3 次元 naturally reductive 等質空間の等質構造

北海道大学大学院 理学院 数学専攻 博士課程 3 年
大野 優

部分多様体幾何とリー群作用 2024

2024/12/3

1. 概要
2. 等質リーマン構造
3. Naturally reductive 等質空間
4. 3 次元 naturally reductive 等質空間の等質構造

論文

J. Inoguchi, Y. Ohno; Homogeneous structures of 3-dimensional Sasakian space forms, Tsukuba J. Math., to appear.

J. Inoguchi, Y. Ohno; Inoguchi, J. and Ohno, Y., Homogeneous structures of 3-dimensional Lie groups, preprint.

Y. Ohno; Homogeneous structures on $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$, Tsukuba J. Math. **47** (2023), no. 2, 239–246.

概要

- Naturally reductive 等質空間 : リーマン対称空間の一般化.
- 3 次元 naturally reductive 等質空間は分類されており, 等長群の次元が 6 か 4 である.
- 等質構造 : リーマン多様体の等質性を特徴づけるテンソル場.
- 3 次元 naturally reductive 等質空間の等質構造, および商空間表示を分類. 特に, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ において, 非自明な商空間表示が存在した.

等質リーマン多様体

(M, g): リーマン多様体.
$\mathrm{Isom}(M, g)$: 等長変換群.
$\mathrm{Isom}_\circ(M, g)$: その単位元連結成分.

定義

(M, g): 等質リーマン多様体
:⇔M に推移的に作用する閉部分群 $G \subset \mathrm{Isom}(M, g)$ が存在する.

定義

(M, g): 局所等質リーマン多様体
:⇔ 任意の 2 点 $p, q \in M$ に対し, p を q に移す局所等長変換が存在する.

等質リーマン多様体

(M, g): 等質リーマン多様体
$\Rightarrow$1 点 $o \in M$ の固定部分群 H により, **商空間表示** $M \cong G/H$ が得られる.

注意

(M, g) に対し, 商空間表示は一意的ではない.
(例 : $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3)$, $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}(2)/\{e\}$.)

reductive 分解

$M = G/H$: 等質空間,
$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$: G, H のリー環.

定義

$M = G/H$ は **reductive**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \mathfrak{m}$: $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 s.t.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

注意

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ のことを **reductive 分解**と呼ぶ. 商空間表示 G/H に対し, reductive 分解の取り方 (つまり $\mathfrak{m}$ の取り方) は一意的ではない.
- (M, g) が等質リーマン多様体であれば, reductive である. (M, g) が等質擬リーマン多様体の場合, reductive でないものが存在する.
- 射影 π: $G \to G/H$ の微分写像によって, $T_o M$ と $\mathfrak{m}$ が同一視される.

リーマン対称空間

定義

$p \in M$, $B_r(p)$: p のまわりの正規座標球.

$$s_p = \exp_p \circ (-I_p) \circ \exp_p^{-1}, \quad (I_p \text{は } T_pM \text{ の恒等写像})$$

を, p における**測地的対称変換**という. 測地的点対称変換がすべて局所等長変換であるとき, (M, g) は**局所対称**であるという.

∇: Levi-Civita 接続,
R: リーマン曲率テンソル.

定理 (E. Cartan)

(M, g) は局所対称 $\Leftrightarrow \nabla R = 0$.

リーマン対称空間

定義

測地的点対称変換 s_p がすべて M 全体で定義された等長変換であるとき, (M, g) を**リーマン対称空間**と呼ぶ.

定理

リーマン対称空間は, 完備な等質リーマン多様体である.

Ambrose-Singer の定理

(M, g) : 完備, 単連結リーマン多様体

定理 (Ambrose-Singer)

以下は同値 :

1. (M, g) は等質リーマン多様体
2. ∃アファイン接続 $\tilde{\nabla}$（$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ***Ambrose-Singer* 接続**） *s.t.*

$$\tilde{\nabla} g = 0, \quad \tilde{\nabla} R = 0, \quad \tilde{\nabla} S = 0.$$

ただし, $S = \tilde{\nabla} - \nabla$（$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ **等質リーマン構造**）.

Ambrose-Singer の定理

例 (リーマン対称空間)

(M, g) : リーマン対称空間
⇒Levi-Civita 接続 ∇ は Ambrose-Singer 接続であり，$S = 0$ を等質リーマン構造として持つ，$(\because \nabla R = 0)$.

例 (リーマンリー群)

G : リー群，
g : G の左不変計量.
$\Rightarrow (G, g)$ は等質リーマン多様体（$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ **リーマンリー群**）．商空間表示 $G \cong G/\{e\}$ を持つ．Ambrose-Singer 接続として，

$$\tilde{\nabla}_X Y = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

を持つ．この接続は，Cartan-Schouten (−) 接続と呼ばれる．

Ambrose-Singer の具体的な構成法

$(1 \to 2)$
$(M = G/H, g)$: 等質リーマン多様体,
$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$: reductive 分解.

$\to$**cannonical 接続 $\tilde{\nabla}$** が

$$(\tilde{\nabla}_{X^*} Y^*)_o = -([X, Y]_{\mathfrak{m}})^*_o, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

で定義される．ただし, X^* は $X \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$X^*_p = \frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot p \bigg|_{t=0}$$

で定義される M 上のベクトル場.

Ambrose-Singer の具体的な構成法

$(2 \to 1)$
$S : (M, g)$ の等質リーマン構造.

$\to \mathfrak{h}$ を $\tilde{\nabla} = \nabla + S$ のホロノミー代数とする. (つまり, $\tilde{R}(X, Y) \in \mathfrak{h}$, $\tilde{R}$ は $\tilde{\nabla}$ の曲率テンソル). $\tilde{H}$ を対応する単連結リー群とする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus T_o M$ 上にカッコ積 $[\cdot, \cdot]$ を

$$\begin{aligned} [U, V] &= UV - VU, \\ [U, X] &= U(X), \\ [X, Y] &= -\tilde{R}(X, Y) - S_X Y + S_Y X, \end{aligned}$$

で定義すれば, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus T_o M$ はリー環となり, 特に, $[\mathfrak{h}, T_o M] \in T_o M$ である. $(X, Y \in T_o M,\ U, V \in \mathfrak{h})$. $\mathfrak{g}$ に対応する単連結リー群 $\tilde{G}$ をとれば, $G = \tilde{G}/\Gamma$, $H = \tilde{H}/\Gamma$ かつ $M = G/H$ とできる.

Ambrose-Singer の具体的な構成法

$S, S' : (M, g), (M', g')$ 上の等質リーマン構造

定義

S と S' が**同型**
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists$ 等長写像 $\phi \colon (M, g) \to (M', g')$ s.t.

$$\phi_*(S_X Y) = S'_{\phi_* X} \phi_* Y, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}' : S, S'$ から得られる reductive 分解

定理

S と S' が同型
$\Leftrightarrow \exists$ 同型写像 $F \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *s.t.*

$$F(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}', \quad F(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$$

かつ $F|_{\mathfrak{m}} \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}'$ が等長写像.

Ambrose-Singer の具体的な構成法

異なる reductive 分解から, 同型な等質リーマン構造が得られる場合がある.

例

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の等質リーマン構造として $S = 0$ のみであることがわかる. 一方で, $\mathbb{R}^2$ は, 対称空間としての表示 $\mathbb{R}^2 = \mathrm{SE}(2)/\mathrm{SO}(2)$ と, 可換リー群としての表示 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2/\{0\}$ の 2 つの商空間表示を持つ.

注意

このことから, 等質リーマン構造のみから, 商空間表示および reductive 分解をすべて分類することはできない. ケースバイケースでの議論が必要.

2次元リーマン多様体の等質リーマン構造

(M, g) : 2次元等質リーマン多様体
(M, g) が単連結の場合は, $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$ のいずれかと同型.

定理 (Tricherri-Vanhecke)

$S : (M, g)$ の 0 でない等質リーマン構造
$\Rightarrow (M, g)$ は負の定曲率を持つ. 特に, (M, g) が単連結の場合は $\mathbb{H}^2$ と同型.

$S \neq 0$ は, $\mathbb{H}^2 = \{x + yi \in \mathbb{C} | y > 0\}$ の可解リー群表示

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| y > 0 \right\}$$

と対応する. このリー群を $\mathrm{GA}^+(1)$ と書く. 商空間表示は
$\mathbb{H}^2 \cong \mathrm{GA}^+(1)/\{e\}$.

Naturally reductive 等質空間

(M, g) : 等質リーマン多様体

定義

(M, g) :**naturally reductive 等質空間**
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ s.t. $o \in M$ を通り, $X \in \mathfrak{m} \cong T_oM$ に接する測地線 $\gamma(t)$ が,

$$\gamma(t) = (\exp tX) \cdot o$$

と表せる．また，このような reductive 分解のことを, **naturally reductive 分解**と呼ぶ.

等質リーマン構造による特徴づけ

(M, g) : 等質リーマン多様体

定理 (Tricerri-Vanhecke)

次は同値 :

1. (M, g) 上の等質リーマン構造 S で,

$$S_X Y + S_Y X = 0$$

を満たすものが存在する.

2. (M, g) は *naturally reductive* 等質空間.

命題

対称空間は naturally reductive 等質空間である.

3 次元 naturally reductive 等質空間の分類

(M, g) : 3 次元単連結等質リーマン多様体
$d = \dim(\mathrm{Isom}(M, g))$

定理 (Tricerri-Vanhecke)

(M, g) が *naturally reductive* であるとき, 次のいずれかと同型 :

1. リーマン対称空間 $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ $(d = 6)$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ $(d = 4)$.
2. ハイゼンベルグ群 Nil_3 $(d = 4)$.
3. *Berger* 球面 $(d = 4)$.
4. 普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ $(d = 4)$.

空間系 $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ の等質構造

以下, (1,2)-テンソル S に対し, (0,3)-テンソル $S_\flat$ を $S_\flat(X, Y, Z) = g(S_X Y, Z)$ で定義.

$\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ はいずれも

$$S_\flat = \lambda dV, \lambda \in \mathbb{R}$$

を等質構造として持つ (Tricerri-Vanhecke). これは $S_X Y + S_Y X = 0$ を満たし, $S_\flat = \lambda dV$ から定まる reductive 分解は naturally reductive 分解.

注意

空間系 $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ のすべての等質構造と商空間表示は, 1986 年に岡山大の阿部貢士によって分類された.

積多様体 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の等質構造

定理 (O, 2023)

$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ の商空間表示は $(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$, *reductive* 分解は

$$\mathfrak{m}_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda w & v & 0 \\ -\lambda w & 0 & u & 0 \\ -v & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} \right\}.$$

等質リーマン構造は

$$S_\flat^\lambda = \lambda(dz \otimes dV_{\mathbb{S}^2}), \quad (\lambda \geq 0).$$

$\lambda = 0$ のときのみ *naturally reductive* であり, 特に対称空間である.

注意

$\mathbb{S}^2$ および $\mathbb{R}$ の等質リーマン構造は $S = 0$ のみである.

積多様体 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の等質構造

定理 (O, 2023)

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(w = x + yi, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} | y > 0\}$ の商空間表示は

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}/\mathrm{SO}(2),$$
$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathrm{GA}^+(1) \times \mathbb{R}/\{e\}$$

の 2 種類. 等質リーマン構造は

$$S_\flat^\lambda = \lambda(dz \otimes dV_{\mathbb{H}^2}) \quad (\lambda \geq 0)$$
$$S_\flat = \frac{dx}{y} \otimes dV_{\mathbb{H}^2}.$$

$\lambda = 0$ のときのみ *naturally reductive* であり, 特に対称空間である.

3 次元ユニモデュラーリー群の等質構造

(G, g) :3 次元ユニモデュラーリー群
$\{e_1, e_2, e_3\}$: $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 s.t.

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3.$$

$d = 4$ とすると, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$.
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ のとき, (G, g) は Berger 球面.
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$ のとき, (G, g) はハイゼンベルグ群 Nil_3.
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ のとき, (G, g) は普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

Nil_3 の等質リーマン構造

$\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$: $\{e_1, e_2, e_3\}$ の双対基底.

定理 (Tricerri-Vanhecke)

Nil_3 の等質リーマン構造は

$$S^t_\flat = 2t\theta^3 \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) - \lambda_3\theta^1 \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) - \lambda_3\theta^2 \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1).$$

商空間表示は以下の通り：

1. $\mathrm{Nil}_3 \ltimes \mathrm{SO}(2)/\mathrm{SO}(2)$. 対応する等質リーマン構造は $t \neq \frac{\lambda_3}{2}$ のとき. $t = -\frac{\lambda_3}{2}$ のときのみ *naturally reductive.*
2. $\mathrm{Nil}_3/\{e\}$. 対応する等質リーマン構造は $t = \frac{\lambda_3}{2}$ のとき. $\tilde{\nabla} = \nabla + S^{\frac{\lambda_3}{2}}$ は, Nil_3 の *Cartan-Schouten* $(-)$ 接続である.

Berger 球面の等質リーマン構造

定理 (Gadea-Oubiña)

Berger 球面の等質リーマン構造は

$$S_\flat^t = 2t\theta^3 \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) - \lambda_3\theta^1 \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) - \lambda_3\theta^2 \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1).$$

商空間表示は以下の通り：

1. $\mathrm{SU}(2) \ltimes \mathrm{SO}(2)/\mathrm{SO}(2)$. 対応する等質リーマン構造は $t \neq -\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}$ のとき．$t = -\frac{\lambda_3}{2}$ のときのみ *naturally reductive.*
2. $\mathrm{SU}(2)/\{e\}$. 対応する等質リーマン構造は $t = -\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}$ のとき．$\tilde{\nabla} = \nabla + S^{-\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}}$ は, $\mathrm{SU}(2)$ の *Cartan-Schouten* $(-)$ 接続である．

$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の等質リーマン構造

定理 (井ノ口-O)

$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の等質リーマン構造は

$$S^t_\flat = 2t\theta^3 \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) - \lambda_3\theta^1 \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) - \lambda_3\theta^2 \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1)$$

および

$$S_\flat = 2\rho \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) - \lambda_3\theta^1 \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) - \lambda_3\theta^2 \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1).$$

ただし,

$$\rho = \sqrt{-\lambda\lambda_3}\cos\phi\,\theta^1 + \sqrt{-\lambda\lambda_3}\sin\phi\,\theta^2 + \frac{\lambda_3}{2}\theta^3,$$

ϕ は $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ 上のある関数.

$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の等質リーマン構造

定理 (井ノ口-O)

$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の商空間表示は以下の通り：

1. $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2))/\mathrm{SO}(2)$. 対応する等質リーマン構造は S^t で $t \neq -\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}$ のとき. $t = -\frac{\lambda_3}{2}$ のときのみ *naturally reductive*.
2. $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})/\{e\}$. 対応する等質リーマン構造は $t = -\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}$ のとき. $\tilde{\nabla} = \nabla + S^{-\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{2}}$ は, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の *Cartan-Schouten* $(-)$ 接続である.
3. $\mathrm{GA}^+(1) \times \mathbb{R}/\{e\}$. 対応する等質リーマン構造は S. $\tilde{\nabla} = \nabla + S$ は $\mathrm{GA}^+(1) \times \mathbb{R}$ の *Cartan-Schouten* $(-)$ 接続である.

$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の等質リーマン構造

注意

- 2023 年に, 3 次元リー群の等質リーマン構造の分類に関する論文が出たが, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ のケースが抜けていた．これは, 等質リーマン構造にリー群作用に関する左不変性を仮定してしまっていたため.
- $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ はユニモデュラーであるが, $\mathrm{GA}^+(1)\times\mathbb{R}$ は非ユニモデュラーであり, リー群として同型でない．一方, リーマン多様体としては等長的.

証明の概要

S : 等質リーマン構造
$\to \tilde{\nabla} g = 0, \tilde{\nabla} R = 0, \tilde{\nabla} S = 0.$

$\tilde{\nabla} g = 0$ より, 1-形式 ρ, σ, τ を用いて

$$S_\flat = 2(\rho \otimes (\theta^1 \wedge \theta^2) + \sigma \otimes (\theta^2 \wedge \theta^3) + \tau \otimes (\theta^3 \wedge \theta^1))$$

とかける.

$\tilde{\nabla} R = 0$ より,

$$\sigma = -\frac{\lambda_3}{2}\theta^1, \quad \tau = -\frac{\lambda_3}{2}\theta^2$$

が従う.

証明の概要

$\rho = \rho_1\theta^1 + \rho_2\theta^2 + \rho_3\theta^3$ とおく.

$\tilde{\nabla} S = 0$ より, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ または

$$(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 = -\lambda_1\lambda_3$$

が恒等的に従う. 右辺は $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ のときに正となり, 左不変でない等質リーマン構造が得られる.

奥村の 1 パラメータ接続

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$: 佐々木多様体

$$\nabla^r_X Y := \nabla_X Y + A^r(X)Y,$$
$$A^r(X)Y := d\eta(X, Y)\xi - r\eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X.$$

命題

$$\nabla^r g = 0, \nabla^r \varphi = 0, \nabla^r \eta = 0, \nabla^r \xi = 0, \nabla^r A^r = 0.$$

命題から

$$(M, \varphi, \xi, \eta, g) \text{ は佐々木 } \varphi\text{-対称空間} \Leftrightarrow \nabla^r R = 0$$
$$\Leftrightarrow \nabla^r \text{は Ambrose-Singer 接続}$$

奥村の 1 パラメータ接続

Nil_3, Berger 球面, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ は佐々木空間系．したがって, 奥村の 1 パラメータ接続 ∇^r は Ambrose-Singer 接続である．Nil_3, Berger 球面の場合は, 奥村の 1 パラメータ接続と Ambrose-Singer 接続が一致する．$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の場合には, 例外が 1 つある．

最後に

- 一般の 3 次元リー群の場合 ($d = 3$), Ambrose-Singer 接続として Cartan-Schouten の $(-)$ 接続のみ持つ. (井ノ口-O).
- Ambrose-Singer 接続や等質リーマン構造に関する話題は最近よく話されている. しかし, 商空間表示との対応や, 等質構造の左不変性など, 気をつけないといけないことがある.
- 一般次元の場合に 3 次元の場合の例外的現象が起きるのか確かめたい.