対称空間内の等焦部分多様体を発する後退平均曲率流について

馬場 蔵人（東京理科大学）*

概 要

対称空間内の等焦部分多様体を発する後退平均曲率流は長時間解をもち，極小な等焦部分多様体に収束することが知られている．本稿では，等焦部分多様体に付随する接焦点データを用いた後退平均曲率流の長時間解に関する考察について報告する．本研究は小池直之氏（東京理科大学）との共同研究に基づく．

1 はじめに

$\{f_t\}_{t\in[0,T)}$ を多様体 M から Riemann 多様体 N へのはめ込み写像の C^∞ 族とする．ただし，T は正の定数または $T=\infty$ とする．各 t に対して f_t の平均曲率ベクトル場を $\boldsymbol{H}_t$ で表す．写像 $F: M\times[0,T)\to N$ を $F(x,t)=f_t(x)$ $((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定める．$\{f_t\}_{t\in[0,T)}$ が**平均曲率流**であるとは，次の偏微分方程式が成り立つときをいう：

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\boldsymbol{H}_t$$

また，

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\boldsymbol{H}_t$$

が成り立つとき，$\{f_t\}_{t\in[0,T)}$ は**後退平均曲率流**とよばれる．特に，各 t に対して，f_t が埋め込み写像である場合，$\{f_t\}_{t\in[0,T)}$ よりも $\{M_t:=f_t(M)\}_{t\in[0,T)}$ を，M_0 を発する平均曲率流，あるいは後退平均曲率流とよぶ．平均曲率流および後退平均曲率流の解の性質，特に，特異点解析や長時間挙動の研究は部分多様体の幾何を理解するだけでなく幾何解析においても重要な役割を果たす．

Liu-Terng [LT1, LT2] は，Euclid 空間および球面における等径部分多様体を初期条件とする平均曲率流および平均曲率流の古代解（すなわち，後退平均曲率流の長時間解）を研究した．彼らは，球面内の等径部分多様体を発する後退平均曲率流が長時間解をもち，極小な等径部分多様体へ収束することを証明した．さらに，球面内の等径超曲面 M の場合には，M を発する後退平均曲率流の長時間解に沿って比

*kurando.baba@rs.tus.ac.jp
研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2025」

$\|A_t\|/\|\boldsymbol{H}_t\|$ の増大度に関する明示的な評価を与えた．ここで A_t は M_t の形作用素を表す．この結果は，Huisken-Sinestrari [HS] による剛性定理の拡張に向けた研究として動機付けられている．

一方，球面内の等径超曲面の一般化としてコンパクト型対称空間における等焦部分多様体の概念が Terng-Thorbergsson [TeTh] によって導入された．その後，Koike [K1] はコンパクト型対称空間における等焦部分多様体を発する平均曲率流を研究した．また，Liu-Radeschi [LR] は，非負曲率をもつ対称空間上の極葉層の正則葉を発する後退平均曲率流は長時間解をもち，極小な正則葉へ収束することを証明した．

本稿では，コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体を発する平均曲率流および後退平均曲率流について考察する．等焦部分多様体 M から発する後退平均曲率流の長時間解について，M に付随する接焦点データや主曲率データを用いて解析する．特に，余等質性 1 の Hermann 作用の主軌道から発する長時間解の場合を主に扱う．この場合，接焦点データや主曲率データを Ikawa [I] が導入した重複度付き対称三対から求め，長時間解に沿った比 $\|A_t\|/\|\boldsymbol{H}_t\|$ の増大度に関する明示的な評価を与える．

2　等焦部分多様体と無限次元等径部分多様体

N を Riemann 多様体とし，その指数写像を $\exp^N$ で表す．M を N 内のはめ込まれた部分多様体とする．終点写像 $\eta : T^\perp M \to N$ は $\eta(\boldsymbol{\xi}) = \exp^N_x(\boldsymbol{\xi})$ $(x \in M, \boldsymbol{\xi} \in T^\perp_x M)$ によって定義される．$x \in M$ とする．$\boldsymbol{\xi} \in T^\perp_x M$ が η の特異点であるとき，N の点 $\eta(\boldsymbol{\xi})$ を x における M の**焦点**とよぶ．このとき，$\boldsymbol{\xi}$ は x における **focal normal** とよばれ，その**重複度**を $\dim(\mathrm{Ker}(d\eta)_{\boldsymbol{\xi}})$ によって定める．[TeTh] を踏まえて，focal normal とその重複度の組からなる集合を M の**接焦点データ**とよぶ．$\mathcal{F}(M,x)$ で x における M の接焦点データを表し，$\mathcal{F}(M) := \bigcup_{x\in M} \mathcal{F}(M,x)$ とおく．

以下，N は単連結なコンパクト型対称空間 G/K とする．

定義 1 ([TeTh])．G/K 内の連結でコンパクトなはめ込まれた部分多様体 M が**等焦部分多様体**であるとは，次の条件を満たすときをいう：

(1) M は平坦な切断をもつ．

(2) M の法ホロノミーは自明である．

(3) $\mathcal{F}(M)$ は法接続に関する平行移動に関して不変である．

等焦部分多様体を研究するために，Terng-Thorbergsson [TeTh] は平行移送写像とよばれるある無限次元 Hilbert 空間から G/K への Riemann 沈め込みを導入した．本研究では，等焦部分多様体 M の接焦点データの記述や M を発する平均曲率流および後退平均曲率流の解析においても平行移送写像が利用される．

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表し，$\mathfrak{g}$ 上の不変内積として $\mathfrak{g}$ の Killing 形式から誘導するものを与える．この内積に関して区間 $[0,1]$ 上で定義された $\mathfrak{g}$ 内の曲線の H^0 性が定義され，H^0 曲線全体のなす可分な Hilbert 空間を $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ で表す．このとき，G に対す

る平行移送写像 $\phi : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ が $\phi(u) := \boldsymbol{g}_u(1)$ $(u \in H^0([0,1],\mathfrak{g}))$ によって定義される．ただし，$\boldsymbol{g}_u$ は G 内の H^1 曲線で $\boldsymbol{g}_u(0) = e$ および $(R_{\boldsymbol{g}_u(t)})_*^{-1}(\boldsymbol{g}_u'(t)) = u(t)$ を満たすものである．また，自然な射影 $\pi : G \to G/K$ と ϕ の合成 $\Phi := \pi \circ \phi$ によって G/K の**平行移送写像**が定義される．$\Phi : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G/K$ は Riemann 沈め込みであることが知られている．ここで，G/K 内の等焦部分多様体と関連する $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の無限次元部分多様体のクラスを復習する．

定義 2. V を可分な無限次元 Hilbert 空間とする．V 内の部分多様体 $\widetilde{M}$ が次の条件を満たすとき，**固有 Fredholm 部分多様体**とよばれる：

(1) $\widetilde{M}$ の余次元は有限である．

(2) $\widetilde{\exp}^{\perp}$ を任意の半径の法球面束に制限したもの固有写像である．

(3) $\widetilde{M}$ の任意の法ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$(\widetilde{\exp}^{\perp}_*)_{\boldsymbol{v}}$ は Fredholm 作用素である．

固有 Fredholm 部分多様体 $\widetilde{M}$ に対して，定義 2 の条件 (1), (2) は各法測地線に沿う各焦点の重複度は有限であることに注意する．また，条件 (3) から各法測地線 γ に沿う焦点全体からなる集合は，γ の始点以外に集積点をもたないことを意味する．さらに，次の事実が成り立つことが知られている．

事実 2.1. 任意の固有 Fredholm 部分多様体の形作用素は自己共役かつコンパクト作用素である．

Terng [Te] は無限次元 Hilbert 空間内の固有な Fredholm 部分多様体に対して，等径部分多様体の概念を導入した．

定義 3. V 内の固有 Fredholm 部分多様体 $\widetilde{M}$ が**等径部分多様体**であるとは，次の条件を満たすときをいう：

(1) $\widetilde{M}$ の法ホロノミーは自明である．

(2) $\widetilde{M}$ の任意の平行な法ベクトル場 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ に対して，形作用素 $\widetilde{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}_u}$ $(u \in \widetilde{M})$ の固有値からなる集合は固有値の重複度も含めて $u \in \widetilde{M}$ の取り方に依らない．

$\widetilde{M}$ を V 内の等径部分多様体とし，その形作用素を $\widetilde{A}$ で表す．$u \in \widetilde{M}$ とする．$\widetilde{M}$ の法ホロノミーが自明であるので，$\{\widetilde{A}_{\boldsymbol{v}} \mid \boldsymbol{v} \in T_u^{\perp}M\}(\subset \mathrm{End}(T_u\widetilde{M}))$ は可換族である．よって，$T_u\widetilde{M}$ は同時固有空間分解される：

$$T_u\widetilde{M} = \overline{(E_0)_u \oplus \bigoplus_{i\in I}(E_i)_u}$$

ただし，

$$(E_i)_u := \bigcap_{\boldsymbol{v}\in T_u^{\perp}\widetilde{M}} \mathrm{Ker}(\widetilde{A}_{\boldsymbol{v}} - (\lambda_i)_u(\boldsymbol{v})\mathrm{id}) \quad ((\lambda_i)_u \in (T_u^{\perp}\widetilde{M})^*)$$

また，$\ell_i^u := (\lambda_i)_u^{-1}(1)$ は $T_u^\perp \widetilde{M}$ 内のアフィン超平面を定め，$\mathcal{F}(\widetilde{M}, u) = \bigcup_{i\in I} \ell_i^u$ が成り立つ．さらに，この右辺は $\widetilde{M}$ に付随する Coxeter 群 $\widetilde{W} = \widetilde{W}(\widetilde{M}, u)$ に関して不変であるため，必要があれば λ_i のラベル i を付け替えることで，

$$\mathcal{F}(\widetilde{M}, u) = \bigcup_{a=1}^{\bar{r}} \{\lambda_i^{-1}(1 + b_a j) \mid j \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

と整理される．ここで，$b_a > 1$ は定数である．$u \in \widetilde{M}$ における $\widetilde{M}$ の主曲率の集合 $\mathcal{PC}(\widetilde{M}, u)$ は，(1) によって次のように表せる：

$$\mathcal{PC}(\widetilde{M}, u) = \bigcup_{a=1}^{\bar{r}} \{\lambda_{a,j} \mid j \in \mathbb{Z}\}, \quad \lambda_{a,j} := \frac{\lambda_a}{1 + b_a j}$$

$\widetilde{M}$ の主曲率の重複度は，$\widetilde{W}$ に関する不変性をもつ．実際，$\lambda_{a,2j}$ $(j \in \mathbb{Z})$ は j に依らず一定の値をとり，この値を m_a^e で表す．また，$\lambda_{a,2j+1}$ $(j \in \mathbb{Z})$ も j に依らず一定であるので，その値を m_a^o で表す．以上を踏まえて，本稿では $\{(\lambda_a, b_a, m_a^e, m_a^o) \mid a = 1, \ldots, \bar{r}\}$ を $\widetilde{M}$ の接焦点データであると見なす．$H^0([0,1], \mathfrak{g})$ は無限次元であるが，ホロノミーは自明となる．さらに，$H^0([0,1], \mathfrak{g})$ はベクトル空間であるので絶対平行性をもつ．また，$\widetilde{M}$ も無限次元であるが，上記で説明したように，その等径性によって焦点構造が主曲率を用いて調べられる利点がある．

定義 4 ([HLO])．固有 Fredholm 部分多様体 $\widetilde{M}$ が（Heintze-Liu-Olmos の意味での）**正則化可能**であるとは，$\widetilde{M}$ の任意の法ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して，$\mathrm{Tr}_r \widetilde{A}_{\boldsymbol{v}}$ および $\mathrm{Tr}\widetilde{A}_{\boldsymbol{v}}^2$ が有限であるときをいう．ここで，$\mathrm{Tr}_r \widetilde{A}_{\boldsymbol{v}}$ は $\widetilde{A}_{\boldsymbol{v}}$ の正則化されたトレースを表す：

$$\mathrm{Tr}_r \widetilde{A}_{\boldsymbol{v}} := \sum_{k=1}^{\infty} (\kappa_i^+ + \kappa_i^-)$$

ただし，$\kappa_i^\pm$ は

$$\mathrm{Spec}\widetilde{A}_{\boldsymbol{v}} = \{\kappa_1^- \le \kappa_2^- \le \cdots \le 0 \le \cdots \le \kappa_2^+ \le \kappa_1^+\}$$

によって与えられる．

正則化可能な固有 Fredholm 部分多様体 $\widetilde{M}$ に対して，関数 $\omega_u : T_u^\perp \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ が次で定義される：

$$\omega_u(\boldsymbol{v}) := \mathrm{Tr}_r \widetilde{A}_{\boldsymbol{v}} \quad (\boldsymbol{v} \in T_u^\perp \widetilde{M})$$

一般には，ω_u は線形であるとは限らないことに注意する．ω_u が線形の場合，Riesz の表現定理により，$\omega_u(\boldsymbol{v}) = \langle \widetilde{\boldsymbol{H}}_u, \boldsymbol{v} \rangle$ を満たす $\widetilde{\boldsymbol{H}}_u \in T_u^\perp \widetilde{M}$ が一意に定まる．このとき，$\widetilde{M}$ は法ベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{H}} : u \mapsto \widetilde{\boldsymbol{H}}_u$ を許容し，$\widetilde{\boldsymbol{H}}$ を**正則化された平均曲率ベクトル場**とよぶ．

以下，$V = H^0([0,1], \mathfrak{g})$ とする．

事実 2.2 ([TeTh])．M を G/K 内の等焦部分多様体とする．このとき，次が成り立つ：

(1) $\widetilde{M} := \Phi^{-1}(M)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の固有 Fredholm 部分多様体かつ等径部分多様体である．

(2) $u \in \widetilde{M}$ および $x = \Phi(u) \in M$ とする．Φ を通して $T^\perp_u M$ と $T^\perp_u \widetilde{M}$ を同一視したもとで，$\mathcal{F}(M,x) = \mathcal{F}(\widetilde{M},u)$ が成り立つ．

平行移送写像 Φ によって M の焦点構造の研究は $\widetilde{M}$ の焦点構造の研究に還元される．よって，$\{(\lambda_a, b_a, m^e_a, m^o_a) \mid a = 1,\dots,\bar{r}\}$ を M の接焦点データと見なせる．一方，$\widetilde{M} := \Phi^{-1}(M)$ の正則化可能性について Heintze-Liu-Olmos [HLO] は次の事実を示した．

事実 2.3. M を G/K 内の等焦部分多様体とする．このとき，$\widetilde{M} := \Phi^{-1}(M)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の正則化可能な等径部分多様体である．さらに，$\widetilde{M}$ は正則化された平均曲率ベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ を許容し，$\widetilde{\boldsymbol{H}}$ は M の平均曲率ベクトル場の $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ への水平リフトに一致する．

G/K 内の等焦部分多様体 M の研究を無限次元 Hilbert 空間へ還元した研究として行なっていくためには，平行移送写像 Φ によってリフトされた無限次元等径部分多様体 $\widetilde{M}$ の正則化可能性および平均曲率ベクトル場の存在が重要となる．このことは，M を発する平均曲率流および後退平均曲率流の研究でも同じである．

3　等焦部分多様体を発する平均曲率流と後退平均曲率流

[K1] で導入された正則化された平均曲率流を復習する．$\{\tilde{f}_t\}_{t\in[0,T)}$ を多様体 M から可分な Hilbert 空間 V への正則化された平均曲率ベクトル場を許容する正則化可能な固有 Fredholm はめ込み写像の C^∞ 族とし，$\tilde{f}_t$ の正則化された平均曲率ベクトル場を $\widetilde{\boldsymbol{H}}_t$ で表す．ここで，T は正の定数または $T=\infty$ とする．写像 $\widetilde{F} : M\times[0,T) \to V$ を $\widetilde{F}(x,t) = \tilde{f}_t(x)$ $((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定める．$\{\tilde{f}_t\}_{t\in[0,T)}$ が**正則化された平均曲率流**であるとは，次の偏微分方程式が成り立つときをいう：

$$\widetilde{F}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \widetilde{\boldsymbol{H}}_t$$

また，$\{\tilde{f}_t\}_{t\in[0,T)}$ が

$$\widetilde{F}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\widetilde{\boldsymbol{H}}_t$$

を満たすとき，$\{\tilde{f}_t\}_{t\in[0,T)}$ は**正則化された後退平均曲率流**とよばれる．

M を G/K 内の等焦部分多様体とし，$x\in M$ とする．$\boldsymbol{w}\in T^\perp_x M$ 方向の平行部分多様体を $M_{\boldsymbol{w}}$ で表す．このとき，$M_{\boldsymbol{w}}$ は等焦部分多様体であることが知られている（[TeTh] を参照）．事実 2.3 によって，$\widetilde{M}_{\boldsymbol{w}} := \Phi^{-1}(M_{\boldsymbol{w}})$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の正則化可能な等径部分多様体であり，正則化された平均曲率ベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{w}}$ を許容する．$u\in\Phi^{-1}(x)$ とする．$\widetilde{C}(\subset T^\perp_u\widetilde{M})$ で $\widetilde{M}$ に付随する Coxeter 群の基本領域で $\boldsymbol{0}\in T^\perp_u\widetilde{M}$

を含むものとする．$\widetilde{M} := \Phi^{-1}(M)$ を発する正則化された平均曲率流の研究において，Koike [K1] は $\widetilde{C}$ 上に次で定義されるベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を導入した：

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{w}} = (\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{w}})_{u+\boldsymbol{w}} \quad (\boldsymbol{w} \in \widetilde{C})$$

このベクトル場 $\boldsymbol{X}$ は $M_{\boldsymbol{w}}$ を発する平均曲率流および後退平均曲率流の研究において次のような働きを担っている．

補題 3.1 ([K1], [BK])**.** $\xi^{\boldsymbol{w}} : (-T_{\min}, T_{\max}) \to \widetilde{C}$ で $\boldsymbol{X}$ の極大積分曲線で $\xi^{\boldsymbol{w}}(0) = \boldsymbol{w}$ を満たすものとする．このとき，次が成り立つ：

(1) $\{\widetilde{M}_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}\}_{t\in[0,T_{\max})}$ と $\{\widetilde{M}_{\xi^{\boldsymbol{w}}(-t)}\}_{t\in[0,T_{\min})}$ はそれぞれ $\widetilde{M}_{\boldsymbol{w}}$ を発する正則化された平均曲率流と正則化された後退平均曲率流である．

(2) $\{M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}\}_{t\in[0,T_{\max})}$ と $\{M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(-t)}\}_{t\in[0,T_{\min})}$ はそれぞれ $M_{\boldsymbol{w}}$ を発する正則化された平均曲率流と正則化された後退平均曲率流である．

事実 3.2. 補題 3.1 と同じ記号を用いる．

(1) $M_{\boldsymbol{w}}$ は極小部分多様体でなければ，$T_{\max}$ は有限であり，$\{M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}\}_{t\in[0,T_{\max})}$ はある焦部分多様体 F に崩壊する．さらに，$M_{\boldsymbol{w}}$ が既約かつ $\operatorname{codim}(M_{\boldsymbol{w}}) \geq 2$ で，ファイブレーション $M_{\boldsymbol{w}} \to F$ が球面的ならば，$\{M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}\}_{t\in[0,T_{\max})}$ は (I) 型特異点を形成する（詳しくは [K1] を参照）．

(2) $M_{\boldsymbol{w}}$ が極葉層の正則葉ならば，$T_{\min}$ であり，$\{M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(-t)}\}_{t\in[0,\infty)}$ は極小な正則葉に収束する（詳しくは [LR] を参照）．

4 Hermann 作用と平均曲率流と後退平均曲率流

この節では，余等質 1 の Hermann 作用の主軌道を発する後退平均曲率流の長時間解に関する本稿の主結果について述べる．Hermann 作用の定義の復習からはじめる．G/K はコンパクト型対称空間で，θ は G の対合で次の関係を満たすものとする：

$$(\mathrm{Fix}(\theta))_0 \subset K \subset \mathrm{Fix}(\theta) \tag{2}$$

ただし，$\mathrm{Fix}(\theta)$ は G における θ の固定部分群を表し，その単位連結成分を $(\mathrm{Fix}(\theta))_0$ で表す．H を G の対称部分群とする．すなわち，G の対合 τ が存在して次の関係を満たすものとする：

$$(\mathrm{Fix}(\tau))_0 \subset H \subset \mathrm{Fix}(\tau) \tag{3}$$

このとき，G/K 上の H による等長作用を **Hermann 作用**とよぶ．$H = K$ のとき Hermann 作用はイソトロピー作用に他ならない．また，(G, θ, τ) は**コンパクト対称三対**とよばれる．逆に，コンパクト対称三対 (G, θ, τ) に対して，(2) と (3) を満たす G の閉部分群 K と H を与えることで G/K 上の Hermann 作用 $H \curvearrowright G/K$ が得られる．

Hermann 作用の主軌道 $M := H \cdot x$ $(x \in G/K)$ は G/K 内の等焦部分多様体である．以下では，M の平坦な切断 Σ を与える．θ と τ の微分写像も同じ記号で表し，それぞれに対応する $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ で表す．$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とし，$B := \exp(\mathfrak{b})$ とおいたとき，Hermann は $G = KBH$ が成り立つことを示した．この分解によって，$\Sigma := \pi(B)$ は主軌道 M の平坦な切断を与えることがわかる．

Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流および後退平均曲率流の研究では，以下に説明するような同値関係に関して不変な性質を扱っている．

定義 5 ([M])**.** 2 つのコンパクト対称三対 (G, θ, τ) と (G, θ', τ') が（Matsuki の意味で）**同型**であるとは，次の条件を満たす G の自己同型写像 φ と内部自己同型写像 ν が存在するときをいう：

$$\theta' = \varphi\theta\varphi^{-1}, \quad \tau' = \nu\varphi\tau\varphi^{-1}\nu^{-1}$$

このとき，$(G, \theta, \tau) \sim (G, \theta', \tau')$ と表す．

事実 4.1. $(G, \theta, \tau) \sim (G, \theta, \tau')$ ならば，それぞれから得られる Hermann 作用は軌道同値である．すなわち，G/K の等長変換 Φ で $\Phi(H \cdot x) = H' \cdot \Phi(x)$ $(x \in G/K)$ を満たすものが存在する．

この事実によって，コンパクト対称三対 (G, θ, τ) の同型類の中から扱いやすい代表元を選ぶことで，平均曲率流および後退平均曲率流の研究に役立てたい．そのような候補の一つとしてコンパクト対称三対の標準形が考えられる（標準形の定義は [BI1] を参照）．本稿では，標準形のサブクラスである可換なコンパクト対称三対を扱う．ここで，可換性は $\theta\tau = \tau\theta$ が成り立つことを意味する．G が単純のとき，いくつかの例外を除いて (G, θ, τ) の同型類の中に可換な代表元が存在することが知られている．

Ikawa [I] は可換なコンパクト対称三対 (G, θ, τ) に対して，重複度付き対称三対の概念を導入した．この概念を用いて Hermann 作用の軌道空間，すなわち，Coxeter 群の基本領域に相当するものが精密に調べられる．また，軌道の次元および軌道の部分多様体的な量を記述するにもこの概念は有用である．本稿では，重複度付き対称三対を用いて Hermann 作用の主軌道の接焦点データや主曲率データが記述する．

以下では，記号の準備も含めて可換なコンパクト対称三対 (G, θ, τ) から重複度付き対称三対の構成を簡単にまとめる．$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とし，その双対空間を $\mathfrak{b}^*$ で表す．$\beta \in \mathfrak{b}^*$ に対して，$\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{p}_\beta$ を次で定める：

$$\mathfrak{p}_\beta := \{X \in \mathfrak{p} \mid \mathrm{ad}(b)^2(X) = -\beta(b)^2 X \ (b \in \mathfrak{b})\}$$

ここで，原点 eK における G/K のヤコビ作用素 $R_b : T_{eK}(G/K) \to T_{eK}(G/K)$ は $R_b = -\mathrm{ad}(b)^2$ で表されることに注意する．$\mathfrak{b}$ の可換性により，$\mathfrak{p}_\beta$ は $\{R_b \mid b \in \mathfrak{b}\}$ の同時固有空間を意味する．また，$\mathfrak{b}^* - \{0\}$ の部分集合 Δ を次のように定める：

$$\Delta := \{\beta \in \mathfrak{b}^* - \{0\} \mid \mathfrak{p}_\beta \neq \{0\}\}$$

さらに，Δ の部分集合 Δ^V と Δ^H をそれぞれ次で定める：

$$\Delta^V := \{\beta \in \Delta \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q} \neq \{0\}\}, \quad \Delta^H := \{\beta \in \Delta \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}\}$$

$\beta \in \Delta$ に対して $\mathfrak{p}_\beta = (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q}) \oplus (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h})$ である．2 種類の重複度 m_β^V と m_β^H をそれぞれ $m_\beta^V := \dim(\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q})$ と $m_\beta^H := \dim(\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h})$ によって定義する．

事実 4.2 ([I])．G が単純であるとき，$(\Delta, \Delta^V, \Delta^H; m^V, m^H)$ は重複度付き対称三対の公理を満たす．

$\mathfrak{b}$ の部分集合 $\widetilde{C}$ を次で定める：

$$\widetilde{C} := \left\{ b \in \mathfrak{b} \;\middle|\; \begin{array}{cc} 0 < \beta(b) < \pi & (b \in \Delta_+^V - \Delta_+^H), \\ -\pi/2 < \beta(b) < \pi/2 & (b \in \Delta_+^H - \Delta_+^V), \\ 0 < \beta(b) < \pi/2 & (b \in \Delta_+^V \cap \Delta_+^H) \end{array} \right\}$$

ただし，Δ_+^* $(* \in \{V, H\})$ は Δ の正のルートからなる集合と Δ^* の共通部分を表す．Hermann 作用 $H \curvearrowright G/K$ の軌道空間は $\widetilde{C}$ の閉包で与えられ，その内部の点と境界の点はそれぞれ Hermann 作用の主軌道と特異軌道に対応する．

事実 4.3 ([GTh], [I])．$M = H \cdot x$ を Hermann 作用の主軌道とし，$x = \pi(\exp(Y))$ $(Y \in \widetilde{C})$ で表す．このとき，M の主曲率の集合 $\mathcal{PC}(M, x)$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{PC}(M, x) = \{ &-\cot(\beta(Y))\tilde{\beta}\,(\text{multiplicity} = m_\beta^V) \mid \beta \in \Delta_+^V\} \\ &\cup \{\tan(\beta(Y))\tilde{\beta}\,(\text{multiplicity} = m_\beta^H) \mid \beta \in \Delta_+^H\} \\ &\cup \{0\,(\text{multiplicity} = \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{b})))\} \end{aligned}$$

ただし，$\tilde{\beta} = \beta \circ \exp(Y)_*^{-1}$ とする．

事実 4.4 ([K2])．事実 4.3 と同じ設定とする．$\widetilde{M} := \Phi^{-1}(M)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{PC}(\widetilde{M}, u) = \{ &-\frac{\tilde{\beta}}{\beta(Y) + j\pi}\,(\text{multiplicity} = m_\beta^V) \mid \beta \in \Delta_+^V, j \in \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{-\frac{\tilde{\beta}}{\beta(Y) + (j + \frac{1}{2})\pi}\,(\text{multiplicity} = m_\beta^H) \mid \beta \in \Delta_+^H\} \\ &\cup \{0\,(\text{multiplicity} = \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{b})))\} \quad (4) \end{aligned}$$

$(\lambda_\beta, b_\beta) = (\lambda_\beta^Y, b_\beta^Y)$ $(\beta \in \Delta^+)$ を [K1, p. 115] のように定めると，事実 4.4, (4) の右辺は次のように書き換えられる：

$$\mathcal{PC}(\widetilde{M}, u) = \left\{ \frac{\lambda_\beta}{1 + b_\beta} \;\middle|\; \beta \in \Delta_+, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

また，次を得る：

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^Y = \sum_{\beta \in \Delta_+^V} m_\beta^V \cot(\frac{\pi}{2b_\beta})\frac{\pi}{2b_\beta}\lambda_\beta^\# - \sum_{\beta \in \Delta_+^H} m_\beta^H \tan(\frac{\pi}{2b_\beta})\frac{\pi}{2b_\beta}\lambda_\beta^\# \qquad (5)$$

以下では，可換なコンパクト対称三対 (G,θ,τ) から得られる Hermann 作用の余等質性は 1 であるとする．よって，その主軌道は G/K 内の等質な等焦超曲面であることを与える．特に，$\dim\Sigma=\dim\mathfrak{b}=1$ である．G が単純の場合，余等質性 1 の Hermann 作用を与える可換かつ固有なコンパクト対称三対可換なコンパクト対称三対 (G,θ,τ) は，表 1 にあげたいずれかに局所同型であることが知られている（[M], [BI1] を参照）：ここで，$(G,\theta,\tau)\not\sim(G,\theta,\theta)$ を満たすコンパクト対称三対 (G,θ,τ) を固有なコンパクト対称三対とよぶ．なお，表 1 には (G,θ,τ) に対応する対称三対のデータも載せた．型の定義は [I]，具体的な重複度の値については [BI1] を参照のこと．

表 1: 余等質性 1 の Hermann 作用を与える可換かつ固有なコンパクト対称三対

(G,K,H)	$(\Delta,\Delta^V,\Delta^H)$	Remark
$(SU(4),SO(4),Sp(2))$	(III-A_1)	
$(SU(n),SO(n),S(U(1)\times U(n-1)))$	(II-BC_1)	
$(SU(2m),Sp(m),S(U(2)\times U(2m-2)))$	(III-BC_1)	$m\geq 2$
$(SU(n),S(U(1)\times U(n-1)),S(U(c)\times U(d)))$	(I-BC_1-A_1)	$n=c+d$, $1<c\leq d$
$(SO(8),U(4),U(4)')$	(I-BC_1-A_1)	
$(SO(2m),SO(2)\times SO(2m-2),U(m))$	(I-BC_1-A_1)	$m\geq 3$
$(Sp(2),U(2),Sp(1)\times Sp(1))$	(III-A_1)	
$(Sp(n),U(n),Sp(1)\times Sp(n-1))$	(III-BC_1)	$n\geq 3$
$(Sp(n),Sp(1)\times Sp(n-1),Sp(c)\times Sp(d))$	(I-BC_1-A_1)	$n=c+d$, $1<c\leq d$
$(E_6,SU(6)\times SU(2),F_4)$	(III-BC_1)	
$(E_6,SO(10)\times U(1),F_4)$	(III-BC_1)	
$(F_4,SU(2)\times Sp(3),SO(9))$	(III-BC_1)	

この分類結果を基に，(G,θ,τ) に対応する Hermann 作用の主軌道を発する後退平均曲率流の長時間解の挙動を考察する．実際には，(G,θ,τ) から構成される対称三対の型に応じて長時間解の挙動が解析される．

$\boldsymbol{w}\in\widetilde{C}$ とし，$\xi^{\boldsymbol{w}}(t)$ を補題 3.1 で与えたものとする．このとき，$\{M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}\}_{t\in(-\infty,T_{\max}]}$ は $M_{\boldsymbol{w}}$ を発する平均曲率流および後退平均曲率流の解を与える．$M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}$ の形作用素と平均曲率をそれぞれ A_t と H_t で表す．

次の定理は，本稿の主結果であり，後退平均曲率流の長時間挙動を定量的に記述するものである．

定理 4.5 ([BK])．(G,θ,τ) から構成される対称三対 $(\Delta,\Delta^V,\Delta^H)$ は (I-BC_1-A_1) 型と

する．このとき，

$$\frac{\|A_t\|^2}{\|H_t\|^2} < \frac{2\delta_\beta}{m_\beta^V + m_\beta^H + m_{2\beta}^V} \frac{1}{(\cos(2\theta_\beta^{\boldsymbol{w}}) + \delta_\beta)^2} e^{-4g_\beta t},$$
$$\lim_{t\to-\infty} \|A_t\|^2 = g_\beta,$$
$$\lim_{t\to-\infty} \|H_t\|^2 e^{-4g_\beta t} = g_\beta(m_\beta^V + m_\beta^H + m_{2\beta}^V)\frac{(\cos(2\theta^{\boldsymbol{w}}) + \delta_\beta)^2}{1-\delta_\beta^2}$$

ただし，$\theta_\beta^{\boldsymbol{w}} := \dfrac{\pi}{2b_\beta}(1-\lambda_\beta(\boldsymbol{w}))$ とおき，δ_β, g_β はそれぞれ次のように定める：

$$\delta_\beta := \frac{m_\beta^V - m_\beta^H + m_{2\beta}^V}{m_\beta^V + m_\beta^H + m_{2\beta}^V}, \quad g_\beta := (\frac{\pi}{2b_\beta})^2(m_\beta^V + m_\beta^H + m_{2\beta}^V)\|\lambda_\beta^\#\|^2$$

証明の概要．平行部分多様体 $M_{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}$ に対して，$Y = \xi^{\boldsymbol{w}}(t)$ を補題 4.3 と (5) に代入すると，次のような等式が導ける：

$$\|H_t\|^2 = g_\beta(m_\beta^V + m_\beta^H + m_{2\beta}^V)\frac{(\delta_\beta + \cos 2\theta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)})}{1-\cos^2 2\theta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}},$$
$$\|A_t\|^2 = g_\beta \frac{1}{1-\cos^2 2\theta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}}\{1 + 2\delta_\beta \cos 2\theta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)} + \cos^2 2\theta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}\}$$

また，$(\xi^{\boldsymbol{w}})'(t) = \widetilde{\boldsymbol{H}}^{\xi(t)}$ を用いて，次の常微分方程式が導ける：

$$(\cos(2\theta_\beta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}) + \delta_\beta)' = 2g_\beta(\delta_\beta + \cos(2\theta_\beta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}))$$

よって，

$$\cos(2\theta_\beta^{\xi^{\boldsymbol{w}}(t)}) + \delta_\beta = e^{2g_\beta t}(\delta_\beta + \cos(2\theta_\beta^{\boldsymbol{w}}))$$

を得る．これを上記の $\|H_t\|^2$ と $\|A_t\|^2$ の右辺に代入すると主張が導ける． □

定理 4.5 で述べたように，余等質性 1 の Hermann 作用の主軌道の場合では，後退平均曲率流の長時間解に沿った形作用素と平均曲率の比のに関する指数的評価が与えられる．

(G, θ, τ) から構成される対称三対 $(\Delta, \Delta^V, \Delta^H)$ が (I-BC_1-A_1) 型以外の場合でも同様な計算によって後退平均曲率流の長時間解の挙動が解析される（進行中）．

参考文献

[BI1] K. Baba and O. Ikawa, Double Satake diagrams and canonical forms in com- pact symmetric triads, International Electronic Journal of Geometry, **17**, no. 2, (2024), 466–495.

[BI2] K. Baba and O. Ikawa, Compact symmetric triads and symmetric triads with multiplicities, arXiv:2506.02511.

[BK] K. Baba and N. Koike, On the backward mean curvature flow starting from equifocal submanifolds in symmetric spaces of compact type, in preparation.

[Ch] U. Christ, Homogeneity of Equifocal Submanifolds, J. Differential Geom. 62(1): 1-15 (September, 2002).

[GT] O. Goertsches and G. Thorbergsson, On the Geometry of the orbits of Hermann actions, Geom. Dedicata **129** (2007) 101–118.

[HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[GTh] O. Goertsches and G. Thorbergsson, On the Geometry of the orbits of Hermann actions, Geom. Dedicata **129** (2007) 101–118.

[HS] Huisken and Sinestrari, *Convex ancient solutions of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **101** (2015), 267–287.

[I] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions. J. Math. Soc.Japan **63** (2011) 79–136.

[K1] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, Asian J. Math. **15** (2011) 101–128.

[K2] N. Koike, On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space, Japan. J. Math. **28** (2002) 61-80.

[Kol] A. Kollross, A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2001) 571–612.

[LR] X. Liu and M. Radeschi, Polar foliations on symmetric spaces and mean curvature flow, J. reine angew. Math. **791** (2022) 135–155.

[LT1] X. Liu and C. L. Terng, The mean curvature flow for isoparametric submanifolds, Duke Math. J. **147** (2009) 157–179.

[LT2] X. Liu and C. L. Terng, Ancient solutions to mean curvature flow for isoparametric submanifolds, Math. Ann. **378** (2020) 289–315.

[M] T. Matsuki, Classification of two involutions on semisimple compact Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[PaTe] R. S. Palais and C. L. Terng, Critical point theory and submanifold geometry, Lecture Notes in Math. **1353**, Springer, Berlin, 1988.

[T1] C.L. Terng, Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups, J. Differential Geom. **21** (1985) 79–107.

[Te] C. L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geom. **29** (1989), 9–47.

[TeTh] C. L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, J. Differential Geom. **42** (1995), 665–718.