複素射影空間を定義域とする同変調和写像について

古賀勇

九州国際大学

部分多様体幾何とリー群作用 2024
2024 年 12 月 3 日

導入

- $(\mathbf{C}P^m, g_{FS})$：Fubini-Study 計量を持つ複素射影空間
- $V^q \to \mathbf{C}P^m$：階数 q の複素ベクトル束
- $W^n \subset \Gamma(V)$：複素 n 次元部分空間
- $ev : \underline{W} := \mathbf{C}P^m \times W \longrightarrow V$：$ev_x(t) := t(x)$

定義.

$ev : \underline{W} \to V$ が全射の時，$f : \mathbf{C}P^m \to Gr_{n-q}(W) \cong Gr_q(W^*)$ を

$$f(x) := \mathrm{Ker}\, ev_x$$

と定め，$(V \to \mathbf{C}P^m, W)$ の誘導写像という．

今日のテーマ：以下の写像のモジュライ空間の構成

- $\mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$：$\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像
- $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$：$\mathrm{SU}(m+1)$ 同変調和写像

主定理 1

- $\mathrm{Sp}(m+1) \curvearrowright \mathbf{C}P^{2m+1}$ ：推移的作用
- $\mathcal{H}(k,l) := \mathcal{H}^{l,k+l}$ （$k \geqq 0$） or $\mathcal{H}^{-k+l,l}$ （$k < 0$）
- $\mathcal{H}(k,l) = F_{k,l,0} \oplus \cdots \oplus F_{k,l,l}$ ：$\mathrm{Sp}(m+1)$ 既約分解
- $d_j = \dim F_{k,l,j}$

定理 1（K.-Nagatomo，2024）.

(1) $f : \mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$ が充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像
$\Longleftrightarrow {}^{\exists}k \in \mathbf{Z},\ {}^{\exists}l \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ s.t. $\mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}(k,l)$

(2) 双次数 (k,l)，$\mathbf{C}^{n+1^*} = \mathcal{H}(k,l)$ なる充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{k,l}$ とし，L^2 位相によるコンパクト化を $\overline{\mathcal{M}_{k,l}}$ とすると，

$$\overline{\mathcal{M}_{k,l}} \cong \left\{(x_0,\cdots,x_l) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid x_j \geqq 0,\ d_0x_0^2 + \cdots + d_lx_l^2 = \dim\mathcal{H}(k,l)\right\}$$

※ $\mathcal{H}^{p,q}$ ：双次数 (p,q) の調和多項式の空間

主結果 2

定理 2（K.-N.，2024）.

1 充満な SU(2) 同変調和写像 $\mathbf{C}P^1 \longrightarrow \mathbf{H}P^n$ は以下のいずれかと像同値．

(1) $f_\Delta : \left(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2\right)$ の誘導写像，　$k > 0$，$l \geqq 0$，k：奇数．

(2) $f_0 : \left(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2\right)$ の誘導写像，　$k, l \geqq 0$．

(3) $T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2} & c \\ c & \sqrt{1-c^2} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ として

$$f_c = T^{-1} \circ f_0, \quad 0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}},\ k：奇数，k > 0,$$

---

2 充満な SU$(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{H}P^n$，$m \geqq 2$ は以下の写像と像同値．

- $\left(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), \mathcal{H}^{k+l,l} \oplus \mathcal{H}^{l,k+l}\right)$ の誘導写像．

先行研究からの補足 1

$\mathbf{C}P^m \to \mathbf{C}P^n$：同変調和写像の分類問題について以下のことが知られている．

定理（大仁田，1990）

$f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{C}P^n$：充満な SU$(m+1)$ 同変調和写像

$\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}k \in \mathbf{Z}$, ${}^{\exists}l \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ s.t. $\mathbf{C}^{n+1^*} = \mathcal{H}(k,l)$，$f = f_{k,l}$．

定理（小林，1996）

最高ウェイト $\Lambda = m_1\Lambda_1 + m_2\Lambda_2$ を持つ既約表現 V_Λ と $0 \leqq k \leqq |m_1|$ を満たす整数 k に対して Sp$(m+1)$ 同変調和写像が構成できる．

どちらも既約表現から写像を構成しているが，後者は Sp$(m+1)$ 同変調和写像のうち特別なものを構成している．

先行研究からの補足 2

$\mathbf{C}P^1 \to \mathbf{H}P^n$：SU(2) 同変調和写像の分類問題には (1)Harmonic sequence と Moving frame を用いて，(2)SU(2) 軌道の分類問題として以下の論文がある．

(1) J.Fei and L.He, Classification of homogeneous minimal immersions from S^2 to $\mathbf{H}P^n$, Annali di Matematica, **196** (2017), 2213-2237.

(2) J.Fei, C.Peng and X.Xu, Minimal two-spheres with constant curvature in the quaternionic projective space, Science China Math., **63** (2020), 993 - 1006.

注意．

両者は同じ問題に取り組んでいるが結果が異なる．
同一著者がいるにも関わらずなぜこのようになっているのかは不明．

1. ベクトル束と調和写像

射影空間への写像

$\mathbf{K} = \mathbf{C}$ or $\mathbf{H}$ とする．

- $\left(\mathbf{K}^{n+1}, (\cdot,\cdot)_{n+1}\right)$：$\mathbf{K}$-内積空間
- $\mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$：複素射影空間 or 四元数射影空間
- g_{FS}：$(\cdot,\cdot)_{n+1}$ から誘導される $\mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$ の計量
- $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^{n+1}) = \mathrm{U}(n+1)$，$\mathrm{Aut}(\mathbf{H}^{n+1}) = \mathrm{Sp}(n+1)$

定義.

- $f : (M, g) \to \mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$：充満 $\Longleftrightarrow$ $f(M)$ は線形部分空間に含まれない．
- $f_1, f_2 : (M, g) \to \mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$：像同値 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{K}^{n+1})$ s.t. $f_2 = \psi \circ f_1$

定義.

- $G \curvearrowright M$：Lie 群 G のリーマン多様体 M への作用

$f : M \to \mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$：$G$-同変 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathbf{K}^{n+1})$ s.t. $f(gx) = \rho(g) f(x)$

射影空間を終域とする誘導写像

- $(L \to M, h, \nabla)$：リーマン多様体 (M, g) 上の $\mathbf{K}$-直線束，計量，接続
- $W \subset \Gamma(L)$：有限次元部分空間
- $ev : \underline{W} \to L \;:\; ev_x(t) = t(x)$：*evaluation map*

定義.

- $L \to M$ が W で大域的に生成されている $\Longleftrightarrow$ ev：全射
- $L \to M$ が W で大域的に生成されている時，
  $f : M \to \mathbf{P}(W^*) \cong Gr_{n-1}(W) \;:\; f(x) = \mathrm{Ker}\, ev_x$：$(L \to M, W)$ の誘導写像

$(L \to M, W)$ の誘導写像 f による引き戻し束 $f^*(S^*) \to M$ と $L \to M$ は
ベクトル束として同型だが，計量と接続まで込みで同型とは限らない．

$\mathbb{C}P^m$ 上の等質直線束

- $\mathbb{C}P^m = \mathrm{SU}(m+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(m))$
- $\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^m$：次数 k の等質直線束
- ∇^k，$\Delta^k : \mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^m$ の標準接続とラプラシアン

$\Gamma(\mathcal{O}(k))$ の直和分解について，以下の 2 つは一致する．

- Δ^k に関する固有分解
- $\mathrm{SU}(m+1)$ 作用に関する既約分解

$k \geqq 0$ として，分解は以下のように書ける．

$$\Gamma(\mathcal{O}(k)) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}^{l,k+l} \qquad \Gamma(\mathcal{O}(-k)) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}^{k+l,l}$$

「次数 k の直線束の $l+1$ 番目の固有空間」を $\mathcal{H}(k,l)$ と書くことにする．

$m=1$ のとき，$\mathcal{H}(k,l) \cong S^{|k|+2l}\mathbb{C}^2$．

2. $\mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{C}P^n$: Sp$(m+1)$ 同変調和写像の分類

一般化された高橋の定理

定理.

- $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{C}P^n$ ：滑らかな写像
- $F : \mathbf{C}^{n+1^*} \to \Gamma(f^*\mathcal{O}(1))$ ：f が誘導する線型写像

以下の 2 つは同値.

(1) f ：エネルギー密度関数一定調和写像

(2) $^\exists k \in \mathbf{Z}$, $^\exists l \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ ：$\Delta^{f^*\mathcal{O}(1)}$ の固有値 μ の固有空間 s.t. $F(\mathbf{C}^{n+1^*}) \subset \mathcal{H}(k,l)$

定義.

- $(\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^m, \nabla^k)$ ：次数 k の複素直線束と標準接続

$(\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^m, \mathcal{H}(k,l))$ の誘導写像 $f_{k,l} : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{P}(W^*)$ を標準写像という.

応用：SU$(m+1)$ 同変写像

- $f : \mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{C}P^n$：SU$(m+1)$ 同変な充満写像

$\Longrightarrow (f^*\mathcal{O}(1), f^*\nabla) = (\mathcal{O}(k), \nabla)$ となる $k \in \mathbf{Z}$ が存在.

f が調和写像ならば，エネルギー密度関数一定で $^\exists l \geqq 0$，$\mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}(k,l)$.

f：充満と Schur の補題から $\mathbf{C}^{n+1^*} = \mathcal{H}(k,l)$ で，f は標準写像と像同値.

Sp$(m+1)$ 同変写像

- Sp$(m+1)$：$\mathbf{H}^{m+1} \cong \mathbf{C}^{2m+2}$ に作用するシンプレクティック群
- Sp$(m+1) \curvearrowright \mathbf{C}P^{2m+1}$：推移的作用

Sp$(m+1)$ 同変調和写像 $f : \mathbf{C}P^{2m+1} \longrightarrow \mathbf{C}P^n$ の構成と分類をしたい．

先行結果

- SU$(2m+2)$ 同変写像 $f_0 : \mathbf{C}P^{2m+1} \longrightarrow \mathbf{C}P^n$ は Sp$(m+1)$ 同変写像
- 最高ウェイト $\Lambda = m_1\Lambda_1 + m_2\Lambda_2$ をもつ既約表現 V_Λ は Sp$(m+1)$ 同変写像を誘導し，それは調和写像（詳細略）（小林，1996）

目標

小林の結果を利用して Sp$(m+1)$ 同変調和写像を完全に決定する．

誘導束

- $f : \mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$ ：Sp$(m+1)$ 同変，充満写像

命題.

任意の等質直線束 $L \to \mathbf{C}P^{2m+1}$ の Sp$(m+1)$ 不変接続は標準接続に限る．
したがって $(f^*\mathcal{O}(1), f^*\nabla) = (\mathcal{O}(k), \nabla^k)$ となる $k \in \mathbf{Z}$ が存在する．

f が調和写像であるとするとエネルギー密度関数一定で $\mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}(k, {}^\exists l)$.

定義.

- $(f^*\mathcal{O}(1), f^*\nabla) = (\mathcal{O}(k), \nabla^k)$
- $\mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}(k, l)$

を満たすエネルギー密度関数一定調和写像 $f : \mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$ を双次数 (k, l) の調和写像と呼ぶ．

一般化された do Carmo-Wallach の定理より，$\mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{P}(\mathcal{H}(k,l)^*)$：双次数 (k, l) の Sp$(m+1)$ 同変調和写像は

- $T : \mathcal{H}(k,l) \to \mathcal{H}(k,l)$：正値エルミート準同型 s.t. $ev \circ T^2 \circ ev^* = \mathrm{id}$

と 1:1 対応する．

主定理 1

- $\mathcal{H}(k,l) = F_{k,l,0} \oplus \cdots \oplus F_{k,l,l}$ ：Sp$(n+1)$ 既約分解，$d_j = \dim F_{k,l,j}$

T ：Sp$(m+1)$ 同変より $T = x_0\pi_1 + \cdots + x_l\pi_l$ （π_i ：$F_{k,l,i}$ への直交射影）．

定理 1（K.-Nagatomo，2024，再掲）．

(1) $f : \mathbf{C}P^{2m+1} \to \mathbf{C}P^n$ が充満な Sp$(m+1)$ 同変調和写像
$\Longleftrightarrow {}^{\exists}k \in \mathbf{Z},\ {}^{\exists}l \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ s.t. $\mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}(k,l)$

(2) 双次数 (k,l)，$\mathbf{C}^{n+1^*} = \mathcal{H}(k,l)$ なる充満な Sp$(m+1)$ 同変調和写像のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{k,l}$ とし，L^2 位相によるコンパクト化を $\overline{\mathcal{M}_{k,l}}$ とすると，

$$\overline{\mathcal{M}_{k,l}} \cong \left\{ (x_0, \cdots, x_l) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid x_j \geqq 0,\ d_0x_0^2 + \cdots + d_lx_l^2 = \dim \mathcal{H}(k,l) \right\}$$

- $(x_0, \cdots, x_l) = (1, \cdots, 1)$ は大仁田の写像に対応する．
- $\left(0, \cdots, 0, \dfrac{\dim \mathcal{H}(k,l)}{d_i}, 0, \cdots, 0\right)$ は小林の写像に対応する．

3. $\mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$: SU$(m+1)$ 同変調和写像の分類

戦略

- $\mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{H}P^n$：同変写像を分類したい
- $\iota : \mathbf{H}P^n \longrightarrow Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$：全測地的埋め込みがある
- $\mathbf{C}P^m \longrightarrow Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$：次数 0 の同変調和写像の分類はわかる！

$\mathbf{C}P^m \longrightarrow Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ の分類を $\mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{H}P^n$ の分類に応用しよう

同変写像

- $\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}P^n$: tautological vector bundle
  （これは四元数構造 $j_{\mathbf{H}}$ を持つ複素ベクトル束とみなす）
- $f : \mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{H}P^n$: SU$(m+1)$ 同変写像

f による $\mathbf{H} \to \mathbf{H}P^n$ の引き戻し $f^*\mathbf{H} \to \mathbf{C}P^m$ は

階数 2，　次数 0，　四元数構造 $j_{\mathbf{H}}$ を持つ，　等質ベクトル束

$\mathbf{H}^{n+1} = (\mathbf{C}^{2n+2}, \mathbf{J})$（$\mathbf{J}$ は四元数構造）と見なす．

- $\iota : \mathbf{H}P^n \longrightarrow Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ を自然な埋め込み（Sp$(n+1)$ 同変）

$f : \mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{H}P^n$ の分類のために $\iota \circ f : \mathbf{C}P^m \longrightarrow Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ を考える

命題.

- $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ ：充満な SU$(m+1)$ 同変調和写像

$\Longrightarrow \iota \circ f$ ：次数 0 の同変調和写像で，任意の $t \in \mathbf{C}^{2n+2^*}$ に対して $\Delta t = \dfrac{e(f)}{4} t$.

命題.

- $\tilde{f} : \mathbf{C}P^m \to Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ ：次数 0 の SU$(m+1)$ 同変調和写像
- $\forall t \in \mathbf{C}^{2n+2^*}$, $\Delta t = \dfrac{e(f)}{4} t$
- $\mathbf{C}^{2n+2}$ と $\tilde{f}^* S \to \mathbf{C}P^m$ には両立する四元数構造が存在

$\Longrightarrow \tilde{f} = \iota \circ f$ となるような同変調和写像 $f : \mathbf{C}P^m \to \mathbf{H}P^n$ がある.

$(\mathbf{C}^{2n+2}, \mathbf{J})$ と $(\tilde{f}^* S, j_Q)$ の四元数構造が両立する
$\Longleftrightarrow i : \tilde{f}^* S \to \underline{\mathbf{C}^{2n+2}}$ が四元数構造を保つ.

$\mathbf{C}P^m \longrightarrow Gr_2(\mathbf{C}^{2n+2})$

定理.

次数 0 の充満な同変調和写像 $\mathbf{C}P^1 \to Gr_2(\mathbf{C}^{n+2})$ は以下のいずれかと像同値.

(I) $\tilde{f}_\Delta : (\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ の誘導写像， $k > 0,\ l \geqq 0$

(II) $\tilde{f}_0 : (\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ の誘導写像， $k \geqq 0,\ l \geqq 0$

(III) $T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2} & c \\ c & \sqrt{1-c^2} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ とする.

$$\tilde{f}_c = T^{-1}\tilde{f}_0,\quad 0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}}, k \geqq 2$$

定理.

次数 0 の充満な同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \to Gr_2(\mathbf{C}^{n+2}),\ m \geqq 2$ は

$$(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k),\ \mathcal{H}^{l,k+l} \oplus \mathcal{H}^{k+l,l}),\ k, l \geqq 0$$

の誘導写像に像同値.

両立する四元数構造

$\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^{2m+1}$ には不変四元数構造 j_Q が定まる．

$\mathbf{C}P^1$ のとき

$\mathbf{C}^2$ の SU(2) 不変四元数構造から，$S^{k+2l}\mathbf{C}^2$ は k：奇数のとき四元数構造 j，k：偶数のとき実構造 σ を持つ．

$S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2$ の j_Q と両立する四元数構造について：

- $\underline{k：奇数}$ $\longrightarrow$ 四元数構造 $\mathbf{J}$ は $\mathbf{J}(w_1, w_2) = (jw_2, jw_1)$．
- $\underline{k: 偶数}$ $\longrightarrow$ 四元数構造 $\mathbf{J}$ は $\mathbf{J}(w_1, w_2) = (-\sigma(w_2), \sigma(w_1))$．

$m \geqq 2$ のとき

$\mathcal{H}^{l,k+l}$，$\mathcal{H}^{k+l,l}$ は四元数構造をもたないが，互いに双対の関係にあるので，$\mathbf{J}(w_1, w_2) = \big(-(\cdot, w_2), (\cdot, w_1)\big)$ が j_Q と両立する $\mathcal{H}^{l,k+l} \oplus \mathcal{H}^{k+l,l}$ の四元数構造となる．

主結果 2（再掲）

定理 2（K.-N.，2024）.

$\boxed{1}$ 充満な SU(2) 同変調和写像 $\mathbf{C}P^1 \longrightarrow \mathbf{H}P^n$ は以下のいずれかと像同値.

(1) $f_\Delta : \left(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2\right)$ の誘導写像，　$k > 0$，$l \geqq 0$，k：奇数.

(2) $f_0 : \left(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2\right)$ の誘導写像，　$k, l \geqq 0$.

(3) $T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2} & c \\ c & \sqrt{1-c^2} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(S^{k+2l}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+2l}\mathbf{C}^2)$ として

$$f_c = T^{-1} \circ f_0, \quad 0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}}, \ k：奇数, \ k > 0,$$

$\boxed{2}$ 充満な SU$(m+1)$ 同変調和写像 $\mathbf{C}P^m \longrightarrow \mathbf{H}P^n$，$m \geqq 2$ は以下の写像と像同値.

- $\left(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k), \mathcal{H}^{k+l,l} \oplus \mathcal{H}^{l,k+l}\right)$ の誘導写像.

4. 非同変写像の場合

$S^3 \longrightarrow \mathbf{C}P^n$

目的

$S^3 \longrightarrow \mathbf{C}P^n$：全実調和写像の分類

$S^3 = \mathrm{SU}_+(2) \times \mathrm{SU}_-(2)/\mathrm{SU}_\Delta(2)$ とすると，

$$C^\infty(S^3) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} S^l\mathbf{C}_+^2 \otimes S^l\mathbf{C}_-^2 = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}^l.$$

一般化された高橋の定理より，

- $S^3 \longrightarrow \mathbf{C}P^n$：エネルギー密度関数一定全実調和写像
  $\Longleftrightarrow \mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}^l$, $\ ^\exists l \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ （このとき f は次数 l であるという）

$(\underline{\mathbf{C}} \to S^3, \mathcal{H}^l)$ の誘導写像 f_l を標準写像といい，次数 l，エネルギー密度関数一定，全実，充満な調和写像は f_l の変形で表すことができる．

主定理 3

定理（K.-N.）

$f : (S^3, g_{std}) \to \mathbf{C}P^n$：次数 l，エネルギー密度関数一定，全実，充満な調和写像
$\Longrightarrow \mathbf{C}^{n+1^*} \subset \mathcal{H}^l$，$n + 1 \leqq (l + 1)^2$.

- $\mathcal{M}_l$：$\mathbf{C}^{n+1^*} = \mathcal{H}^l$，エネルギー密度関数一定，全実，充満な調和写像のモジュライ空間

このとき

$$\overline{\mathcal{M}_l} = \left\{ C \in \bigoplus_{a,b=0,|a-b|\geqq 2}^{l} S^{2a}\mathbf{C}^2_+ \otimes S^{2b}\mathbf{C}^2_- \;\middle|\; \mathrm{id}_{\mathcal{H}^l} + C \geqq 0 \right\} \subset H(\mathcal{H}^l)$$

ここで，$H(\mathcal{H}^l)$ は $\mathcal{H}^l$ のエルミート準同型全体の集合をさす.