フルヴィッツラドン数と半単純リー群の固有作用

甘中一輝 (金沢大学)*

概要

固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用が存在する「境界線」として, 等質空間に対する Property (VE) を導入し, Property (VE) を持つ既約半単純対称空間の分類結果を説明する. Property (VE) を持つ等質空間ではそこに固有に作用する半単純リー群が古典的なフルビッツラドン数の言葉で分類出来る. 本研究は東海大学の東條広一氏との共同研究 (arXiv:2602.04544) に基づく.

1 主定理の一例

正の整数 N を $N = 2^{4a+b} \times$ (奇数) $(a \in \mathbb{N},\ b = 0,1,2,3)$ と表した時,

$$\rho(N) = 8a + 2^b$$

を N のフルビッツラドン数と呼ぶ. フルビッツラドン数 $\rho(N)$ は Hurwitz や Radon による二次形式の研究, Adams による球面上のベクトル場の研究, また小林・吉野 [5] による tangential homogeneous space のコンパクト商の存在問題の研究, など異なる数学の分野に時々現れる.

本稿では, 擬リーマン対称空間 G/H に固有かつ等長に作用する非コンパクトな半単純リー群の同型類の分類を研究する. 主定理の一例として, この様な文脈でもフルビッツラドン数が自然に現れる:

定理 1.1 ([3, Thm. 1.1])**.** 符号 $(N, N-1)$ の負曲率の擬リーマン空間形

$$SO(N,N)/SO(N,N-1)$$

に固有かつ等長に作用するコンパクト因子を持たない連結半単純リー群は $Spin(n,1)$ $(2 \leq n \leq \rho(N))$ で全てである.

$Spin(n,1)$ は $SO(n,1)$ の単位元の連結成分の群の二重被覆である. $SO(N,N)$ は非常に沢山の非コンパクト半単純部分群を持つが, その様な部分群は $Spin(n,1)$ と (大域的に) 同型でない限り $SO(N,N)/SO(N,N-1)$ へ固有に作用しないのである. 例えば $SO(n,1)$ は決して固有かつ等長に作用しない. この様なタイプの剛性定理が存在すること自体, (少なくとも) 筆者達にとっては意外な事であった.

簡単の為 $N \geq 3$ とすると, 符号 $(N, N-1)$ の負の断面曲率を持つ測地的完備な擬リーマン多様体は, $SO(N,N)/SO(N,N-1)$ に固有不連続かつ等長に作用する離散群 Γ による商多様体 $\Gamma\backslash SO(N,N)/SO(N,N-1)$ として書ける. その様な離散群 Γ 全てを分類する事は出来ないかもしれないが, 定理 1.1 は離散群 Γ に対する何かしらの強い制限を示唆している様にも見える. 符号 $(N, N-1)$ の擬リーマン双曲幾何学に, 例えばフルビッツラドン数を巻き込む様な離散群の剛性定理が隠れているのならば興味深い.

*本研究は理化学研究所の基礎科学特別研究員研究費と JSPS 科研費 JP24K16929 の助成を受けたものである. E-mail address: kannaka@se.kanazawa-u.ac.jp

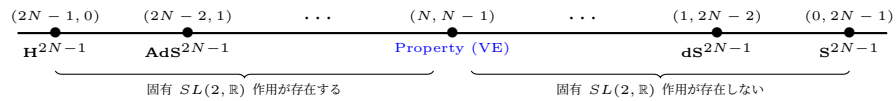
2　主定理の一部の紹介

上記の定理の立ち位置を説明しよう. 奥田隆幸氏 ([6]) は既約半単純対称空間の中で $SL(2,\mathbb{R})$ の固有かつ等長な作用を持つものを分類した. 我々はその分類リストに基づいて, $SL(2,\mathbb{R})$ の固有かつ等長な作用を持つ「境界線」上にいる既約半単純対称空間に注目した.

例えば, 符号 (p,q) の負曲率の擬リーマン空間形

$$SO(p,q+1)/SO(p,q)$$

を考えよう. $p=0$ と $q=0$ の場合 (リーマン多様体の場合) はそれぞれ球面 $\mathbf{S}^q$ と実双曲空間 $\mathbf{H}^p$(正確には実双曲空間の二つの非交和), $p=1$ と $q=1$ の場合 (ローレンツ多様体の場合) はそれぞれド・ジッター空間 $\mathbf{dS}^{q+1}$ と反ド・ジッター空間 $\mathbf{AdS}^{p+1}$ と呼ばれる. ここで, 計量を -1 倍すれば断面曲率の正負と計量の符号はそれぞれ入れ代わる事に注意されたい. 以下の図の様に, 丁度 $(p,q)=(N,N-1)$ の場合が $SL(2,\mathbb{R})$ の固有かつ等長な作用を持つ「境界線」なのである:



その様な「境界線」上にある対称空間では, 固有かつ等長に作用する非コンパクトな半単純リー群の同型類の分類が出来るだけではなく, その分類リストにフルビッツラドン数が現れるというのが我々の主定理である. 我々の主定理は [3] の Section 2 に詳細に纏められているから, ここでは全てを紹介しない. 今回説明したいのは, 我々が与えた「境界線」の正確な定式化と, 「境界線」上にいる既約対称空間の分類である.

「境界線」の正確な定式化の準備として幾つかの用語を導入する:

定義 2.1. $(\mathfrak{g}_i,\iota_i)$ $(i=1,2)$ を実リー環とその表現の組とする. 二つの組 $(\mathfrak{g}_i,\iota_i)$ が**同値**であるとは, リー環の同型 $\varphi\colon \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ が存在して ι_1 が $\iota_2\circ\varphi$ と $\mathfrak{g}_1$ の表現として同値である場合に言う. また, 組 $(\mathfrak{g},\iota)$ が**古典型**であるとは, 実古典型リー環とその自然表現の組と同値である時に言う.

定義 2.2. $(\mathfrak{g},\iota)$ を古典型の組とする. リー環の準同型 $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\to\mathfrak{g}$ が ι に対して ***very even*** であるとは, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の表現 $\iota\circ\varphi$ が偶数次元既約表現の直和に分解する時に言う.

次が「境界線」の我々の定式化である:

定義 2.3. G を連結な複素化を持つ線形半単純リー群, H を簡約部分群とする. 等質空間 G/H が ***Property (VE)*** を持つとは, 次の二条件を持つリー環 $\mathfrak{g}$ の表現 $\iota\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ が存在する時に言う:

(*i*) $(\mathfrak{g},\iota)$ が古典型の組であり,

(*ii*) 任意の準同型 $\varphi\colon\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\to\mathfrak{g}$ に対して, φ のリフトによる $SL(2,\mathbb{R})$ の G/H への作用が固有である事と, φ が ι に対して *very even* である事が同値.

Property (VE) が等質空間の局所同型で安定する性質である事も証明できる. 従って, 局所同型の差を除いて Property (VE) を持つ既約半単純対称空間を分類する事が問題として考えられる. 次がその分類結果である:

G	H
$SL(2N,\mathbb{R})$	$SO(N+1,N-1)$
$SL(2N,\mathbb{C})$	$SU(N+1,N-1)$
$SL(2N,\mathbb{H})$	$Sp(N+1,N-1)$
$SO^*(4N)$	$U(N+1,N-1)$
$SO(4N,\mathbb{C})$	$SO(2N+1,2N-1)$
$SO(4N,\mathbb{C})$	$SO(2p+1,\mathbb{C})\times SO(4N-2p-1,\mathbb{C})$ $(0\le p<N)$
$SO(2N,2N)$	$SO(p,p+1)\times SO(2N-p,2N-p-1)$ $(0\le p<N)$
$SU(N,N)$	$S(U(p,p+1)\times U(N-p,N-p-1))$ $(0\le p<N/2)$
$Sp(N,N)$	$Sp(p,p+1)\times Sp(N-p,N-p-1)$ $(0\le p<N/2)$
$SO^*(4N)$	$SO^*(4p+2)\times SO^*(4N-4p-2)$ $(0\le p<N/2)$

表 2.1: 固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用と Property (VE) を持つ既約半単純対称空間.

定理 2.4. *G/H を半単純対称空間で, G が単純かつ連結な複素化を持つ事を仮定する. この時, G/H が Property (VE) を持ち, $SL(2,\mathbb{R})$ の等長かつ固有な作用を持つには, G/H が表 2.1 にある対称空間と局所同型である事が必要十分である.*

さらに, Property (VE) を持つ等質空間 G/H では定理 1.1 がほとんどそのままの形で一般化される ([3, Thms. C and D]). 但しその主張を厳密に述べるには, Hurwitz–Radon–Eckmann–Adams の二次形式や球面上のベクトル場の研究を踏まえて, フルビッツラドン数をリー環の表現論の言葉で再定式化する必要がある. その定式化や, それがどの様に固有作用と結びつくかの簡単な説明については [8] を参照いただきたい.

3 定理 2.4 の証明のアイデア

定理 2.4 の証明は半単純対称空間に付随する佐武図形の組を用いて組み合わせ論的に与えられる. この節ではその手法を説明しよう.

G/H を半単純対称空間とする. G/H が Property (VE) を持つかどうかを判定するには, 準同型 $SL(2,\mathbb{R})\to G$ に対して, G/H への $SL(2,\mathbb{R})$ 作用の固有性と準同型が very even である事の二点を判定できれば良い. 準同型 $SL(2,\mathbb{R})\to G$ は複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ の重み付きディンキン図形を用いて理解出来るから, 二つの条件を重み付きディンキン図形でそれぞれ判定する事を考えよう. 前者は奥田隆幸氏 ([6]) により為された. それを簡単に復習しておく.

通常の記法として, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\sigma)$ を対応する半単純対称対, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ を複素化, $\mathfrak{q}$ を σ の -1-固有値とする. この時, c-dual と呼ばれる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のもう一つの実形 $\mathfrak{g}^c$ が

$$\mathfrak{g}^c=\mathfrak{h}+\sqrt{-1}\mathfrak{q}$$

によって定まる. さらに, 大島・関口 [7] の議論により, 二つの実形 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}^c$ の佐武図形 $S_{\mathfrak{g}},S_{\mathfrak{g}^c}$ を「同時に」定義する事が可能である. 例えば, 対称空間

$$G/H=SO^*(4N)/(SO^*(2p)\times SO^*(4N-2p))$$

の場合, 佐武図形の対 $(S_{\mathfrak{g}},S_{\mathfrak{g}^c})$ は,

$$(S_{\mathfrak{g}},S_{\mathfrak{g}^c})=\begin{cases}\left(\bullet\!-\!\circ\!-\cdots-\!\bullet\!-\!\overset{\circ}{\underset{\bullet}{\diagup}},\ \bullet\!-\!\circ\!-\cdots-\!\bullet\!-\!\overset{\circ}{\underset{\bullet}{\diagup}}\right) & (p:\text{ 偶数}),\\ \left(\bullet\!-\!\circ\!-\cdots-\!\bullet\!-\!\overset{\circ}{\underset{\bullet}{\diagup}},\ \bullet\!-\!\circ\!-\cdots-\!\bullet\!-\!\overset{\bullet}{\underset{\circ}{\diagup}}\right) & (p:\text{ 奇数}).\end{cases}\tag{3.1}$$

p の偶奇で $S_{\mathfrak{g}^c}$ の黒丸の位置が変わっている事に注意せよ.

複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 部分代数は重みつきディンキン図形を用いて分類可能である. 奥田隆幸氏は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 部分代数がいつ $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 部分代数に落ちるかを, $\mathfrak{g}$ の佐武図形 $S_{\mathfrak{g}}$ を用いて判定する方法を与えた. さらに, 小林俊行氏による固有性判定法 ([4]) を適用し, G/H への対応する $SL(2,\mathbb{R})$ 作用が固有かどうかを, $\mathfrak{g}^c$ の佐武図形 $S_{\mathfrak{g}^c}$ により判定する方法を与えた.

事実 3.1 (奥田 [6])**.** $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を非自明なリー環の準同型とする.

(i) (*[6, Thm. 7.10]*) $G_{\mathbb{C}}$-共役の差を除いて $\varphi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{g}$ となるには, φ の重みつきディンキン図形 F_φ が $S_{\mathfrak{g}}$ と *match* する事が必要十分である.

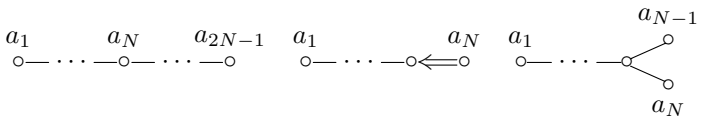
(ii) (*[6, Thm. 10.1]*) $\varphi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{g}$ を仮定する. この時, リフト $\tilde{\varphi}\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ による G/H への $SL(2,\mathbb{R})$-作用が固有である事と, F_φ が $S_{\mathfrak{g}^c}$ と *match* しない事が必要十分である.

ここで佐武図形と重み付きディンキン図形が ***match*** するとは, 佐武図形の黒丸の部分では重みが 0, 矢印で結ばれた部分の重みは等しいという条件である.

一方で, very even である事も重み付きディンキン図形で判定する事が出来る:

補題 3.2 ([3, Prop. 6.12])**.** $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{sl}(2N,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(N,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2N,\mathbb{C})$ のいずれか, ι をその自然表現とする. リー環の準同型 $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が ι に対して *very even* であるには, φ に対応する重みつきディンキン図形の重みが次の条件を満たす事が必要十分である:

$$\begin{cases} a_N \neq 0 & \text{if } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2N,\mathbb{C}) \text{ or } \mathfrak{sp}(N,\mathbb{C}), \\ a_{N-1} \neq a_N & \text{if } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2N,\mathbb{C}). \end{cases}$$



$\mathfrak{sl}(2N,\mathbb{C})$ $\mathfrak{sp}(N,\mathbb{C})$ $\mathfrak{so}(2N,\mathbb{C})$

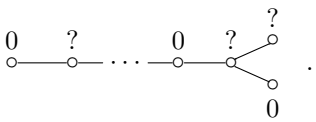
この補題は複素単純リー環への $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ からの準同型の Dynkin–Kostant 分類 (例えば [2] を参照して下さい) を用いて証明する事が出来る.

事実 3.1 と補題 3.2 を比較して, 例えば対称空間

$$G/H = SO^*(4N)/(SO^*(2p) \times SO^*(4N-2p)) \quad (p : \text{奇数})$$

が Property (VE) を有する事を証明してみよう.

準同型 $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{so}^*(4N)$ に対して, その複素化 $\varphi_{\mathbb{C}}\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}(4N,\mathbb{C})$ を考える. この時, 佐武図形の対 $(S_{\mathfrak{g}}, S_{\mathfrak{g}^c})$ は (3.1) の二番目の様になっていた. 従って, まず事実 3.1 の (i) によって, $\varphi_{\mathbb{C}}$ の重み付き Dynkin 図形は次の様にならなければならない ("?" は確定しない部分を表す):



.

その上で, 事実 3.1 の (ii) により, $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{so}^*(4N)$ を通した $SL(2,\mathbb{R})$ の G/H への作用が固有であるには, $S_{\mathfrak{g}^c}$ と match しない事が必要十分であり, これ

は一番右端の二つの重みが異なる事が必要十分, さらに補題 3.2 により very even である事と同値である. よって G/H は Property (VE) を持つ.

Berger [1] による既約対称空間の局所同型を除いた分類表を見ながら, ケースバイケースに同様に議論する事で定理 2.4 は証明される.

謝辞. 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2025」において講演の機会を与えてくださった世話人の小池直之先生, 田中真紀子先生, 馬場蔵人先生に感謝申し上げます.

References

[1] M. Berger. Les espaces symétriques noncompacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 74:85–177, 1957.

[2] D. Collingwood and W. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[3] K. Kannaka and K. Tojo. Hurwitz–Radon numbers and proper actions of semisimple Lie groups. arXiv:2602.04544, 2026.

[4] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285(2):249–263, 1989.

[5] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1(3, Special Issue: In memory of Armand Borel. Part 2):591–663, 2005.

[6] T. Okuda. Classification of semisimple symmetric spaces with proper $SL(2,\mathbb{R})$-actions. *J. Differential Geom.*, 94(2):301–342, 2013.

[7] T. Ōshima and J. Sekiguchi. The restricted root system of a semisimple symmetric pair. In *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, volume 4 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 433–497. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[8] 甘中一輝. フルヴィッツラドン数と半単純リー群の固有作用. **数理解析研究所講究録**, (2297):51–56, 2024.