Cartan embeddings of compact Riemannian k-symmetric spaces

木村太郎

鶴岡工業高等専門学校

部分多様体幾何とリー群作用 2024

東京理科大学 神楽坂キャンパス 森戸記念館　第 1 フォーラム

間下克哉氏（法政大学）との共同研究

December 2, 2024

目次

参考文献

- T. Kimura and K. Mashimo *Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds*, Hokkaido Math. J. Vol.51(2022), 1–23.
- T. Kimura and K. Mashimo, Stability of certain Cartan embeddings, a preprint.
- T. Kimura and K. Mashimo, Biharmonic Cartan embeddings, a preprint.
- K. Mashimo, *Cartan embeddings of compact Riemannian 3-symmetric spaces*, Tokyo J. of Math. 19(1996), 353–364.
- K. Mashimo, *Cartan embedding defined by automorphism of order* 4, preprint.

Cartan embeddings

定義

G をコンパクト連結単純リー群とし, σ を有限位数の G の自己同型写像とする. $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とおく. 写像 $\Psi : G \to G; g \mapsto g\sigma(g)^{-1}$ は次の写像を引き起こす：

$$\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$$

この写像を σ が引き起こす *Cartan* 埋め込みという.

σ の位数が 2 のとき, Cartan 埋め込みは全測地的埋め込みとなる.

定理 (O. Ikawa and H. Tasaki 2000)

コンパクト単純連結リー群 G における全測地的部分多様体 M が極大である必要十分条件は, M は *Cartan* 埋め込みの像か極大リー部分群である.

Cartan embeddings

$o = eK$, s_p を $p \in G/K$ における測地的点対称とするとき,

$$\begin{array}{ccc} M = G/K & \xrightarrow{Q} & G \\ \cup\!\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\!\shortmid \\ p = gK & \longmapsto & s_p \circ s_o \end{array}$$

$\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$ のとき, $s_p \circ s_o = g\sigma(g)^{-1}$ がわかる.

$$\begin{aligned} Q(p) &= s_p \circ s_o \\ &= s_{g \cdot o} \circ s_o \\ &= g s_o g^{-1} \circ s_o \\ &= g(s_o g^{-1} s_o^{-1}) \\ &= g\sigma(g^{-1}) \end{aligned}$$

Cartan embeddings

$\mathbb{R}^n$ の鏡映 ρ を 標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて次で定義する．

$$\rho_x(y) = y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x$$

この定義より，$(\mathbb{R}x)$ 上では -1 固有値を持ち，$(\mathbb{R}x)^\perp$ 上では $+1$ 固有値を持つ．
実射影空間 $\mathbb{R}P^{n-1}$ の点対称 s_o は，鏡映 ρ を用いて定義することができる：$o := \langle e_1\rangle_\mathbb{R}$ $\langle x\rangle_\mathbb{R} = p \in \mathbb{R}P^{n-1}$ に対して，

$$s_o(p) := \langle -\rho_{e_1}(x)\rangle_\mathbb{R}$$

となる．いま，Cartan 埋め込み $Q : G/K \to G$; $p = gK \mapsto s_p \circ s_o$ に対して，$Q : G/K = \mathbb{R}P^{n-1} \to G = SO(n)$; $\langle x\rangle_\mathbb{R} = p \mapsto \rho_x \rho_{e_1}$ は Cartan 埋め込みとなる．

Cartan embeddings

横田一郎先生の本「群と位相」には Cartan 埋め込みの具体的な行列表示もある. $(n-1)$ 次元実射影空間 $\mathbb{R}P(n-1)$ の $SO(n)$ への埋め込み

$$\begin{array}{rccc} Q : & \mathbb{R}P(n-1) & \longrightarrow & SO(n) \\ & \cup\!\!\!\!\psi & & \cup\!\!\!\!\psi \\ & X & \longmapsto & (E-2X)\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

k-symmetric spaces

定義

G をコンパクトリー群, H をその閉部分群とする. G の有限位数 k の自己同型写像 σ ($\sigma^l \neq \mathrm{id}, l < k$) が存在して,

$$G_o^\sigma \subset H \subset G^\sigma$$

が成り立つとき, $(G/H, \sigma)$ をコンパクト型 k-対称空間と呼ぶ.

特に, $k = 2$ のとき, 通常のコンパクト型対称空間となる.

k-symmetric spaces

例

エルミート対称空間は k-対称空間である.

[Wolf and Gray] If G/K is Hermitian symmetric, then K is the fixed point set of an automorphism of $\mathfrak{g}$ of order n for any $n > 1$.

例えば

$$CI(r) \cong Sp(r)/U(r).$$

$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(r)$ の中心は一次元,

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_r \\ \hline I_r & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}).$$

$Z = \frac{\pi}{k} J$ とすると

$$\exp(Z) = \left(\begin{array}{c|c} \cos(\frac{\pi}{k}) I_r & -\sin(\frac{\pi}{k}) I_r \\ \hline \sin(\frac{\pi}{k}) I_r & \cos(\frac{\pi}{k}) I_r \end{array}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) I_{2r} + \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) J$$

となるから

k-symmetric spaces

$$\{\exp(Z)\}^k = \exp(\pi J) = -I_{2r}.$$

$a_k = \exp(Z)$ とおき,

$$\begin{array}{cccc} \sigma_k : Sp(r) & \longrightarrow & Sp(r) \\ \cup\!\!\!\!\!\;| & & \cup\!\!\!\!\!\;| \\ g & \longmapsto & \sigma_k(g) = a_k g a_k^{-1} \end{array}$$

で写像を定義すると, $(\sigma_k)^k = \mathrm{id}$. このとき,

$$g \in U(r) \iff \sigma_k(g) = g.$$

各 $k \geqq 2$ について上記が成立するので, $Sp(r)/U(r)$ は k-対称空間である.

内部自己同型写像

G をコンパクト単純連結リー群, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 環とし, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関するルート系を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ とする．さらに, $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の 1 つの基本ルート系を

$$\Pi(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

とする．$K_i \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} (1 \leq i \leq n)$ を次で定める．

$$\alpha_j(K_i) = \frac{1}{m_i}\delta_{ij}.$$

$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$ を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の最高ルートとする．
内部自己同型写像 σ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の下で

$$\mathrm{Ad}\left(\exp 2\pi\sqrt{-1}H\right) \quad (H \in \mathfrak{D}_0)$$

に共役である．$\mathfrak{D}_0$ は基本領域を表す．

内部自己同型写像

位数 3（Wolf and Gray）

- $H = 1/3K_i, m_i = 1$
- $H = 2/3K_i, m_i = 2$
- $H = 1/3(K_i + K_j), m_i = m_j = 1$
- $H = K_i, m_i = 3$

位数 4（J. A. Jimenez）

- $H = K_i, m_i = 4$
- $H = 3/4K_i, m_i = 3$
- $H = 1/4(2K_i + K_j), m_i = 2, m_j = 1$
- $H = 1/4(K_i + K_j + K_k), m_i = m_j = m_k = 1$
- $H = 1/4K_i, m_i = 1$
- $H = 1/2K_i, m_i = 2, \quad H = 1/4(K_j + K_k), m_j = m_k = 1,$
  $H = 1/2(K_p + K_q), m_p = m_q = 2$

Totally geodesic, austere, minimal submanifolds

定義

リーマン多様体の等長埋め込み $\Psi : (M, \langle , \rangle) \to (N, \langle , \rangle)$ の第２基本形式を α とする．Ψ の法ベクトル H に対して

$$\langle \alpha(X, Y), H \rangle = \langle A_H(X), Y \rangle$$

によって定まる対称線形写像 $A_H : T_pM \to T_pM$ を H が定める型作用素という．A_H の重複度を込めた固有値の集合が -1 倍で不変であるとき H を *austere normal direction* という．全ての法ベクトル $H(\neq 0)$ が *austere normal direction* であるとき，$\Psi(M)$ を *austere* 部分多様体という．

Totally geodesic, austere, minimal submanifolds

$$\nabla^N_X Y = \nabla^M_X Y + \alpha(X, Y), \quad H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i)$$

補題

α を位数 k の自己同型写像 σ に対応するカルタン埋め込み Ψ_σ の第 2 基本形式とする．このとき，$X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して，

$$\alpha(X, Y) = -\frac{1}{2}[(1 - d\sigma)X, (1 + d\sigma)Y]_{\mathfrak{k}}.$$

Austere 部分多様体は極小部分多様体である．

全測地的部分多様体 $\subset$ austere 部分多様体 $\subset$ 極小部分多様体

Classification(austere, minimal submanifolds)

- 位数 3 の自己同型写像は Wolf and Gray (1968) による分類
- 位数 4 の自己同型写像は J. A. Jimenez (1988) による分類
- 位数 $3, 4$ の自己同型写像のとき, 極小 Cartan 埋め込みの分類結果は間下 (1996, 未発表)
- 位数 3 以上のとき, カルタン埋め込みの像が austere 部分多様体の分類結果は木村–間下 (2022)

準備

G をコンパクト単純リー群, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化, Δ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ のルート系, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ を Δ の基本系とする．また

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

をルート空間分解とする．$\mathfrak{g}_\alpha$ の基底 E_α $(\alpha \in \Delta)$ として, 次の性質をみたすものが存在する：

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1,$$

$$\alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \in \Delta \quad \text{ならば} \quad [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$$

ここで, B は $\tilde{\mathfrak{g}}$ のキリング形式とする．$\tilde{\mathfrak{g}}$ の基底

$$\{H_{\alpha_i}(1 \le i \le l), E_\alpha(\alpha \in \Delta)\}$$

を Weyl の標準基底という．Weyl の標準基底は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる．また正規実形

$$\mathfrak{g}_0 = \{H_{\alpha_i}(1 \le i \le l), E_\alpha(\alpha \in \Delta)\}_{\mathbb{R}}$$

の $\mathbb{R}$ 上の基底となる．

準備

このとき
$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \bar{X} = X\}$$
となる.
$$\varphi_0 : \begin{cases} H \to -H \\ E_\alpha \to E_{-\alpha} \end{cases}$$
によって, $\tilde{\mathfrak{g}}$ または $\mathfrak{g}_0$ の自己同型が定義される.
$$\mathfrak{g}_u = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \varphi_0(\bar{X}) = X\}$$
とおく. このとき
$$\sqrt{-1}H_{\alpha_i} \ (1 \leq i \leq l), \ \ \sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \ \ E_\alpha - E_{-\alpha} \ \ (\alpha \in \Delta)$$
は $\mathfrak{g}_u$ に含まれる. これらは, $\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底, また $\mathfrak{g}_u$ の $\mathbb{R}$ 上の基底にもなる.

Classification(austere submanifolds)

定理 (T. Kimura and K. Mashimo, 2022)

σ が有限位数 3 以上の内部自己同型写像が引き起こすカルタン埋め込み

$$\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$$

は *austere* 埋め込みではない.

最近, 井川–間下により, 有限位数の仮定は不要であることが証明されている.

Classification(austere submanifolds)

定理 (T. Kimura and K. Mashimo, 2022)

G をコンパクト連結単純リー群, σ を G の有限位数の外部自己同型写像, $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とする．このとき, カルタン埋め込み Ψ_σ が *austere* 埋め込みならば, Ψ_σ は全測地的か $\sigma = (\mathfrak{g}_N^{(n)}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ が次の表のどれかになる．

$\mathfrak{g}_N^{(n)}$	$\mathfrak{k}$	$s_0, s_1, \cdots, s_n$	order
$\mathfrak{a}_2^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1$	$s_0 = 0,\ s_1 = 1$	4
$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}\ (n \geq 2)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}\ (1 \leq p \leq n)$	$s_p = 1,\ s_j = 0\ (j \neq p)$	4
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}\ (n \geq 3)$	$\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$s_0 = s_1 = 1,\ s_2 = \cdots = s_n = 0$	4
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}\ (n \geq 3)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}\ (2 \leq p \leq n-1)$	$s_p = 1,\ s_j = 0\ (j \neq p)$	4
$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}\ (n \geq 2)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$s_0 = s_n = 1,\ s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0$	4
$\mathfrak{e}_6^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$	$s_1 = 1, s_0 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$	4
$\mathfrak{d}_4^{(3)}$	$\mathfrak{g}_2$	$s_0 = 1,\ s_1 = s_2 = 0$	3
$\mathfrak{d}_4^{(3)}$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$	$s_1 = 1,\ s_0 = s_2 = 0$	6

こちらの結果も, 井川–間下により, 有限位数の仮定は不要であることが証明されている．

Classification(biharmonic submanifolds)

- 1983 J. Eells and L. Lemaire
  調和写像の一般化として k 重調和写像
- 2009 G.Y.Jiang
  2 重調和写像の第 1 変分, 第 2 変分公式

リーマン多様体の等長はめ込み $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ に対して

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

で bienegy 関数を定義する. ここで, $\tau(\varphi)$ は φ の tension 場である. いま $\varphi_0 = \varphi$ である任意の変分 φ_t に対して第 1 変分公式は,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_2(\varphi_t) = -\int_M h(\tau_2(\varphi), V) v_g$$

で与えられる. ここで $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, $\tau_2(\varphi)$ は φ の bitension 場を表す.

Classification(biharmonic submanifolds)

定義

$\varphi : (M,g) \to (N,h)$ が $\tau_2(\varphi) = 0$ をみたすとき, φ を **2 重調和写像**という.

定義

調和写像でない 2 重調和写像を **proper な 2 重調和写像**という

定理 (S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa 2015)

$\varphi : (M,g) \to (N,h)$ を等長はめ込みとする. また, すべての $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $\nabla^{\perp}_{X}\tau(\varphi) = 0$ と仮定する. このとき, φ が 2 重調和写像であることは次と同値である.

$$\sum_{k=1}^{m} R^h(\tau(\varphi), d\varphi(e_k))d\varphi(e_k) = \sum_{j,k=1}^{m} h(\tau(\varphi), B_\varphi(e_j, e_k))B_\varphi(e_j, e_k)$$

ここで,$\{e_i\}_{i=1}^{m}$ は *local orthonomal frame field*, R^h は N のリーマン曲率テンソル, B_φ は φ の第二基本形式である.

Classification(biharmonic submanifolds)

補題

位数 k の σ が引き起こすカルタン埋め込み
$\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$ が 2 重調和写像であることは次と同値である.

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\alpha \in \Delta_j} h(\tau(\Psi_\sigma), \alpha)\alpha = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\alpha \in \Delta_j} \cot^2\left(\frac{j\pi}{k}\right) h(\tau(\Psi_\sigma), \alpha)\alpha$$

ここで, $\Delta_j = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha(H) = j/k\}$ である.

- 位数 3 のとき

定理 (T. Kimura and K. Mashimo)

位数 3 の内部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が 2 重調和写像ならば極小である.

定理 (T. Kimura and K. Mashimo)

位数 4 の内部自己同型 $\sigma = \tau_{\exp(2\pi\sqrt{-1}H)}$ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が 2 重調和写像 *proper* 2 重調和写像である必要十分条件は次の $(\mathfrak{g}, H, \mathfrak{k})$ のどれかになる.

$\mathfrak{g}$	H	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{a}_n\ (n \geq 1)$	$1/4\, v_i \quad (1 \leq i \leq [(n+1)/2])$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-i} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n\ (n \geq 2)$	$1/4\, v_1$	$\mathfrak{b}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n\ (n \geq 2)$	$1/2\,(v_i + v_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{b}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_n\ (n \geq 3)$	$1/4\, v_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_{2m}\ (m \geq 2)$	$1/4\,(2\, v_m + v_{2m})$	$\mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 4)$	$1/4\, v_1$	$\mathfrak{d}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 5)$	$1/4\, v_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 4)$	$1/4\,(v_1 + 2\, v_2)$	$\mathfrak{d}_{n-2} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_{2n}\ (n \geq 2)$	$1/4\,(2\, v_n + v_{2n})$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 5)$	$1/2\,(v_i + v_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-3,\ 2i+1 < n)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{d}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_6$	$1/4\, v_1$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/4\, v_7$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/2\,(v_1 + v_2)$	$\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$

定理 (T. Kimura and K. Mashimo)

位数 4 の外部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が 2 重調和写像 *proper* 2 重調和写像である必要十分条件は次の $\sigma = (\mathfrak{g}_N^{(n)}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ が次の表のどれかになる.

$\mathfrak{g}$	type	$\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{a}^{(2)}_{2n-1}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ $(n \geq 2)$	$s_0 = s_n = 1,\ s_i = 0\ (1 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
	$s_1 = s_n = 1,\ s_i = 0\ (i \neq 1, n)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$(\mathfrak{d}^{(2)}_{n+1}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ $(n \geq 2)$	$s_p = s_{p+1} = 1,\ s_i = 0$ $(0 \leq p \leq n-1, 2p+1 \neq n)\ (i \neq p, p+1)$	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-2p-2} \oplus$ $\mathfrak{b}_{p+1} \oplus \mathbb{R}$

4-symmetric spaces(biharmonic)

位数 4 の自己同型写像の分類は J. A. Jimenez (1988) による分類がある．Cartan 埋め込みの austere 部分多様体の分類では，自己同型の位数は 2,3,4,6 のいずれかである．そこで，位数 4 についての Cartan 埋め込みについて考える．

(G, H, τ) をコンパクトエルミート対称対とすると，τ は，H のリー環 $\mathfrak{h}$ の 1 次元中心 $\mathfrak{c}$ の元 J_0 を用いて

$$\tau(g) = \exp(\pi J_0)\, g\, \exp(-\pi J_0) \quad (g \in G)$$

で定義される．いま G 上の自己同型 σ_k $(k \neq 2)$ を

$$\sigma_k(g) = \exp\left(\frac{2\pi}{k} J_0\right)\, g\, \exp\left(-\frac{2\pi}{k} J_0\right) \quad (g \in G)$$

で定義すると $(\sigma_k)^k = id, (\sigma_4)^2 = \tau$.

4-symmetric spaces(biharmonic)

$$K = \{g \in G \mid \sigma_4(g) = g\}, H = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$$

とおくと $K \subset H$ をみたすので, ファイバー H/K のファイバー束 $G/K \to G/H$ を得る. このとき, σ_4 が引き起こすのカルタン埋め込み Ψ_{σ_4} の像 $\Psi_{\sigma_4}(G/K)$ について考える.

$$\begin{tikzcd} G/K \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\Psi_{\sigma_4}"'] & & G/H \\ & G & \end{tikzcd}$$

位数 4 についての 2 重調和性の結果から, 以下が考察される.

4-symmetric spaces(biharmonic)

$$\begin{tikzcd} G/K \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Psi_\sigma"'] & G/H \\ & G \end{tikzcd}$$

Hermitian symmetric space

proper biharmonic

Ψ_σ が proper 2重調和であると仮定する.
このとき, G/H はエルミート対称空間となる.

$\Psi_{\sigma_k}(G/K)$ $(k > 2)$ を proper 2重調和とする. このとき G/K は 4-対称空間となる.

4-symmetric spaces(austere)

$$\begin{tikzcd}
G/K \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\Psi_\sigma"', "\text{austere}"] & & G/H \ \not\ni \text{Hermitian} \\
& G &
\end{tikzcd}$$

このとき, 先ほどの 2 重調和と違い, G/H は必ずしもエルミート対称空間とならないことが, J. A. Jimenez の分類よりわかる.

今後の課題

- G/K の K の中心が 1 次元以上の場合の統一的な結果
- G/K 内のある種の部分多様体の分類

Thank you for your kind attention