平行移動写像と弱鏡映部分多様体のアファイン微分幾何学

森本 真弘 （東京都立大学・学振 PD）

平行移動写像は，等質空間 G/K 上に定義される自然なファイブレーションである．より正確には，ある可分な無限次元 Hilbertable 空間 V から N への沈めこみ写像 $\Phi_N : V \to N$ として定義され，ある path 群を構造群とする主束となる．N の部分多様体 M に対して，逆像 $\hat{M} := \Phi_K^{-1}(M)$ は V の部分多様体となる．よって平行移動写像を通して，V の部分多様体の例が得られる．別の見方をすれば，平行移動写像により，等質空間 N 内の部分多様体 M の研究を，平坦な空間 V 内の部分多様体 $\hat{M}$ の研究に還元することができる．

平行移動写像は，1980 年代に R. S. Palais と C.-L. Terng により，N が連結コンパクト・リー群の場合で導入された [8, 9]．その後，C.-L. Terng と G. Thorbergsson は，より一般に N がコンパクト・リーマン対称空間の場合で平行移動写像 Φ_N を研究し，特にそれがリーマン沈めこみとなることを示した [10]．その後，小池直之は N が非コンパクト型リーマン対称空間の場合で平行移動写像を同様に定め，それが擬リーマン沈めこみとなることを示した [4]．これらの結果に基づき，平行移動写像やその応用に関する様々な研究（特に，等径部分多様体や等焦部分多様体に関わる研究）が行われてきた．講演者は近年，より一般に N がアファイン対称空間や (reductive な）等質空間の場合において平行移動写像を同様に定め，それが持つアファイン微分幾何学的な性質を研究してきた [6, 7]．本講演では，その研究で得られた結果を発表した．

本稿では以下，講演者の研究で得られた主な結果を述べる．$N = G/K$ を reductive 等質空間とし，G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を固定する．ここで $\mathfrak{k}$ は K のリー代数，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な部分空間である．$V := L^2([0,1], \mathfrak{g})$ を閉区間 $[0,1]$ から $\mathfrak{g}$ への L^2 可積分写像全体の成す Hilbertable 空間とする．$\Phi_N : V \to G \to N$ を平行移動写像とする．V の平坦接続を D で表し，N の natural torsion-free 接続を ∇^N で表す．

定理 1 ([7])**.** 平行移動写像 $\Phi_N : (V, D) \to (N, \nabla^N)$ は，アファイン沈め込み with 水平分布 $\mathcal{H}$ となる．更に，基本テンソル $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ への制限は交代形式である．

ここで，水平分布付きアファイン沈めこみとは，安部直人・長谷川和志 [1] により導入された概念であり，擬リーマン沈めこみの一般化概念である．上の定理における Φ_N の水平分布 $\mathcal{H}$ は，分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ から自然に誘導される．$\mathcal{A}$ の $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ への制限が交代形式であることは，(N, ∇) の測地線の水平リフトが (V, D) の測地線となることと同値であり，これより部分多様体 $M \subset N$ の焦方向と $\hat{M} \subset V$ の焦方向が平行移動写像 Φ_N を通して対応することが従う（後述の命題 5）．

特に $N = G/K$ が対称空間の場合，∇^N は標準接続に一致し，従って (N, ∇^N) はアファイン対称空間に他ならない．よって特に次の系を得る：

本稿は，研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2025」で行った講演の記録である．本研究は特別研究員奨励費（課題番号：23KJ1793），文部科学省特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165 および大阪公立大学戦略的研究推進事業（国際研究拠点形成支援）の助成を受けたものである．

系 ([6]). N を対称空間，∇^N を標準接続とする．このとき平行移動写像 $\Phi_N : (V, D) \to (N, \nabla^N)$ は，アファイン沈め込み with 水平分布 $\mathcal{H}$ となる．更に，基本テンソル $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ への制限は交代形式である．

特に N がリーマン対称空間の場合，上の定理における水平分布は，計量から誘導される水平分布（ファイバーの法空間として定まる水平分布）と一致する．よって上の系は，Terng-Thorbergsson[10] と小池直之 [4] の結果の自然な拡張である．

次の定理は，$N = G/K$ の部分多様体 M に対して，平行移動写像の逆像として得られる部分多様体 $\hat{M} = \Phi_N^{-1}(M)$ の基本性質（フレドホルム性）についてである．これは，N がコンパクト型リーマン対称空間の場合における Terng-Thorbergsson の結果 [10] 及び，N が非コンパクト型リーマン対称空間の場合における小池直之の結果 [4] を一般化する．

定理 2 ([7]). $N = G/K$ を reductive 等質空間，M を N の部分多様体 with 横断束 $\mathcal{W}$ とする．$\mathcal{W}$ の水平リフトを $\hat{\mathcal{W}}$ で表す．このとき逆像 $\hat{M} = \Phi_N^{-1}(M)$ は V の部分多様体 with 横断束 $\hat{\mathcal{W}}$ であって，形作用素はコンパクト作用素である．

一般に，アファイン多様体 (N, ∇^N) の部分多様体 M with 横断束 $\mathcal{W}$ に対し，M が**弱鏡映** [3, 6] であるとは，各 $(p, \xi) \in \mathcal{W}$ に対してあるアファイン変換 $\nu : N \to N$ が存在して条件 $\nu(p) = p$, $\nu(M) = M$, $d\nu(\xi) = -\xi$, $d\nu(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ が成り立つことをいう．特に各 ν が特定の群 S から選べるとき，M は S 弱鏡映と呼ばれる．弱鏡映性から，オースティア性（各 $\xi \in \mathcal{W}$ に対して，形作用素の固有値全体が重複度込みで (-1) 倍不変であること）が従い，従って弱鏡映部分多様体は極小部分多様体（各 $\xi \in \mathcal{W}$ に対して，形作用素のトレースが 0）となる．ただし，無限次元の場合，形作用素は一般にトレースクラスでないため，極小性の定義には注意が必要である．

次の定理は，G/K がコンパクト正規等質空間の場合の結果 [5] を一般化すると同時に，アファイン空間内の弱鏡映部分多様体の非自明な例を与える．

定理 3 ([6]). $N = G/K$ を reductive 等質空間とする．このとき，平行移動写像 $\Phi_N : V \to N$ の各ファイバーは (V, D) の弱鏡映部分多様体である．

次の定理は，アファイン対称空間内の弱鏡映部分多様体の特徴づけを与える．これは，N が既約なコンパクト型リーマン対称空間の場合における講演者の以前の結果 [5] を一般化する．証明では N の対称空間の構造を用いる．

定理 4 ([6]). (N, ∇^N) をアファイン対称空間，$p \in N$ とする．アファイン変換群を $\tilde{G}$, 単位元連結成分を G，p における $\tilde{G}$ の固定部分群を $\tilde{K}$ とし $K := \tilde{K} \cap G$ とおく．M を $N = G/K$ の部分多様体 with 横断束 $\mathcal{W}$ とする． $\hat{M} := \Phi_N^{-1}(M)$ の横断束を $\mathcal{W}$ の水平リフト $\hat{\mathcal{W}}$ で定める．このとき次は同値：(i) M は弱鏡映，(ii) $\hat{M}$ は S 弱鏡映．ここで $S := \{g \in H^1([0,1], \tilde{G}) \mid g(1) \in \tilde{K}\}$ であり，$H^1([0,1], \tilde{G})$ は閉区間 $[0,1]$ から $\tilde{G}$ への Sobolev H^1 写像全体のなすヒルベルト・リー群を表す．

定理 1 の下で言及した通り，平行移動写像は，部分多様体の焦点構造に関連する良い性質を持つ．より正確には，次の事実が成り立つ．これは，一般のリーマン沈めこみの場合における Heintze-Liu-Olmos の結果 [2] の拡張である．定理 1 より，この命題を reductive 等質空間上の平行移動写像に適用することができる．

命題 5 ([6]). (V, D) を Hilbertable 空間，(N, ∇) をアファイン多様体，$\pi : (V, D) \to (N, \nabla)$ をアファイン沈めこみ with 水平分布 $\mathcal{H}$ とし，基本テンソル $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ への制限が交代形式とする．M を (N, ∇) の部分多様体 with 横断束 $\mathcal{W}$ とする．$\hat{M} := \pi^{-1}(M)$ の横断束を水平リフト $\hat{\mathcal{W}}$ として定める．このとき次は同値：

(i) $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{W}}$ は $\hat{M}$ の重複度 m の焦方向である．

(ii) $\xi := d\pi(\hat{\xi}) \in \mathcal{W}$ は M の重複度 m の焦方向である．

今後の問題として，等径部分多様体や等焦部分多様体に関連する平行移動写像の幾何学の研究をアファインの場合へ拡張する，というものが考えられる．その際，等径部分多様体や等焦部分多様体をアファインの場合でどのように定義・定式化するか，という点がまず問題となる．また，別の問題として，ユークリッド空間へのアファインはめ込みの幾何学をヒルベルト空間の場合へ拡張し，平行移動写像を通して得られる部分多様体 $\hat{M}$ に適用することで，アファイン対称空間 N 内の部分多様体 M の新たな研究を行う，ということも考えられる．

参考文献

[1] N. Abe, K. Hasegawa, *An affine submersion with horizontal distribution and its applications*, Differential Geom. Appl. **14** (2001), no. 3, 235–250.

[2] E. Heintze, X. Liu, C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem*, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[3] O. Ikawa, T. Sakai, H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds.* J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437-481.

[4] N. Koike, *Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space*, Kyushu J. Math. **58** (2004), no. 1, 167–202.

[5] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 1, pp. 103–124.

[6] M. Morimoto, *The parallel transport map over affine symmetric space*, J. Geom. Anal. **35**, 342 (2025).

[7] M. Morimoto, *The parallel transport map over reductive homogeneous space*, arXiv:2512.01522.

[8] R. S. Palais, C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **1353**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space.* J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 9–47.

[10] C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces.* J. Differential Geom. **42** (1995), no. 3, 665–718.

（森本 真弘）東京都立大学 理学研究科 特別研究員（学振 PD）
e-mail: morimoto.mshr@gmail.com