左不変アファイン葉層構造と左対称代数構造の一般化 *

加藤 直樹 (中京大学 教養教育研究院)

1 序論

座標変換がアファイン変換であるような座標近傍系をアファイン構造といい, アファイン構造を備えた多様体をアファイン多様体という. 本稿では主に, リー群上の左不変なアファイン構造を考える. 左不変アファイン構造は局所単純推移的アファイン作用と対応し, 特に左不変完備アファイン構造は単純推移的アファイン作用と対応する. この対応関係に基づき, 左不変アファイン構造をもつリー群の分類が盛んに研究されてきた. 例えば, 2 ステップや 3 ステップのベキ零リー群は単純推移的アファイン作用を有することが知られており ([13], [14]), 従ってこのようなリー群は左不変完備アファイン構造をもつ.

単連結リー群 G 上の左不変なアファイン構造は, G のリー環 $\mathfrak{g}$ 上の左対称代数構造と一対一に対応することが知られている. 近年では, リー群上の左不変アファイン構造の研究は, 対応する左対称代数構造の研究に帰着して行われることが多い. なお, 左対称代数構造は, Koszul-Vinberg 構造や前リー代数構造とも呼ばれ, 代数的にも重要な研究対象である.

多様体上の幾何構造の一つに葉層構造がある. 横断方向の座標変換がアファイン変換であるような葉層構造を横断的にアファインな葉層構造 (TAF) という. TAF はアファイン構造の一般化とみなせる幾何構造であり, 例えば G 上の余次元 q 左不変 TAF は, G の局所推移的な q 次元アファイン作用と対応する.

本稿では, 左対称代数構造の一般化とみなせる代数構造を定義し, その代数構造が左不変 TAF と一対一に対応することを紹介する. また, 左不変 TAF の完備性との対応, そのような代数構造の存在性, 及び具体的構成法についても紹介する.

*研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2025」2025 年 12 月 9 日–10 日 (東京理科大学 神楽坂キャンパス 森戸記念館) 記録集

2　アファイン構造と横断的にアファインな葉層構造

2.1　アファイン構造

以下, 多様体や写像は全て C^∞ 級であるとする. また, 多様体は境界がないもののみを考える.

定義 2.1. 座標変換 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ がアファイン変換であるような M の座標近傍系 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ (の極大類) を M のアファイン構造という.

M がアファイン構造をもつことは, M が捩じれのない平坦接続をもつことと同値である.

M^n にアファイン構造が与えられると, 局所微分同相写像 $D\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}^n$ と準同型 $h\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ で, 同変条件 $D(\gamma\widetilde{x}) = h(\gamma)D(\widetilde{x})$ を満たすものを構成できる. ここで, $\widetilde{M}$ は M の普遍被覆空間である. 更に, 組 (D, h) は $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ による作用 $g(D, h) = (gD, ghg^{-1})$ を法にして一意に定まる. D を展開写像, h をホロノミー準同型という.

逆に, 同変条件を満たす (D, h) が与えられると, M にアファイン構造が定まる. 更に, M のアファイン構造は $\{(D, h)\}/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ の元と一対一に対応することが知られている.

注 2.2. 双曲構造の場合, M がコンパクトであれば展開写像は微分同相写像になる. 一般に, (G, X) 構造の展開写像は, G が X の計量を保存する場合, M がコンパクトであれば微分同相写像になる. アファイン構造 ($(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ 構造) のように G が X の計量を保存しない場合には, たとえ M がコンパクトであっても, 展開写像は微分同相写像になるとは限らない ([12]).

定義 2.3. 展開写像が微分同相写像であるようなアファイン構造を完備アファイン構造という.

注 2.4. アファイン構造が完備であることと, 対応する捩じれのない平坦接続が完備であることは同値である (例えば, [1] を参照).

2.2　横断的にアファインな葉層構造

$\mathcal{F}$ を M^n 上の余次元 q 葉層構造とし, $n = p + q$ とする. $\mathcal{F}$ の葉層座標近傍系 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ に対し, 座標変換 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ は

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, y) = (f_{\alpha\beta}(x, y), g_{\alpha\beta}(y))$$

という形をしている ($(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$). $g_{\alpha\beta}$ は $\mathcal{F}$ の各葉に対して横断的な方向の座標変換を与える.

定義 2.5. 横断方向の座標変換 $g_{\alpha\beta}$ がアファイン変換であるような $\mathcal{F}$ の葉層座標近傍系 $\mathcal{U}$ (の極大類) を $\mathcal{F}$ の横断的アファイン構造という. また, 組 $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ を横断的にアファインな葉層構造 (TAF) という.

$\mathcal{F}_M$ を M の各点からなる余次元 n 葉層構造とする (即ち, $\mathcal{F}_M = M$). このとき, $\phi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ であることから, $\mathcal{U}$ が $\mathcal{F}_M$ の横断的アファイン構造であることと, $\mathcal{U}$ が M のアファイン構造であることは同値である.

TAF に対しても, アファイン構造の場合と同様に, 展開写像 $D\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}^q$ とホロノミー準同型 $h\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ を構成できる. ここで, D は沈め込みである. また, アファイン構造の場合と同様に, (D,h) は $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ の作用 $g(D,h) = (gD, ghg^{-1})$ を法として一意に定まる ([5]).

逆に, 同変条件を満たす (D,h) が与えられると, 沈め込み D が定める $\widetilde{M}$ の葉層構造から, 普遍被覆写像 $p\colon \widetilde{M} \to M$ を用いることで M の TAF が得られる. 更に, アファイン構造の場合と同様に, TAF と $\{(D,h)\}/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ の元とは一対一に対応することが知られている.

以下, TAF の集合を $\{(D,h)\}/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ と同一視する.

注 2.6. 一般に, M がコンパクトであっても, D は沈め込み以上の性質をもつとは限らない. しかし, ある種の条件のもとでは, D はファイバー束の構造を与えることが知られている ([5], [15]).

定義 2.7. 展開写像 $D\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}^q$ がファイバー束の構造を与えるとき, TAF は完備であるという.

例 2.8. G を単連結リー群とし, G は q 次元局所推移的アファイン作用をもつとする. 即ち, ある準同型 $\rho\colon G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ と $x_0 \in \mathbb{R}^q$ が存在し, $\rho(G)x_0 \subset \mathbb{R}^q$ が開集合であるとする. このとき, $D = \mathrm{ev}_{x_0} \circ \rho\colon G \to \mathbb{R}^q$ は沈め込みであり, 同値類 $[D,0]$ は G 上の余次元 q TAF を定める.

更に, Γ を G の離散部分群とし, $M = \Gamma\backslash G$ とする. このとき, $\pi_1(M) = \Gamma$ であり, 準同型 $h = \rho|_\Gamma$ と D は同変条件を満たす. 従って, 同値類 $[D,h]$ は M 上の TAF を定める.

定義 2.9. G を単連結リー群とし, $\mathcal{F}$ を $[D,h]$ により定まる G 上の余次元 q TAF とする. 任意の $g \in G$ に対し, $D \circ L_g = A_g \circ D$ を満たす $A_g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ が存在するとき, $\mathcal{F}$ は左不変であるという. ここで, L_g は g による左移動である.

例 2.8 の TAF は, $D(gh) = \rho(g)D(h)$ が成り立つので, 左不変である.

定義 2.9 において, A_g は $g \in G$ に対して一意に定まる. このことから, $\rho(g) = A_g$ と定めることで, 準同型 $\rho\colon G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$ が得られる. 更に, e を G の単位元としたとき, $x_0 = D(e)$ とおくと, $D(g) = \rho(g)x_0$ が成り立つ.

従って, G が左不変 TAF をもつことは, G が局所推移的アファイン作用をもつことと同値である. 特に, G が左不変アファイン構造をもつことは, G が局所単純推移的アファイン作用をもつことと同値である ([8]).

3 左対称代数構造と一般化左対称代数構造

3.1 左対称代数構造

定義 3.1. リー環 $\mathfrak{g}$ に対し, 双線形写像 $\cdot\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が次の (1), (2) を満たすとき, $\cdot$ を $\mathfrak{g}$ の左対称代数構造 (LSS) という.

(1) $(X,Y,Z)=(Y,X,Z)$.

ここで, $(X,Y,Z):=X\cdot(Y\cdot Z)-(X\cdot Y)\cdot Z$ は $\cdot$ に関する結合子である.

(2) $[X,Y]=X\cdot Y-Y\cdot X$.

注 3.2. 双線形写像 $\cdot$ に対し, $\cdot$ に関する左移動写像と右移動写像 $\ell, r\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ がそれぞれ定まる. (2) の条件が満たされているとき, (1) は次の条件 (1)' と同値である:

(1)' $\ell\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ はリー環の準同型写像.

次の定理により, LSS は左不変アファイン構造のリー環版であることが分かる.

定理 3.3 ([9], [6])**.** $\mathfrak{g}$ を単連結リー群 G のリー環とするとき, G 上の左不変アファイン構造と $\mathfrak{g}$ 上の LSS は一対一に対応する.

左不変アファイン構造の完備性は, 対応する LSS が満たす代数的条件として記述できる.

定理 3.4 ([10])**.** 左不変アファイン構造が完備であることと, 対応する LSS が次の条件を満たすことは同値である:

- 任意の $Y\in\mathfrak{g}$ に対し, $r_Y+\mathrm{id}\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が全単射.

3.2 一般化左対称代数構造

$\mathfrak{g}$ をリー環とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環とする.

定義 3.5. 双線形写像 $\bullet\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が次の (1), (2) を満たすとき, $\bullet$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する一般化左対称代数構造 (GLSS) という.

(1) $[X,Y]\bullet\overline{Z} = X\bullet(Y\bullet\overline{Z}) - Y\bullet(X\bullet\overline{Z})$.

(2) $\overline{[X,Y]} = X\bullet\overline{Y} - Y\bullet\overline{X}$.

注 3.6. 条件 (1) は, 左移動写像 $\ell\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ がリー環の準同型であることと同値である. 従って, 注 3.2 より, $\mathfrak{h}=\{0\}$ に関する GLSS は LSS と一致する.

次の定理より, GLSS は左不変 TAF のリー環版であることが分かる.

定理 3.7 ([7])**.** G を単連結リー群, $\mathfrak{g}$ を G のリー環とする. $\mathrm{LTAF}_q(G)$ を余次元 q 左不変 TAF の集合とし,

$\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g}) = \{(\bullet,\mathfrak{h}) \mid \mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$は余次元$q$部分リー環,$\bullet$は$\mathfrak{g}$の$\mathfrak{h}$に関する GLSS$\}$

とする. このとき, $\mathrm{LTAF}_q(G)\cong\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})$.

証明の概略.

$$\widetilde{\mathrm{LTAF}'_q}(G) = \{(\rho,x_0)\in\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q))\times\mathbb{R}^q \mid \mathrm{ev}_{x_0}\circ\rho \text{ が沈め込み }\},$$
$$\mathrm{LTAF}'_q(G) = \widetilde{\mathrm{LTAF}'_q}(G)/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q),$$
$$\widetilde{\mathrm{LTAF}_q}(\mathfrak{g}) = \{(\phi,x_0)\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^q))\times\mathbb{R}^q \mid \mathrm{ev}_{x_0}\circ\phi \text{ が全射 }\},$$
$$\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g}) = \widetilde{\mathrm{LTAF}_q}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^q)$$

と定める. このとき, $\mathrm{LTAF}_q(G)\cong\mathrm{LTAF}'_q(G)$ である. また, G が単連結であることから, $\mathrm{LTAF}'_q(G)\cong\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})$ である. 従って, $\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})$ と $\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})$ の間の全単射を構成すればよい.

$[\phi,x_0]=[(\phi_L,\phi_T),x_0]\in\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})$ に対し, $f=\mathrm{ev}_{x_0}\circ\phi$ とおく. $\mathfrak{h}=\mathrm{Ker}(f)$ と定めると, $\mathfrak{h}$ は部分リー環になる. f が誘導する線形同型写像 $\overline{f}\colon\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\to\mathbb{R}^q$ を考え, 双線形写像 $\bullet$ を $X\bullet\overline{Y}=\overline{f}^{-1}(\phi_L(X)\overline{f}(\overline{Y}))$ と定めると, $\bullet$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する GLSS になる. 更に, $\mathfrak{h}$ と $\bullet$ は $[\phi,x_0]$ の代表元の取り方に依らないことが分かるので, この構成により $\Phi\colon\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})\to\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})$ が定まる.

逆に, $(\bullet,\mathfrak{h})\in\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})$ が与えられたとする. 線形同型写像 $\overline{f}\colon\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\to\mathbb{R}^q$ を固定し, $f=\overline{f}\circ p$ とおく. ここで, $p\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は射影である. $\phi_L\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^q)$ を $\phi_L(X)=\overline{f}\circ\ell_X\circ\overline{f}^{-1}$ と定め, $\phi=(\phi_L,f)$ とすると, $\phi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^q)$ は準同型になる. また, f が全射であることから, $[\phi,\boldsymbol{o}]\in\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})$ が得られる. 更に, $[\phi,\boldsymbol{o}]$ は $\overline{f}$ の取り方に依存しないことが分かるので, この構成により, $\Psi\colon\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})\to\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})$ が定まる.

構成から, $\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}_{\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})}, \Phi\circ\Psi=\mathrm{id}_{\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})}$ が成り立つことが分かるので, $\mathrm{LTAF}_q(\mathfrak{g})\cong\mathrm{GLSS}_q(\mathfrak{g})$ が従う.

□

左不変 TAF の完備性についても, 対応する GLSS が満たす代数的条件として記述できる.

定理 3.8 ([7])**.** 左不変 TAF が完備であることと, 対応する GLSS が次を満たすことは同値:

- 全ての $\overline{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に対し, $r_{\overline{Y}} + p \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が全射.

4 GLSS の具体例と存在性

4.1 GLSS の具体例

例 4.1. $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が LSS $\cdot$ をもつとする. このとき, $X \bullet \overline{Y} = \overline{X \cdot Y}$ と定義すると, $\bullet$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する GLSS である.

次の命題により, イデアル $\mathfrak{h}$ に関する GLSS は本質的に例 4.1 に限られることが分かる.

命題 4.2 ([7])**.** $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, $\bullet$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する GLSS とする. このとき, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上の LSS $\cdot$ が存在し, $X \bullet \overline{Y} = \overline{X \cdot Y}$ が成り立つ.

二つの可換リー群の半直積として表される単連結リー群は, 単純推移的アファイン作用をもつことが [16] で示されている. 従って, 二つの可換リー環の半直和として表される可解リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \ltimes \mathfrak{a}_2$ は完備 LSS をもつ. [16] における構成法の類似により, 可換リー環と任意のリー環の半直和 $\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{a}$ 上に $\mathfrak{h}$ に関する完備 GLSS を構成できる.

例 4.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{a}$ とし, $\mathfrak{a}$ が可換リー環とする. このとき, $(H_1 + A_1) \bullet \overline{A_2} = \overline{[H_1, A_2]}$ と定義すると, $\bullet$ は well-defined であり, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する完備 GLSS である.

4.2 GLSS の存在性

LSS や GLSS を研究する上で, その存在性は最も基本的な問題の一つである.

まず, LSS の場合については以下が知られている.

定理 4.4 ([4])**.** 半単純リー環は LSS をもたない.

定理 4.5 ([13], [14])**.** 2 ステップまたは 3 ステップベキ零リー環は完備 LSS をもつ.

定理 4.6 ([16])**.**

(1) 可換リー環の半直和で表されるリー環は完備 LSS をもつ.

(2) 4 次元以下の可解リー環は完備 LSS をもつ.

また, Milnor [11] は「全ての可解リー環は完備 LSS をもつ」ことを予想した (正確には, 全ての単連結可解リー群が単純推移的アファイン作用をもつことを予想した) が, この予想については反例が知られている.

定理 4.7 ([2], [3])**.** LSS をもたないベキ零リー環が存在する.

GLSS についても, いくつかの特別な場合には非存在性を示すことができる.

命題 4.8 ([7])**.**

(1) コンパクト単純リー環は GLSS をもたない.

(2) $\mathfrak{g}$ が単純リー環で, $\operatorname{codim}\mathfrak{h} = 2$ のとき, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{h}$ に関する GLSS をもたない.

LSS の場合と異なり, 単純リー環は GLSS を許容しうる.

例 4.9. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ とし,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\langle H, X, Y\rangle$ であり,

$$[H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y,\ [X,Y] = H$$

を満たす.

$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\langle X\rangle$ とすると, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathbb{R}\langle \overline{H}, \overline{Y}\rangle$ となる. $\bullet$ を

$$H \bullet \overline{H} = \overline{H},\ H \bullet \overline{Y} = -\overline{Y},\ X \bullet \overline{H} = 0,\ X \bullet \overline{Y} = \overline{H},$$
$$Y \bullet \overline{H} = \overline{Y},\ Y \bullet \overline{Y} = 0$$

と定義すると, $\bullet$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の $\mathfrak{h}$ に関する GLSS になる.

ベキ零リー環に対しては, Scheuneman の結果 [13], [14] と強 Malcev 基底を用いることで, 次が従う.

命題 4.10. $\mathfrak{g}$ が 2 ステップまたは 3 ステップのベキ零リー環のとき, 任意の q $(0 \leq q \leq \dim\mathfrak{g})$ に対し, $\mathfrak{g}$ は余次元 q GLSS をもつ.

2 次元または 3 次元の可解リー環は, 二つの可換リー環の半直和として表される. 例 4.1, 4.3 より, 次を得る.

命題 4.11 ([7])**.** $\mathfrak{g}$ を 3 次元以下の可解リー環とすると, 任意の q $(0 \leq q \leq \dim \mathfrak{g})$ に対し, $\mathfrak{g}$ は余次元 q GLSS をもつ.

注 4.12. 命題 4.10, 4.11 において, 任意の $\mathfrak{h}$ に対して $\mathfrak{h}$ に関する GLSS が存在するかどうかは, 現在のところ不明である.

References

[1] L. Auslander and L. Markus, *Holonomy of flat affinely connected manifolds*, Ann. Math. (2) **62** (1955), 139–151.

[2] Y. Benoist, *A non-affine nilvariety*, J. Differ. Geom. **41** (1995), 21–52.

[3] D. Burde and F. Grunewald, *Modules for certain Lie algebras of maximal class*, J. Pure Appl. Algebra **99** (1995), 239–254.

[4] B.-Y. Chu, *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. Am. Math. Soc. **197** (1974), 145–159.

[5] D. B. A. Epstein, *Transversely hyperbolic 1-dimensional foliations*, in Structure transverse des feuilletages, Astérisque **116** (1984), 53–69.

[6] J. Helmstetter, *Algèbres symétriques à gauche*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **272** (1971), 1088–1091.

[7] N. Kato, *Left-invariant transversely affine foliations and a generalization of left-symmetric structures*, Beitr. Algebra Geom. (2025).

[8] H. Kim, *Complete left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups*, J. Differ. Geom. **24** (1986), 373–394.

[9] Y. Matsushima, *Affine structures on complex manifolds*, Osaka J. Math. **5** (1968), 215–222.

[10] A. Medina Perea, *Flat left-invariant connections adapted to the automorphism structure of a Lie group*, J. Differ. Geom. **16** (1981), 445–474.

[11] J. W. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. Math. **25** (1977), 178–187.

[12] T. Nagano and K. Yagi, *The affine structures on the real two-torus. I*, Osaka J. Math. **11** (1974), 181–210.

[13] J. Scheuneman, *Examples of compact locally affine spaces*, Bull. Am. Math. Soc. **77** (1971), 589–592.

[14] ———, *Affine structures on three-step nilpotent Lie algebras*, Proc. Am. Math. Soc. **46** (1974), 451–454.

[15] R. A. Wolak, *Transversely affine foliations compared with affine manifolds*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **41** (1990), 369–384.

[16] S. Yamaguchi, *On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A **33** (1979), 209–218.

Faculty of Liberal Arts and Sciences, Chukyo University,

101 Tokodachi, Kaizu-cho, Toyota-shi, Aichi 470-0393, Japan.

knaoki@lets.chukyo-u.ac.jp