擬Riemann対称R空間の対蹠集合

東京理科大学 創域理工学部 数理科学科
杉本恭司（すぎもと きょうじ）

「部分多様体幾何とリー群作用2024」

1. はじめに

- **Definition.**
  - $\mathfrak{g}$: 実半単純 Lie 代数,
  - $X \in \mathfrak{g}$: 半単純元とする.
  - X : 双曲元 (resp. 楕円元)

    $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}}$ $\mathrm{ad}\,X$ の固有値が全て実数 (純虚数).

- **Definition.**

- G : 連結半単純Lie群, $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ とする.
- $\mathfrak{g}$ の双曲元 (resp. 楕円元) X を通る G の随伴軌道
$\mathrm{Ad}\,G(X) \cong G/C_G(X)$ を双曲(随伴)軌道 (resp. 楕円(随伴)軌道) という.

- ここで, $C_G(X) := \{x \in G \mid \mathrm{Ad}\,x(X) = X\}$

· Remark

· $G/C_G(X)$: 双曲軌道 $\Leftrightarrow$ $G/C_G(X)$: para-Kähler等質空間.

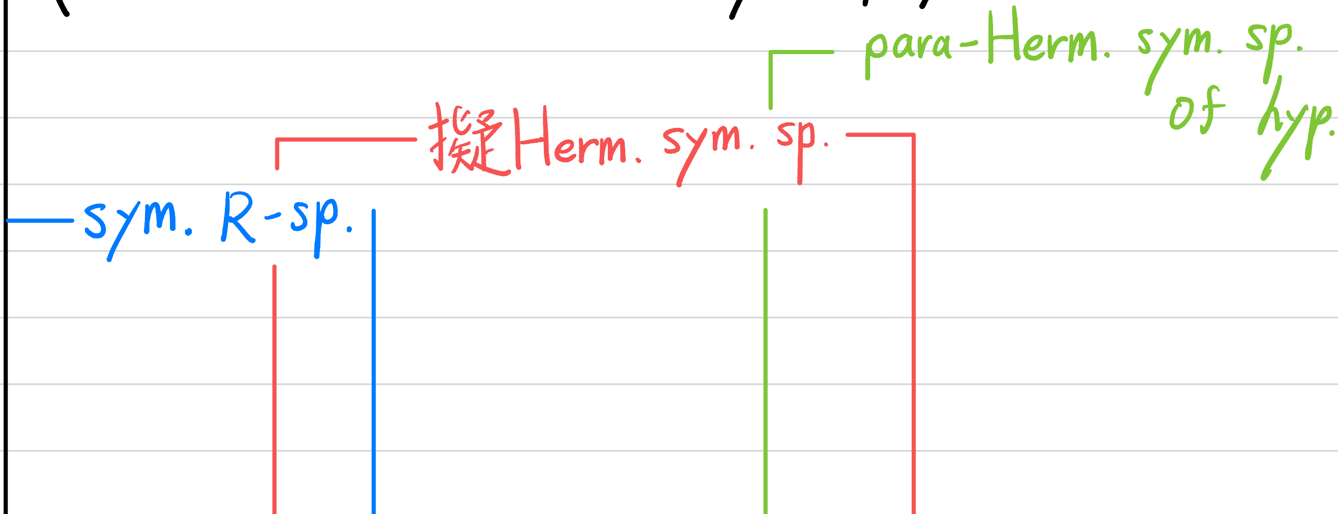
· $G/C_G(X)$: 楕円軌道 $\Leftrightarrow$ $G/C_G(X)$: 擬Kähler等質空間.

双曲軌道として実現される対称空間	$\longleftrightarrow$	双曲軌道型半単純 para-Hermite対称空間
楕円軌道として実現される対称空間	$\longleftrightarrow$	半単純 擬Hermite対称空間

擬 Riem. sym. R-sp. assoc. with 半単純 SGLA

para-real form of para-Herm. sym. sp. of hyp.

(real form of 擬 Herm. sym. sp.)



· **Definition.**

· $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \rho)$: 半単純SGLA,

· Z : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の特性元,

· $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X) = X\}$, $\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X) = -X\}$,

· H : $\exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}})$ で生成される $GL(\mathfrak{m})$ の連結Lie部分群.

· H軌道 $H(Z)$ を $(\mathfrak{g}, \rho)$ に付随した擬Riemann対称R空間

という.

· **Theorem (S.)**

· $M \cong G/L$：双曲軌道型半単純 para-Hermite 対称空間.

(1) S：Mの大対蹠集合とすると,

$\exists\theta$：$\mathfrak{g}$のCartan対合, $\exists\mathfrak{a}$：$\mathfrak{g}^{-\theta}$の極大可換部分空間 s.t.

$$S = M \cap \mathfrak{a}.$$

従って, Sは(G, A)のWeyl群の軌道である ($A := \exp\mathfrak{a}$).

(2) Mの対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.

(3) Mの2つの大対蹠集合はpara正則等長変換で移り合う.

· **Theorem. (S.)**

· Q : 双曲軌道型半単純 para-Hermite 対称空間 $M \cong G/L$ の原点を含む para 実形.

(1) S : Q の大対蹠集合 とすると,

$^\exists \theta$: $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合, $^\exists \xi \in Inv(\mathfrak{g})$ $(\theta \circ \xi = \xi \circ \theta)$,

$^\exists \mathfrak{a}$: $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi}$ の極大可換部分空間 s.t.

$$S = Q \cap \mathfrak{a}.$$

従って, S は, (H^a, A) の Weyl 群の軌道.

但し, H^a は, $Lie(H^a) = (\mathfrak{g}^\theta \cap \mathfrak{g}^\xi) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi})$ なる G の連結 Lie 部分群.

(2) Qの対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.

(3) Qの2つの大対蹠集合は等長変換で移り合う.

・**Theorem.**

・N : 半単純SGLAに付随した擬Riemann対称R空間.

(1) Nの対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.

(2) Nの2つの大対蹠集合は互いに合同, i.e.,
Nのある等長変換で互いに移り合う.

+「ほとんどの擬Riemann対称R空間は,
非自明な対蹠集合をもつ」

2. Para-Hermite 対称空間

- Definition.
  - G: 連結Lie群, L: Gの開部分群, $\sigma (\neq id_G) \in Inv(G)$
  - $(G/L, \sigma)$: 対称空間 $\overset{}{\underset{def}{\iff}}$ $(G^\sigma)_0 \subset L \subset G^\sigma$.
  - 但し, $G^\sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$, $(G^\sigma)_0$ はその単位連結成分
  - G/L: 半単純 $\underset{def}{\iff}$ G: 半単純.
  - G/L: 効果的 $\underset{def}{\iff}$ $G \curvearrowright G/L$: 効果的.

· Definition.

· $(G/L, \sigma)$：対称空間，$o := eL$，$\tau_x(yL) := xyL \ (x, y \in G)$.

· $s_o : G/L \longrightarrow G/L$，$xL \mapsto \sigma(x)L$，

· $s_p := \tau_x \circ s_o \circ \tau_{x^{-1}}$ for $p := xL \in G/L$.

· s_p は well-defined で，s_p を p における点対称という.

· 部分集合 $S \subset G/L$ が対蹠集合

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p, q \in S$，$s_p(q) = q$.

Remark

・点対称は次を満たす:

$$\begin{cases} \text{(i) } p \text{ は } S_p \text{ の孤立固定点,} \\ \text{(ii) } (S_p)^2 = id_{G/L}. \\ \text{(iii) } S_p \circ S_q = S_{s_p(q)} \circ S_p. \end{cases}$$

・(i) より, $\forall p \in G/L$, $\{p\}$ は G/L の対蹠集合である.

・一点からなる対蹠集合を自明な対蹠集合という(ことにする).

· **Definition.**

· G不変なpara複素構造 I と, G不変 para-Hermite計量 g を兼ね備えた対称空間 G/L を **para-Hermite対称空間** という.

· I : **para複素構造**

$\underset{\text{def.}}{\iff}$ (1) $I : (1,1)$型テンソル場 s.t. $I^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}(G/L)}$.

(2) $\dim T_p^+ G/L = \dim T_p^- G/L$ for $\forall p \in G/L$.

但し, $T_p^\pm G/L = \{ u \in T_p G/L \mid I_p u = \pm u \}$.

(3) $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$

for $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$.

・g : para-Hermite計量 (w.r.t. I)

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $g(IX, Y) + g(X, IY) = 0$ for ${}^{\forall}X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$.

・Para-Hermite対称空間 $(G/L, \sigma, I, g)$ に対して，
対合的反para正則等長変換の固定点集合の連結成分を
para実形という．

・但し，$\Phi : G/L \to G/L$ が反para正則

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $(d\Phi)_p \circ I_p = -I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p \quad (p \in G/L)$.

· 例

· $G := SL(p+q, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ $(1 \leqq p \leqq q)$.

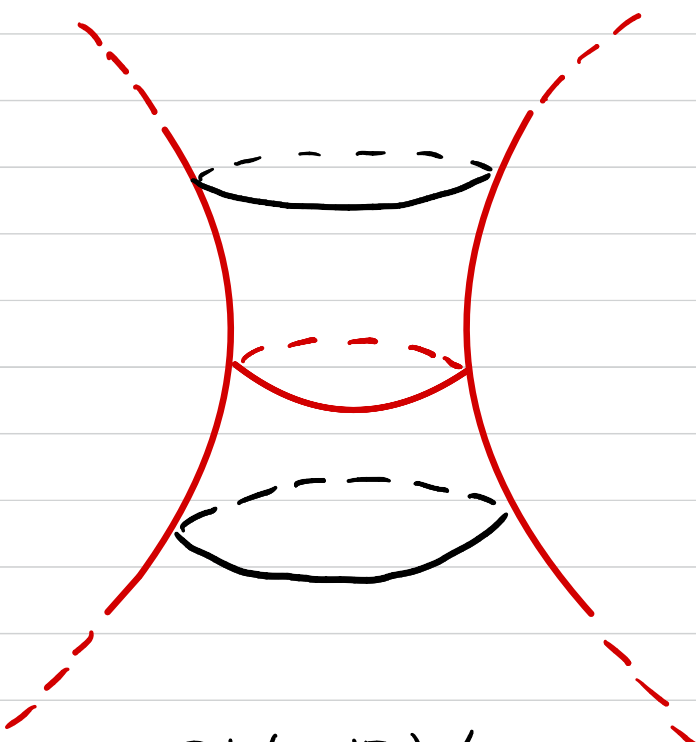
· $Z := \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} qE_p & 0 \\ 0 & -pE_q \end{pmatrix}$ は $\mathfrak{g}$ の双曲元.

$\rightsquigarrow G/C_G(Z)$: para-Herm. sym. sp. of hyp. with

$$I_o = \mathrm{ad}(Z)|_{T_o G/C_G(Z)}, \quad g_o = B_{\mathfrak{g}}|_{T_o G/C_G(Z) \times T_o G/C_G(Z)}.$$

· $C_G(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} X \in GL(p, \mathbb{R}),\ Y \in GL(q, \mathbb{R}), \\ \det X \cdot \det Y = 1 \end{array} \right\}$.

$p = q = 1$ のとき.



$SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$

・赤線はpara実形.

・双曲線は,

$x\mathbb{R}^* \longmapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \mathbb{R}^*$

の固定点集合

・S^1 は,

$x\mathbb{R}^* \longmapsto {}^t x^{-1}\mathbb{R}^*$

の固定点集合.

3. 対蹠集合

- 以下では、
- $(G/L, \sigma, I, g)$：双曲軌道型効果的半単純para-Herm. s. sp.,

  $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$, $L = C_G(Z)$, $M := \mathrm{Ad}G(Z) \cong G/L$

  とする.
- また、簡単のため、g は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式から誘導されている とする （i.e., $g_o = \lambda B_{\mathfrak{g}}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$).

· **Lemma.**

· G/L には，para正則等長変換で移り合うものを除いて，コンパクトpara実形が一意的に存在する.

· **Remark**

· R：原点 o を含む G/L のコンパクトpara実形とすると，R は対称R空間で，G/L は R の余接束と微分同型である.

・更にRemark

(1) 逆に、対称R空間の余接束はpara-Hermite対称空間の構造をもつ(双曲軌道型とは限らない).

(2) 一般に、効果的半単純para-Hermite対称空間は、ある対称R空間の被覆多様体の余接束と微分同型である.

(3) より一般に、半単純非Riemann対称空間は、あるコンパクトRiemann対称空間上のベクトル束と微分同型である.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\text{hyp.}}{SU^*(8)/(SU^*(4)\times SU^*(4)\times \mathbb{R}^+)} \arrow[d] & \overset{\text{non-hyp.}}{E_{6(6)}/(Spin(5,5)\times \mathbb{R}^+)} \arrow[dl] \arrow[d] \\
G_2(\mathbb{H}^4) \arrow[d] & \overset{\text{hyp.}}{E_{6(6)}/(Spin(5,5)\times \mathbb{R}^*)} \arrow[dl] \\
G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2 &
\end{tikzcd}
$$

· Theorem (S.)

· $S \subset G/L$: 対蹠集合とすると,

$^{\exists}R$: G/L のコンパクトpara実形 s.t. $S \subset R$.

· 従って, $\#_2 G/L = \#_2 R$.

· 但し, $U = G/L$ or R に対して,

$$\#_2 U := \sup\{\#A \mid A : U \text{ の対蹠集合}\}$$

· Outline of proof.

· $G/L \cong M$ の同一視の下，$X, Y \in M \subset \mathfrak{g}$ に対して，次が成り立つ

$$\begin{cases} \cdot\ S_X = \exp \sqrt{-1}\pi \operatorname{ad} X|_M \\ \cdot\ S_X(Y) = Y \Leftrightarrow [X, Y] = 0. \end{cases}$$

· $\boxed{\text{原点を含むコンパクトpara実形}}$ と

$\boxed{\mathfrak{g}\text{の Cartan 対合 }\theta\text{ で，}\theta\circ\sigma = \sigma\circ\theta\text{ をみたすもの}}$

が対応することと，次の Lemma をつかうとわかる．

· **Lemma. (S.)**

· $\mathfrak{g}$: 実半単純Lie代数,

· $\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \cdots$: 互いに可換な$\mathfrak{g}$の対合的自己同型.

· このとき,

$\exists\theta$: $\mathfrak{g}$のCartan対合 s.t. $\theta\circ\sigma_i = \sigma_i\circ\theta$ for $\forall i \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$\square$

· $S \subset G/L$: 対蹠集合. S : 大対蹠集合 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\#S = \#_2 G/L$.

· **Theorem (S.)（再掲）**

· $M \cong G/L$ の同一視の下,

(1) S : M の大対蹠集合とすると,

$\exists \theta$: $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合, $\exists \mathfrak{a}$: $\mathfrak{g}^{-\theta}$ の極大可換部分空間 s.t.

$$S = M \cap \mathfrak{a}.$$

従って, S は (G, A) の Weyl 群の軌道である $(A := \exp \mathfrak{a})$.

(2) M の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.

(3) M の2つの大対蹠集合は para 正則等長変換で移り合う.

· **Theorem. (S.) (再掲)**

· Q : $M \cong G/L$ の原点を含む para 実形.

(1) S : Q の大対蹠集合 とすると,

$^\exists \theta$: $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合, $^\exists \xi \in Inv(\mathfrak{g})$ $(\theta \circ \xi = \xi \circ \theta)$,

$^\exists \mathfrak{a}$: $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi}$ の極大可換部分空間 s.t.

$$S = Q \cap \mathfrak{a}.$$

従って, S は, (H^a, A) の Weyl 群の軌道.

但し, H^a は, $\mathrm{Lie}(H^a) = (\mathfrak{g}^{\theta} \cap \mathfrak{g}^{\xi}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\xi})$ なる

G の連結 Lie 部分群.

(2) Qの対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.

(3) Qの2つの大対蹠集合は等長変換で移り合う.

・<u>Theorem</u> (再掲)

・N : 半単純SGLA に付随した擬Riemann対称R空間.

(1) Nの対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.

(2) Nの2つの大対蹠集合は互いに合同, i.e.,

Nのある等長変換で互いに移り合う.

· Proposition. (S.)

· N : 半単純SGLAに付随した擬Riemann対称R空間.

N : ある対称R空間の非コンパクト双対でない

$$\Rightarrow \quad \#_2 N \geqq 2.$$

· Outline of proof.

· Q : G/L の o を含む para 実形とすると, $\exists 1\, \hat{\xi} \in Inv(G)$ s.t.

(i) $\hat{\xi} \circ \sigma = \sigma \circ \hat{\xi}$, (ii) $\hat{\xi}(L) = L$,

(iii) Q は $xL \mapsto \hat{\xi}(x)L$ の固定点集合の o を含む連結成分.

(Q : コンパクト $\Leftrightarrow$ $\hat{\xi}$: Cartan 対合 である).

· $H := (G^{\hat{\xi}})_0$ とすると,

$$Q = H/(H \cap L)$$

となる.

・$\hat{\theta}$: G の Cartan 対合 s.t. $\hat{\theta}\circ\hat{\xi}=\hat{\xi}\circ\hat{\theta}$, $\hat{\theta}\circ\sigma=\sigma\circ\hat{\theta}$.

$K:=G^{\hat{\theta}}$, $\Theta : G/L\to G/L$, $xL\mapsto\hat{\theta}(x)L$, $R:=(G/L)^{\Theta}$.

・R は G/L のコンパクトpara実形 $(o\in R)$ で

$$R=K/(K\cap L)$$

・このとき,

$$Q\cap R=(K\cap H)/(K\cap H\cap L)$$

となる.

- $K \cap H$ は連結で、$Q \cap R$ は連結である。
- $\sigma|_{K \cap H} \neq \mathrm{id}$ であれば、$Q \cap R$ はコンパクト対称空間になる。
- $\xi := \hat{\xi}_*$, $\theta := \hat{\theta}_*$, $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}^{\xi}$, $\mathfrak{r} := \mathfrak{g}^{\theta}$ とする。
- **<u>Lemma. (S.)</u>**

$$\sigma|_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{r}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{q} \cap \mathfrak{r}} \iff \xi = \theta \circ \sigma.$$

・$\xi = \theta \circ \sigma$ なる形の対合に対応する G/L の o を含む

para実形は R の非コンパクト双対であり,

・para実形がある対称R空間の非コンパクト双対

であれば,対応する対合は「$\xi = \theta \circ \sigma$」のような形である.

$\square$

ご清聴ありがとうございました.