S^2 = G/K = \mathrm{Exp}(\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}) = \pi(\exp(\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a})) = \pi(KA)$

よって，$G = KAK \ni g = k_0 a k_1 \quad a = \exp tJ$

[結論] $L \cap \mathrm{Ad}(g)L = \mathrm{Ad}(k_0)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L)$

$$L \cap \mathrm{Ad}(a)L = \begin{cases} L & (\sin 2t = 0), \\ \{\pm J\} = W(\tilde{\Sigma})J & (\sin 2t \neq 0) \end{cases}$$

s_X : $X \in S^2$ に関する点対称

$X, Y \in S^2$ に対し，$s_X Y = 2\langle X, Y\rangle X - Y$

$$s_X Y = Y \Leftrightarrow Y = \langle X, Y\rangle X \Leftrightarrow X//Y \Leftrightarrow [X, Y] = 0$$
$$\Leftrightarrow s_Y X = X \Leftrightarrow Y = \pm X$$

離散的な交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ は M の大対蹠集合

$$\mathbb{R}J \subset \mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}(\exp tJ)\mathfrak{p} = \begin{cases} \mathfrak{p} & (\sin 2t = 0), \\ \mathbb{R}J & (\sin 2t \neq 0) \end{cases}$$

[まとめ]

$\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}(\exp tJ)\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow L \cap \mathrm{Ad}(a)L = L$

$\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}(\exp tJ)\mathfrak{p} = \mathbb{R}J \Leftrightarrow \sin 2t \neq 0$
$\Leftrightarrow L \cap \mathrm{Ad}(a)L = \{\pm J\} = W(\tilde{\Sigma})J$

複素旗多様体とその対蹠集合

G: compact 連結単純 Lie 群 $\quad x \in \mathfrak{g} - \{0\}$

$M = \mathrm{Ad}(G)x \subset \mathfrak{g}$ **複素旗多様体** $\quad T_xM = [\mathfrak{g}, x]$
（compact 単連結等質ケーラー多様体）

(IIOST) $\mathcal{A} \subset M$ **対蹠集合** $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ 可換

M : compact 型 Hermite 対称空間 $\Rightarrow$Chen-Nagano による対蹠集合の定義に一致

複素旗多様体の大対蹠集合

定理 (IIOST) M の大対蹠集合は次の形

極大トーラス $T \subset G$ が存在して $W(T)x$

特に，二つの大対蹠集合は合同

複素旗多様体内の実旗多様体

(G, K) compact 対称対 $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \qquad x \in \mathfrak{p} - \{0\}$

実旗多様体 $L = \mathrm{Ad}(K)x \subset M = \mathrm{Ad}(G)x \qquad L = \mathfrak{p} \cap M$

$$T_x L = [\mathfrak{k}, x] \subset T_x M = [\mathfrak{g}, x] = [\mathfrak{k}, x] \oplus [\mathfrak{p}, x] = T_x L \oplus J T_x L$$

L は M の実形

複素旗多様体の二つの実旗多様体の離散的な交叉

$(G, K_0), (G, K_1)$ compact 対称対 $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i \rightsquigarrow L_i$

IIOST $L_0 \cap L_1 \neq \emptyset$ なので $x \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 - \{0\}$ として

$L_i = \mathrm{Ad}(K_i)x \subset M = \mathrm{Ad}(G)x$ を考えればよい．

心配事： $\quad \mathrm{ord}(\theta_0\theta_1) = \infty$ かもしれない

次の定理はIIOST((1)$\Leftrightarrow [\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1, L_0 \cap L_1] = \{0\}$)を含む

定理(1/2)(BIOST)　　$L_0, L_1 \subset M$ 次は同値

(1) $L_0 \cap L_1$ 離散的　　(2) $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ 可換

このとき，$L_0 \cap L_1$ は M の対蹠集合

$L_0 \cap L_1 = W(\mathfrak{t})x \cap \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$　($\mathfrak{a} \subset \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$: 極大可換部分環)

(1)$\Rightarrow$ (2)の証明が難．右辺の表示が不満

上の表示を $L_0 \cap L_1 = W(\tilde{\Sigma})x$ としたい

$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の可換性は仮定せずに，

極大可換部分空間 $x \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ をとる．

制限ルート系の定義と同様にして集合 $\tilde{\Sigma} \subset \mathfrak{a}$ が定まる

補題 (松木,I) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ を張る既約ルート系

次の定理もIIOSTの精密化 $(\mathrm{ord}(\theta_0\theta_1)$ に制約がない)

定理(2/2)(BIOST) $L_0 \cap L_1$ が離散的のとき，
$L_0 \cap L_1 = W(\tilde{\Sigma})x$

[応用] $L \subset M$ が大域的タイト

$\Leftrightarrow$ $L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ が離散のとき，$\#(L \cap \mathrm{Ad}(g)L) = SB(L, \mathbb{Z}_2)$

定理(IIOST) 実旗多様体は大域的タイト

複素旗多様体内の実旗多様体の交叉を考えるためには，次の設定で考えれば十分

(G, θ_0, θ_1) は標準的であり，$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \neq \{0\}$．$\mathfrak{t}$ は (G, θ_0, θ_1) に関して標準的であり，$\mathfrak{a} := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$．$x \in \mathfrak{a} - \{0\}$ として，$M = \mathrm{Ad}(G)x \supset L_i = \mathrm{Ad}(K_i)x$ とおいたとき，$\mathrm{Ad}(\exp H)L_0 \cap L_1$ $(H \in \mathfrak{a})$ を考えればよい．

定理 (BIOST)　上の設定の下で，$\mathrm{Ad}(\exp H)L_0 \cap L_1$ が離散的 $\Leftrightarrow$ H が正則点

正則点の全体は$\mathfrak{a}$の稠密な開集合 [O]

上のように設定すると，[BI] で定義した二重佐武図形と大野の結果 [O] が使えるので，たとえば G が例外型で交叉に関連した種々の計算が直接的には困難な場合でも，二重佐武図形を使って計算できる可能性が高い

今後の課題

複素旗多様体 M 内の二つの実旗多様体 L_0, L_1 に対し，数 $SB(L_0, L_1, M, \mathbb{Z}_2)$ を定義し，次が成り立つようにせよ．

(1) $L_0 = L_1$ ならば，$SB(L_0, L_1, M, \mathbb{Z}_2) = SB(L_0, \mathbb{Z}_2)$

(2) 離散的な交叉 $\mathrm{Ad}(g)L_0 \cap L_1$ に対し，
$\#(\mathrm{Ad}(g)L_0 \cap L_1) = SB(L_0, L_1, M, \mathbb{Z}_2)$.

2014/12/09 広島大学談話会 (田崎博之) より

○ 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の Floer ホモロジー

○ 実旗多様体の交叉積分公式

○ 実旗多様体の Hamilton 体積最小性

定義 (BI) (G,θ_0,θ_1): 標準的 $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 極大可換部分環 s.t.
(C1-i) $\mathfrak{a}_i := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}_i$ は $\mathfrak{p}_i$ の極大可換部分空間．特に，$\mathfrak{t}$ は θ_i 不変

(C1-ii) $\exists <$: $\mathfrak{t}$ 上の線形順序 s.t. $\alpha \in \Delta^+ - \Delta_0^i$ について $-\theta_i(\alpha) > 0$．ただし，$\Delta_0^i := \Delta \cap \mathfrak{k}_i$

(C2) $\mathrm{ord}(\theta_0\theta_1) = \mathrm{ord}(\theta_0\theta_1|\mathfrak{t}) < \infty$
このとき，$\mathfrak{t} : (G,\theta_0,\theta_1)$ に関して標準的

定理(BI) (G,θ_0,θ_1): 標準的，$\mathfrak{t}:(G,\theta_0,\theta_1)$ に関して標準的
$\Rightarrow \mathfrak{a} := \mathfrak{t}\cap\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{p}_1$ は，$\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間

定理(BI) 各 (G,θ_0,θ_1) に対し，(G,θ_0,θ_1) と同値な標準的な compact 対称三対が存在．

定理 (1/2) と定理 (2/2) の証明の概要

次を示せば十分：

(1) $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ が非可換 $\Rightarrow L_0 \cap L_1$: 離散的でない

(2) 各 $x \in \mathfrak{a}$ に対し $W(\mathfrak{t})x \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x$

観察： 二つの Weyl 群 $W(\mathfrak{t})$ と $W(\tilde{\Sigma})$ が現れている
心配事： $W(\tilde{\Sigma})$ は随伴作用由来でないかも

松木はコンパクト対称三対 $\{(G, \theta_0, \theta_1) \mid \theta_0, \theta_1\}$ 上に非自明な同値関係を定義した．この同値関係を使って元の問題を言い換えてみる： $A := \exp \mathfrak{a}$

同値類 $[(G, \theta_0, \theta_1)]$ の中から，扱いやすい代表元を取り出して，次を示せば十分

(1) $\mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ $(a \in A)$ が非可換 $\Rightarrow$ $\mathrm{Ad}(a)L_0 \cap L_1$ は離散的でない．

(2) 任意の $x \in \mathfrak{a}$ について $W(\mathfrak{t})x \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x$

$\mathrm{ord}(\theta_0\theta_1) < \infty \Rightarrow (1)$　　[O] を使う
$\mathrm{ord}(\theta_0\theta_1) < \infty$ であり $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ に対し，$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}$ 上の線形順序 $<$ が存在して，$\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{t}_+$ を満たす $\Rightarrow (2)$　　[O] も使う

同値類 $[(G, \theta_0, \theta_1)]$ の中から「**標準的**」なものがとれる．標準的なものは上の条件を満たす [BI]