極大対蹠部分群と奇数次数の被覆準同型写像

田中 真紀子

東京理科大学 創域理工学部 数理科学科

部分多様体幾何とリー群作用 2024

東京理科大学 神楽坂キャンパス 森戸記念館

2024 年 12 月 2 日–3 日

本講演の内容は田崎博之氏との共同研究に基づく

1. コンパクト対称空間の対蹠集合
2. コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群
3. 奇数次数の被覆準同型写像と対蹠部分群
4. $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

コンパクト対称空間の対蹠集合

M : Riemann 対称空間

$\forall x \in M, \exists s_x$: x を孤立不動点にもつ対合的等長変換

s_x を x における**点対称**という

$A \subset M$: 部分集合

A : **対蹠集合** (an antipodal set) $:\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ s_x(y) = y$

対蹠集合は離散

例. $M = S^n\,(\subset \mathbb{R}^{n+1}),\ \ x \in S^n,\ \{x, -x\} = \{\pm x\}$: 対蹠集合

$M = T^n = (S^1)^n,\ \ (x_1, \ldots, x_n) \in T^n,\ \{(\pm x_1, \ldots, \pm x_n)\}$: 対蹠集合

$M = \mathbb{R}P^n,\ \ v \subset u^\perp$ を満たす $u, v \in \mathbb{R}P^n,\ \{u, v\}$: 対蹠集合

A : M の**極大**対蹠集合 $:\Leftrightarrow\ A' \subset M$: 対蹠集合, $A \subset A' \Rightarrow\ A = A'$

上の例で $\{\pm x\}$ は S^n の極大対蹠集合，$\{(\pm x_1, \ldots, \pm x_n)\}$ は T^n の極大対蹠集合，$n = 1$ のとき $\{u, v\}$ は $\mathbb{R}P^1 = S^1$ の極大対蹠集合, $n \geq 2$ のとき $\{u, v\}$ は $\mathbb{R}P^n$ の極大対蹠集合ではない

M : 連結，$A \subset M$: 対蹠集合

$x, y \in A, x \neq y \ \Rightarrow \ \exists \gamma$: 閉測地線 s.t. x, y は γ 上で対蹠点

コンパクト Riemann 対称空間には 2 点以上からなる対蹠集合が存在

非コンパクト型 Riemann 対称空間, Euclid 空間の対蹠集合は 1 点集合

以下、Riemann 対称空間はコンパクトとし、コンパクト対称空間という。

コンパクト対称空間 M の対蹠集合 A の位数 $|A| < \infty$

$\exists \max\{|A| : A$ は M の対蹠集合 $\} =: \#_2 M$: M の **2-number**

例. $\#_2 S^n = 2,\ \#_2 T^n = 2^n,\ \#_2 \mathbb{R}P^n = n+1.$

$\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $u_1, \dots, u_{n+1}$ に対して $\{\mathbb{R}u_1, \dots, \mathbb{R}u_{n+1}\}$ は $\mathbb{R}P^n$ の極大対蹠集合で、対蹠集合の位数の最大値は $n+1$

Chen-Nagano (Trans. Amer. Math. Soc. 1988) はコンパクト対称空間 M の $\#_2 M$ について研究し、多くの M について $\#_2 M$ を決定した。オイラー標数 $\chi(M)$ と $\#_2 M$ の関係についても調べ、例えば、$\chi(M) \leq \#_2 M$ が成り立ち、M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合には等号が成立する、などの結果を得た。

Takeuchi は M が対称 R 空間ならば $\#_2 M$ は $\mathbb{Z}_2$-Betti 数の和に等しいことを示した (Nagoya Math. J. 1989)。

コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群

G : 両側不変計量をもつコンパクト Lie 群

G はコンパクト対称空間, $x \in G$ における点対称 s_x は

$s_x(y) := xy^{-1}x \ (y \in G)$

Remark. コンパクト Lie 群の点対称は群構造で定まるので非連結の場合も自然に対称空間になる。

e : G の単位元

A : G の対蹠集合, $e \in A$

$\Rightarrow \forall x, y \in A,\ x^2 = y^2 = e,\ xy = yx$

A : G の極大対蹠集合, $e \in A$

$\Rightarrow A$ は $(\mathbb{Z}_2)^t$ と同型な部分群

$r_2(G)$：G の **2-rank**

$G' \cong (\mathbb{Z}_2)^t$ を満たす部分群 $G' \subset G$ が存在する自然数 t の最大値

$\#_2 G = 2^{r_2(G)}$

G の部分群が対蹠集合のとき**対蹠部分群**という

G の部分群 A が対蹠部分群 $\Leftrightarrow \forall a \in A, a^2 = e$ かつ $\forall a, b \in A, ab = ba$

$\underline{G = O(n), U(n), Sp(n)}$

$O(n) := \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t x x = 1_n\}$

$U(n) := \{x \in GL(n, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{x} x = 1_n\}$

$Sp(n) := \{x \in GL(n, \mathbb{H}) \mid {}^t \bar{x} x = 1_n\}$

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n \cong (\mathbb{Z}_2)^n, \ |\Delta_n| = 2^n$$

Δ_n は共役を除いて唯一の G の極大対蹠部分群

$\underline{G = SO(n), SU(n)}$

$SO(n) := \{x \in O(n) \mid \det(x) = 1\}$

$SU(n) := \{x \in U(n) \mid \det(x) = 1\}$

$\Delta_n^+ := \{d \in \Delta_n \mid \det(d) = 1\}$ は共役を除いて唯一の G の極大対蹠部分群

$\#_2 G = 2^{n-1}$

これらの古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の共役類を分類した (T.-Tasaki, J. Lie Theory 2017)

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ (μ は自然数)，$\mathbb{Z}_\mu := \{\alpha 1_n \mid \alpha^\mu = 1\}$

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ (μ は n を割り切る)，

$Sp(n)/\mathbb{Z}_2$，$O(n)/\mathbb{Z}_2$，$SO(n)/\mathbb{Z}_2$ (n は偶数)

Remark. これらの分類結果を利用してコンパクト対称空間

$G_k(\mathbb{K}^n)(\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H})$, $Sp(n)/U(n)$, $SO(2n)/U(n)$ の商空間 $(*)$ の極大対蹠集合の合同類の分類を得た (T.-Tasaki, Differ. Geom. Appl. 2020)

$(*)$ $G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H})$, $(Sp(n)/U(n))/\mathbb{Z}_2$, $(SO(2n)/U(n))/\mathbb{Z}_2$

コンパクト対称空間 $U(n)/O(n)$, $U(2n)/Sp(n)$, $SU(n)/SO(n)$, $SU(2n)/Sp(n)$ の極大対蹠集合の合同類を分類するために次の非連結コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の共役類の分類を行った (T.-Tasaki, in preparation)

$U(n)\rtimes\langle\sigma_I\rangle$ $(\sigma_I(x)=\bar{x}\ (x\in U(n)))$,

$U(2n)\rtimes\langle\sigma_{II}\rangle$ $(\sigma_{II}(x)=J_n\bar{x}J_n^{-1}\ (x\in U(2n)))$, $J_n=\begin{bmatrix}0 & -1_n\\ 1_n & 0\end{bmatrix}$

$SU(n)\rtimes\langle\sigma_I\rangle$, $SU(2n)\rtimes\langle\sigma_{II}\rangle$

$(U(n)/O(n))/\mathbb{Z}_\mu$　(μ は自然数),

$(U(2n)/Sp(n))/\mathbb{Z}_\mu$　(μ は自然数),

$(SU(n)/SO(n))/\mathbb{Z}_\mu$　(μ は n を割り切る),

$(SU(2n)/Sp(n))/\mathbb{Z}_\mu$　(μ は n を割り切る)

これらの極大対蹠集合の合同類を分類するために次の非連結コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の共役類の分類を行った (T.-Tasaki, in preparation)

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_I \rangle$　(μ は自然数),

$U(2n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$　(μ は自然数),

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_I \rangle$　(μ は n を割り切る),

$SU(2n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$　(μ は $2n$ を割り切る)

奇数次数の被覆準同型写像と対蹠部分群

G, G' :（連結とは限らない）コンパクト Lie 群

$\pi : G \to G'$ が奇数次数の被覆準同型写像のとき、π により極大対蹠部分群は変わらない (T.-Tasaki, Int. Electron. J. Geom., 2024)

この節ではこれについて説明する

Lemma 1

$\pi : G \to G'$: 被覆準同型写像

A : G の対蹠部分群 $\Rightarrow$ $\pi(A) : G'$ の対蹠部分群

Proposition 2

$\pi : G \to G'$: 奇数次数の被覆準同型写像

A : G の極大対蹠部分群 $\Rightarrow$ $\pi(A) : G'$ の極大対蹠部分群

Prop.2 の証明には次の補題を使う

Lemma 3

$\pi : G \to G'$: 奇数次数の被覆準同型写像

G' の対蹠部分群 A' に対して G の対蹠部分群 B で次を満たすものが存在する。

(1) B は $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群であり、$|B| = |A'|$ を満たす。

(2) π の B への制限は B から A' への同型写像である。

証明には Sylow の定理を使う

Theorem 4 (Sylow)

H を有限群とし p を $|H|$ の素因数とする。$|H| = p^n m$ とする。ただし、p は m を割り切らない。 このとき次が成り立つ。

(1) H には位数が p^n の部分群が存在する。これを H の p-Sylow 部分群という。

(2) H の 2 つの p-Sylow 部分群は共役である。

(3) H の任意の p-部分群（位数が p の冪の部分群）はある p-Sylow 部分群に含まれる。

（Lem.3 の証明）A' は対蹠部分群なので $A' \cong (\mathbb{Z}_2)^t$ で $|A'| = 2^t$ である。仮定より $k := |\mathrm{ker}(\pi)|$ は奇数である。$\pi^{-1}(A')$ は G の部分群で、$|\pi^{-1}(A')| = |A'||\mathrm{ker}(\pi)| = 2^t k$ だから、Sylow の定理より $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群 B が存在し、$|B| = 2^t = |A'|$ である。

$B\cap\ker(\pi)$ の元の位数は 2 の冪かつ奇数だから $B\cap\ker(\pi)=\{e\}$ である。よって π の B への制限は単射で、$\pi|_B : B\to A'$ は同型写像である。

（Prop.2 の証明）$Z'=\ker(\pi)$ とおくと $|Z'|$ は奇数である。
A を G の極大対蹠部分群とする。Lem.1 より $\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。$\pi(A)$ の極大性を示すために、A' を G' の対蹠部分群で $\pi(A)\subset A'$ を満たすものとする。Lem.3 より $\tilde{A}:=\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群 B が存在し、$\pi|_B : B\to A'$ は同型写像である。B は G の対蹠部分群である。
$B, Z'\subset\tilde{A}$ より $BZ'\subset\tilde{A}$ である。$B\cap Z'$ の元の位数は 2 の冪かつ奇数だから $B\cap Z'=\{e\}$ であり、BZ' の各元は $bz\,(b\in B, z\in Z')$ と一意的に表せるので、$|BZ'|=|B||Z'|=|A'||Z'|=|\tilde{A}|$ となり $BZ'=\tilde{A}$ である。A は位数が 2 の冪の $\tilde{A}$ の部分群なので、Sylow の定理からある $g\in\tilde{A}$ に対して $gAg^{-1}\subset B$ となるが、A の極大性から $gAg^{-1}=B$ が成り立つ。よって $|\pi(A)|=|\pi(gAg^{-1})|=|\pi(B)|=|A'|$ となるので $\pi(A)=A'$ であり、

$\pi(A)$ は G' の極大対蹠部分群である。

Lem.3 より次の補題を得る。

Lemma 5

$\pi : G \to G'$: 奇数次数の被覆準同型写像

A' : G' の対蹠部分群 $\Rightarrow$ $\exists A$:G の対蹠部分群 s.t. $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像

Proposition 6

$\pi : G \to G'$: 奇数次数の被覆準同型写像

A' : G' の極大対蹠部分群

$\Rightarrow$ $\exists A$:G の極大対蹠部分群 s.t. $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像

（証明）A' は G' の対蹠部分群なので、Lem.5 より G の対蹠部分群 A で $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像であるものが存在する。A の極大性を示すために、C を G の対蹠部分群で $A \subset C$ を満たすものとする。
$\ker(\pi) \cap C = \{e\}$ なので、$\pi|_C : C \to \pi(C)$ は単射、よって同型写像であり、$\pi(C)$ は G' の対蹠部分群である。$A' = \pi(A) \subset \pi(C)$ と A' の極大性から $A' = \pi(A) = \pi(C)$ が成り立つ。π の C への制限は単射だから $A = C$ となり、A は G の極大対蹠部分群である。

以上のことを踏まえて次の定理を述べる。

Theorem 7

G, G' : コンパクト Lie 群, $\pi : G \to G'$: 奇数次数の被覆準同型写像

G_0, G'_0 : G, G' の単位連結成分

(1) A が G の (*resp.* 極大) 対蹠部分群ならば $\pi(A)$ は G' の (*resp.* 極大) 対蹠部分群である。G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が G 共役 (*resp.* G_0 共役) ならば、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1), \pi(A_2)$ は G' 共役 (*resp.* G'_0 共役) である。

(2) A' が G' の (*resp.* 極大) 対蹠部分群ならば、G の (*resp.* 極大) 対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。G' の極大対蹠部分群 A'_1, A'_2 が G' 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 は G 共役である。G_0 が $\ker \pi$ を含むときは、G' の極大対蹠部分群 A'_1, A'_2 が G'_0 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 は G_0 共役である。

（証明）共役性に関する部分を証明する。(1) G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が G 共役、つまり、ある $g \in G$ に対して $A_2 = gA_1g^{-1}$ とすると、
$\pi(A_2) = \pi(g)\pi(A_1)\pi(g)^{-1}$ だから $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G' 共役である。
$g \in G_0$ ならば $\pi(g) \in \pi(G_0) = G'_0$ だから $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G'_0 共役である。

(2) G' の極大対蹠部分群 A'_1, A'_2 が G' 共役、つまり、ある $g' \in G'$ に対して $A'_2 = g'A'_1(g')^{-1}$ とすると、$\pi^{-1}(A'_2) = \pi^{-1}(g'A'_1(g')^{-1})$ が成り立つ。
$g \in G$ を $\pi(g) = g'$ を満たすものとすると、
$\pi^{-1}(g'A'_1(g')^{-1}) = g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1}$ が成り立つ。
Prop.6 より G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が存在して
$\pi|_{A_i} : A_i \to A'_i \, (i = 1, 2)$ は同型写像になる。

ここで A_i は $\pi^{-1}(A'_i)$ の 2-Sylow 部分群である $(i = 1, 2)$ から、gA_1g^{-1} は $g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1} = \pi^{-1}(A'_2)$ の 2-Sylow 部分群であり、Sylow の定理から gA_1g^{-1} は $\pi^{-1}(A'_2)$ の元で A_2 と共役である。よって A_1 は G の元で A_2 と共役である。次に、G_0 が $\ker(\pi)$ を含むとする。上の議論における g' が $g' \in G'_0$ を満たすならば、$\pi(G_0) = G'_0$ より $g \in G_0$ と取れる。先ほどの議論から gA_1g^{-1} は A_2 と $\pi^{-1}(A'_2)$ の元で共役である。よって $x \in \pi^{-1}(A'_2)$ に対して $xgA_1g^{-1}x^{-1} = A_2$ となる。$\pi^{-1}(A'_2) = A_2\ker(\pi)$ であり、$A_2 \cap \ker(\pi) = \{e\}$ から $x \in \pi^{-1}(A'_2)$ は $x = az\,(a \in A_2, z \in \ker(\pi))$ と一意的に表せる。よって $azgA_1g^{-1}(az)^{-1} = A_2$ となり、これより $zgA_1g^{-1}z^{-1} = a^{-1}A_2a = A_2$ となる。$z \in \ker(\pi) \subset G_0$ だから $zg \in G_0$ で、A_1, A_2 は G_0 共役である。

Thm.7 は次の結果をコンパクト Lie 群の場合に精密化したものと言える。

Proposition 8 (Chen-Nagano 1988)

One has $\#_2 M' = \#_2 M$, if there exists a k-fold covering morphism $f : M' \to M$ between compact Riemannian symmetric spaces and k is odd.

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n) \subset U(n)$$

Proposition 9

$U(n)$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役である。Δ_n は大対蹠部分群であり $\#_2 U(n) = 2^n$ である。

（証明）Δ_n は $U(n)$ の極大対蹠部分群である。A を $U(n)$ の極大対蹠部分群とすると、A は可換だから同時対角化可能である。$a \in A$ は $a^2 = 1_n$ を満たすので、$g \in U(n)$ が存在して $gAg^{-1} \subset \Delta_n$ となる。A の極大性から $gAg^{-1} = \Delta_n$ が成り立つ。よって Δ_n は大対蹠部分群で
$\#_2 U(n) = |\Delta_n| = 2^n$ である。

μ: 自然数

$\mathbb{Z}_\mu := \{\alpha 1_n \mid \alpha^\mu = 1\}$

$\mathbb{Z}_\mu \subset \{\alpha 1_n \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\}$: $U(n)$ の中心

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は $U(n)$ に局所同型なコンパクト Lie 群

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$: 自然な射影

Thm.7 により次を得る。

Theorem 10

μ が奇数ならば、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は $\pi_n(\Delta_n)$ $(\cong \Delta_n)$ に共役であり、$\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu = |\pi_n(\Delta_n)| = 2^n$ である。

μ が偶数の場合の結果を述べるために記号を準備する。

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$D[4] := \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\}$

$n = 2^k \cdot m, \quad m$: 奇数

$s \in \{0, \ldots, k\}$

$D(s, n) := \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$

i.e., $D(0, n) = \Delta_n$,

$D(s, n) = \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_1, \ldots, d_s \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \ (1 \leq s \leq k)$

$$A = [a_{ij}], \quad A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$$

例. $I_1 \otimes J_1 = \begin{bmatrix} -J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix}, \quad J_1 \otimes I_1 = \begin{bmatrix} 0 & -I_1 \\ I_1 & 0 \end{bmatrix}$

θ : 1 の原始 2μ 乗根

Theorem 11

μ が偶数ならば、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n が奇数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$.

(2) n が偶数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n))$ $(0 \leq s \leq k)$, ただし $s = k - 1, n = 2^k$ の場合は除外する。

$s = k-1, n = 2^k$ の場合を除外する理由

$\Delta_2 = \{\pm 1_2, \pm I_1\} \subsetneq D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\}$

なので、

$$D(k-1, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes \Delta_2$$

$$\subsetneq D(k, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k}$$

となり $D(k-1, 2^k)$ は極大ではない。

コンパクト Lie 群 G の対蹠部分群 A で $|A| = \#_2 G$ を満たすものを**大対蹠部分群**という。

Corollary 12

μ が偶数のとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の大対蹠部分群とその位数は次の通り。

(1) n が奇数のとき、 $\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$, $\#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu = 2^n$.

(2) n が偶数のとき、

$$n = 2 \;\Rightarrow\; \pi_2(\{1,\theta\}D[4]),\; \#_2 U(2)/\mathbb{Z}_\mu = 2^3 = 8.$$

$$n = 4 \;\Rightarrow\; \pi_4(\{1,\theta\}D(2,4)),\; \#_2 U(4)/\mathbb{Z}_\mu = 2^5 = 32.$$

$$n \neq 2,4 \;\Rightarrow\; \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n),\; \#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu = 2^n.$$

Thm.10 と Cor.12 より $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の大対蹠部分群は共役を除いて一意的

一般に大対蹠部分群は共役を除いて一意的であるとは言えない（例えば $SU(8)/\mathbb{Z}_\mu$ $(\mu = 2,4,8)$ には共役ではない 2 つの大対蹠部分群が存在する）