Cartan embeddings of compact Riemannian k-symmetric spaces

木村　太郎　(鶴岡工業高等専門学校)*

概　　要

コンパクト単純連結リー群 G の有限位数自己同型写像 σ から定まるカルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \to G$ の像 $\Psi_\sigma(G/K)$ は G の部分多様体となる．この部分多様体の分類問題として，2 重調和部分多様体の分類が考えられる．この報告集では，2 重調和部分多様体の分類が与える 4 対称空間の特徴付けについて報告する．

本研究は間下克哉氏（法政大学 名誉教授）とのカルタン埋め込み関する一連の共同研究 [4],[5],[6] に基づく．

1. 序論

本研究は, コンパクト単純連結リー群 G への等長はめ込みを考え, ある種の 2 重調和部分多様体の分類についての特徴付けを与える．

カルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \to G$ に対して, σ が対合的自己同型であるときは全測地的埋込みとなる．位数が 3 以上であるときは極小はめ込みとは限らないが, [8], [9] において, 位数 $3, 4$ のとき極小はめ込みになる σ が分類されている．

調和写像と関連する話題として, [1] で導入された k 重調和写像がある．これはコンパクトリーマン多様体の間の滑らかな写像 $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ に対して, Eell–Lemaire は, k-エネルギー汎函数を

$$E_k(f) = 1/2 \int_M \|(d+\delta)^k f\|^2 v_g \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

で定義した．$E_k(f)$ の第一変分の臨界点を k-調和写像と呼ぶ．

$k = 1$ のときは調和写像となり, f が等長はめ込みのとき, f が極小であることと, 調和写像となることは同値なる．これから $k = 2$ のときに 2-調和写像についての分類問題が自然に考えられる．2024 年の報告集では, 自己同型の位数が 4 以下の場合について, 2-調和写像（２重調和写像）になるカルタン埋め込みの分類結果を報告した ([5])．この度の報告集では, この分類結果から 位数 4 の自己同型が定める対称空間上のファイバー束に注目し, ２重調和写像と対称空間の関係についての結果を報告する．

2. カルタン埋め込み

G をコンパクト単純連結リー群とし, σ を G の有限位数の自己同型写像とする．$K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とおく．写像 $\Psi : G \to G; g \to g\sigma(g)^{-1}$ は次の写像を引き起こす: $\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$. この写像を, σ が引き起こす**カルタン埋め込み**という．G に両側不変リーマン計量を入れ, $M = G/K$ には Ψ_σ による誘導計量を考える． このとき, カルタン埋め込み Ψ_σ の第二基本形式 B は以下で与えられる．

キーワード：Cartan embedding, k-symmetric spaces, biharmonic

* 〒 997-8511 山形県鶴岡市井岡字沢田 104 鶴岡工業高等専門学校 創造工学科 基盤教育グループ
e-mail: t-kimura@tsuruoka-nct.ac.jp

補題 ([4])**.** B を自己同型写像 σ に対応するカルタン埋め込み Ψ_σ の第 2 基本形式とする. このとき, $X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して,

$$B(X,Y) = -\frac{1}{2}[(1-d\sigma)X, (1+d\sigma)Y]_{\mathfrak{k}}.$$

G のリー環を $\mathfrak{g}$ として, σ による分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ で表す.

3. k-symmetric spaces

定義. G をコンパクトリー群, H をその閉部分群とする. G の有限位数 k の自己同型写像 σ ($\sigma^l \neq \mathrm{id}, l < k$) が存在して,

$$G_o^\sigma \subset H \subset G^\sigma$$

が成り立つとき, $(G/H, \sigma)$ をコンパクト k-対称空間と呼ぶ.

特に, $k = 2$ のとき, 通常のコンパクト対称空間となる.

例. エルミート対称空間は k-対称空間である.

4. 内部自己同型写像

G をコンパクト単純連結リー群, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 環とし, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関するルート系を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ とする. さらに, $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の 1 つの基本ルート系を

$$\Pi(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

とする. $V_i \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} (1 \leq i \leq n)$ を次で定める.

$$\alpha_j(V_i) = \frac{1}{m_i}\delta_{ij}.$$

$\alpha_0 = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の最高ルートとする.

内部自己同型写像 σ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の下で

$$\mathrm{Ad}\left(\exp 2\pi\sqrt{-1}X\right) \quad (X \in \mathfrak{D}_0)$$

に共役である. $\mathfrak{D}_0$ は基本領域を表す.

$$\mathfrak{D}_0 = \{X \in \sqrt{-1}\mathfrak{t} \mid \alpha_i(H) \geq 0 \ (1 \leq i \leq n), \alpha_0(H) \leq 1\}.$$

位数 $3, 5$ の自己同型写像の分類は, Wolf and Gray ([10], [11]) により以下で X が与えられている:

位数 3 のとき

- $X = 1/3V_i, m_i = 1$
- $X = 2/3V_i, m_i = 2$
- $X = 1/3(V_i + V_j), m_i = m_j = 1$

- $X = V_i, m_i = 3$

位数 5 のとき

- $X = 1/5V_i, 1 \leq m_i \leq 5$
- $X = 4/5V_i, m_i = 2$
- $X = 2/5V_i, m_i = 1$
- $X = 1/5(V_i + V_j), m_i = m_j = 1$
- $X = 1/5(2V_i + V_j), 1 \leq m_i \leq 2, m_j = 1$
- $X = 1/5(3V_i + V_j), m_i = 3, m_j = 1$
- $X = 2/5(V_i + V_j), 1 \leq m_i \leq m_j = 2$
- $X = 1/5(3V_i + 2V_j), m_i = 3, m_j = 2$
- $X = 1/5(V_i + V_j + V_k), m_i = m_j = m_k = 1$
- $X = 1/5(2V_i + V_j + V_k), 1 \leq m_i \leq 2, m_j = m_k = 1$
- $X = 1/5(V_i + V_j + V_k + V_l), m_i = m_j = m_k = m_l = 1$

位数 4 の自己同型写像の分類は, Jimenez ([3]) により以下で X が与えられている:

- $X = V_i, m_i = 4$
- $X = 3/4V_i, m_i = 3$
- $X = 1/4(2V_i + V_j), m_i = 2, m_j = 1$
- $X = 1/4(V_i + V_j + V_k), m_i = m_j = m_k = 1$
- $X = 1/4V_i, m_i = 1$
- $X = 1/2V_i, m_i = 2, \quad X = 1/4(V_j + V_k), m_j = m_k = 1, \quad X = 1/2(V_p + V_q), m_p = m_q = 2$

5. 2重調和部分多様体

リーマン多様体の等長はめ込み $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ に対して

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 \, v_g$$

で bienegy 関数を定義する. ここで, $\tau(\varphi)$ は φ の tension 場である. いま $\varphi_0 = \varphi$ である任意の変分 φ_t に対して第 1 変分公式は, [2] によって次で与えられた:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(\varphi_t) = - \int_M h(\tau_2(\varphi), V) v_g.$$

ここで $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, $\tau_2(\varphi)$ は φ の bitension 場を表す.

定義. $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ が $\tau_2(\varphi)=0$ をみたすとき, φ を 2 重調和写像という.

注意. 2 重調和写像の定義から, 調和写像は 2 重調和写像となる.

注意. $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ が調和写像であることと, M が N の極小部分多様体であることは同値である.

定義. 調和写像でない 2 重調和写像を proper な 2 重調和写像という

6. カルタン埋め込みの 2 重調和性

カルタン埋め込み $\Psi_\sigma:G/K\to G; gK\to g\sigma(g)^{-1}$ の 2 重調和性を決定するには, 次の定理を用いる.

定理 ([7]). $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ を等長はめ込みとする. また, すべての $X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して, $\nabla^\perp_X\tau(\varphi)=0$ と仮定する. このとき, φ が 2 重調和写像であることは次と同値である.

$$\sum_{k=1}^{m}R^h(\tau(\varphi),d\varphi(e_k))d\varphi(e_k)=\sum_{j,k=1}^{m}h(\tau(\varphi),B_\varphi(e_j,e_k))B_\varphi(e_j,e_k)$$

ここで,$\{e_i\}_{i=1}^m$ は *local orthonomal frame field,* R^h は N のリーマン曲率テンソル, B_φ は φ の第二基本形式である.

この定理を用いると, 位数 3 と 4 の自己同型の場合について次を得る.

定理 ([5]). 位数 3 の内部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み $\Psi_\sigma:G/K\to G$ が proper な 2 重調和写像ならば極小である.

定理 ([5]). 位数 4 の内部自己同型 $\sigma=\tau_{\exp(2\pi\sqrt{-1}H)}$ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が 2 重調和写像 proper 2 重調和写像である必要十分条件は, 表 1 の $(\mathfrak{g},H,\mathfrak{k})$ のどれかになる.

定理 ([5]). 位数 4 の外部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が 2 重調和写像 proper 2 重調和写像である必要十分条件は次の $\sigma=(\mathfrak{g}_N^{(n)};s_0,s_1,\cdots,s_n)$ が, 表 2 のどれかになる.

$\mathfrak{g}$	X	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{a}_n\ (n \geq 1)$	$1/4\, V_i \quad (1 \leq i \leq [(n+1)/2])$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-i} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n\ (n \geq 2)$	$1/4\, V_1$	$\mathfrak{b}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n\ (n \geq 2)$	$1/2\,(V_i + V_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{b}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_n\ (n \geq 3)$	$1/4\, V_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_{2m}\ (m \geq 2)$	$1/4\,(2\, V_m + V_{2m})$	$\mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 4)$	$1/4\, V_1$	$\mathfrak{d}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 5)$	$1/4\, V_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 4)$	$1/4\,(V_1 + 2\, V_2)$	$\mathfrak{d}_{n-2} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_{2n}\ (n \geq 2)$	$1/4\,(2\, V_n + V_{2n})$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n\ (n \geq 5)$	$1/2\,(V_i + V_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-3,\ 2\,i+1 < n)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{d}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_6$	$1/4\, V_1$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/4\, V_7$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/2\,(V_1 + V_2)$	$\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$

表 1: Proper biharmonic Cartan embeddings induced by inner automorphism

$\mathfrak{g}$	type	$\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{a}^{(2)}_{2n-1}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$	$s_0 = s_n = 1,\ s_i = 0\ (1 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$(n \geq 2)$	$s_1 = s_n = 1,\ s_i = 0\ (i \neq 1, n)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$(\mathfrak{d}^{(2)}_{n+1}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$	$s_p = s_{p+1} = 1,\ s_i = 0$	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-2p-2} \oplus$
$(n \geq 2)$	$(0 \leq p \leq n-1, 2p+1 \neq n)\ (i \neq p, p+1)$	$\mathfrak{b}_{p+1} \oplus \mathbb{R}$

表 2: Proper biharmonic Cartan embeddings induced by outer automorphism

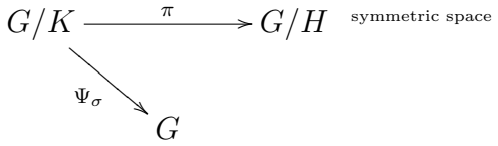
7. 4-symmetric spaces

この章では, 位数 4 の自己同型写像が引き起こす 4-対称空間 G/K についてのカルタン埋め込みを考える.

G をコンパクト単純連結リー群, σ を位数 4 の自己同型写像とし,

$$\tau = \sigma^2, K = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}, H = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$$

とおくと $K \subset H$ をみたすので, ファイバー H/K のファイバー束 $G/K \to G/H$ を得る. このとき, σ が引き起こすのカルタン埋め込み Ψ_σ の像 $\Psi_\sigma(G/K)$ について考える.



$K \subset H$ の包含関係の決定は, 内部自己同型のとき, Dynkin 図式の包含関係またはルート系の次元による計算方式, 外部自己同型のときは, G/H と H/K の両方が外部型の対称空間になることを利用すれば $K \subset H$ の包含関係は決定できる （講演スライド参照）.

いま, (G, H, τ) をコンパクトエルミート対称対とすると, τ は, H のリー環 $\mathfrak{h}$ の1次元中心 $\mathfrak{c}$ の元 J_0 を用いて

$$\tau(g) = \exp(\pi J_0)\ g\ \exp(-\pi J_0)\ \ (g \in G)$$

で定義される. いま G 上の自己同型 σ_k $(k \neq 2)$ を

$$\sigma_k(g) = \exp\left(\frac{2\pi}{k} J_0\right)\ g\ \exp\left(-\frac{2\pi}{k} J_0\right)\ \ (g \in G)$$

で定義すると $(\sigma_k)^k = id, (\sigma_4)^2 = \tau$.

$$K = \{g \in G \mid \sigma_4(g) = g\}, H = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$$

とおくと $K \subset H$ をみたすので, ファイバー H/K のファイバー束 $G/K \to G/H$ を得る. このとき, σ_4 が引き起こすのカルタン埋め込み Ψ_{σ_4} の像 $\Psi_{\sigma_4}(G/K)$ について考える.

$$\begin{array}{ccc} G/K & \xrightarrow{\ \pi\ } & G/H \\ & \searrow^{\Psi_{\sigma_4}} & \\ & & G \end{array}$$

位数 4 の自己同型写像 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ を proper 2重調和写像と仮定すると, 表1, 2の結果により G/H はコンパクトエルミート対称空間となる. 逆は成り立たないことは, [3] の分類よりわかる. そこで, 先ほど定義したエルミート対称空間から決まる位数 k の自己同型写像 σ_k が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_{σ_k} を考えるとカルタン埋め込み Ψ_{σ_k} が proper 2重調和写像である必要十分条件は, $k = 4$ に限ることが計算によりわかる. よって, 次を得る：

定理 ([6]). $\Psi_{\sigma_k} : G/K \to G$ を proper 2重調和写像とする. このとき, G/K は 4-対称空間に限る.

注意. 上記の定理で, σ の位数 k については, 有限性を仮定しておく.

8. 謝辞

2025年12月東京理科大学森戸記念館における研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2025」に講演の機会を頂いた東京理科大学理学部・小池直之教授と東京理科大学創域理工学部・田中真紀子教授に感謝申し上げます.

参考文献

[1] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, 50, Amer. Math. Soc, (1983).

[2] G. Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formula*, Chinese Ann. Math., 7A (1986), 388–402; Note di Mat., 28 (2009), 209–232.

[3] J.A. Jiménez, *Riemannian 4-symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 715–734.

[4] T. Kimura and K. Mashimo, *Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds*, Hokkaido Math J. vol. 51 (2022), 1–23.

[5] T. Kimura and K. Mashimo, *Biharmonic Cartan embeddings*, a preprint.

[6] T. Kimura and K. Mashimo, *Biharmonic Cartan embeddings associated with Hermitian symmetric spaces*, in preparation.

[7] S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, *Bi-harmonic homogeneous hypersuefaces in compact symmetric spaces*, Differential geometry and its applications, 43(2015), 155-179.

[8] K. Mashimo, *Cartan embeddings of compact Riemannian 3-symmetric spaces*, Tokyo J. of Math. 19(1996), 353–364.

[9] K. Mashimo, *Cartan embeddings of compact Riemannian 4-symmetric spaces*, a preprint.

[10] J.A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I*, J Differential geometry 2 (1968), 77–114.

[11] J.A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, II*, J Differential geometry 2 (1968), 115–159.