旗多様体からグラスマン多様体への正則写像；竹内の定理の一般化

明治大学理工学部　長友康行 (Yasuyuki Nagatomo)
Department of Mathematics, Meiji University

1. 序章

本講演の目的は竹内先生の結果 [8] を一般化することにある；ディンキン図形とその部分図形の組 (Π, Π_0) を用いて旗多様体を指定する。また、正整数からなる集合を $\mathbf{Z}_+$ と表し、写像 $p : \Pi - \Pi_0 \to \mathbf{Z}_+$ を考える。この時、$(\Pi, \Pi_0; p)$ の同型類を A とする。また、旗多様体 (Π, Π_0) から複素射影空間への充満な正則等長写像の像同値類からなる集合を B と表わす。すると竹内先生の定理は「A から B への全射が存在する」と定式化される。我々はこの結果を、「コンパクトリー群の表現を対象とし、その同変同型写像を射とする圏と、旗多様体から複素グラスマン多様体への半正等質ベクトル束に対するゲージ条件を満たす充満な正則写像を対象とする圏が同型となる」という形に一般化する [7]。なお、後者の圏の射は以後の章で定義される。

証明は高橋の定理および do Carmo-Wallach 理論の一般化 [5], [6] に基づく。

2. 準備

2.1. **ベクトル束.** M を複素 m 次元のコンパクトケーラー多様体とし、$(V, h) \to M$ を M 上のエルミート計量 h を持つ正則ベクトル束とする。以後、(V, h) を**エルミート束**と言う。また、$V \to M$ の正則切断のなすベクトル空間を $H^0(M; V)$ と表す。$(V, h) \to M$ の正則ベクトル束としての構造とエルミート計量 h を保つ接続を**エルミート接続**といい、その曲率を R^V とする。

定義 2.1. 任意の $x \in M$ に対して、エルミート接続のホロノミー群の $(V, h) \to M$ のファイバー V_x への作用が既約であるとき、(V, h) を**ホロノミー既約な**ベクトル束であるという。

定義 2.2. $(V, h) \to M$ のエルミート接続の曲率 R^V が任意の $(1, 0)$ ベクトル Z $(Z \neq 0)$ と $v \in V_x \backslash \{0\}$ $(\forall x \in M)$ に対して,

$$h(R^V(Z, \overline{Z})v, v) > 0$$

を満たすならば、(V, h) は**正**であるという。上の不等式において、$>$ を $\geq$ で置き換えた不等式が成立するときに (V, h) は**半正**であるという。

(V, h) の平均曲率 K^V を

$$K^V := \sum_{i=1}^{m} R^V(Z_i, \overline{Z}_i) \in \Gamma(\operatorname{End} V)$$

と定義する [4]。ただし、$Z_1, \cdots, Z_m$ は M の正則接ベクトル束のユニタリ基底である。

定義 2.3. $K^V = \lambda \operatorname{id}_V$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ であるときに、(V, h) を **Einstein-Hermite** ベクトル束という。このとき、(V, h) のエルミート接続を **Hermitian Yang-Mills** 接続という。

2.2. **グラスマン多様体の幾何学.** $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を n 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ 内の p 次元部分空間のなすグラスマン多様体とし、$S \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を同語反復束とする。$S \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ は自明束 $\underline{\mathbf{C}^n} = Gr_p(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{C}^n$ の部分束であるので、正則ベクトル束の完全列を得る:

$$0 \to S \xrightarrow{i} Gr_p(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{C}^n \xrightarrow{ev} Q \to 0. \tag{2.1}$$

$Q \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を**普遍商束**という [1]。このとき、

$$\mathbf{C}^N = H^0(Gr_p(\mathbf{C}^n); Q)$$

が成り立ち、$Gr_p(\mathbf{C}^n)$ の正則接束 $T_{1,0}$ は $S^* \otimes Q$ と同一視される:

$$T_{1,0} := T_{1,0}Gr_p(\mathbf{C}^n) \cong S^* \otimes Q.$$

次に $\mathbf{C}^n$ のエルミート内積を固定する。すると、
- S にエルミート計量 h_S とエルミート接続 ∇^S が誘導される。
- Q にもエルミート計量 h_Q とエルミート接続 ∇^Q が誘導される。

∇^S、∇^Q は**標準接続**といわれる。
正則接束にはエルミート計量 $h_{S^*} \otimes h_Q$ が誘導される。この計量を **Fubini-Study** 計量という。このとき、標準接続より誘導される接続がリーマン接続となる。$Gr_p(\mathbf{C}^n)$ のケーラー形式を ω_n と表す。∇^Q の曲率形式を R^Q とおけば、

$$\omega_n = \sqrt{-1}\mathrm{trace}\, R^Q$$

が成り立つ。

2.3. **グラスマン多様体への $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ への正則写像.** $f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ をコンパクトケーラー多様体 M から $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ への正則写像としたとき、全射束写像 $ev : Gr_p(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{C}^n \to Q$ の引き戻しにより、$f^*ev : M \times \mathbf{C}^n \to f^*Q$ が定義される:

$$f^*ev(x,t) = (x, t(f(x)) \in f^*Q.$$

このように $\mathbf{C}^n$ は f^*Q の切断のなす空間であるとみなせるので、線形写像 $f^*ev : \mathbf{C}^n \to \Gamma(f^*Q)$ が定義される。

定義 2.4. $f^*ev : \mathbf{C}^n \to \Gamma(f^*Q)$ が単射であるとき、$f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を**充満**であるという。

以後 f^*ev も ev と表す。
ここから、$\mathbf{C}^n$ 上のエルミート内積を固定し、ケーラー多様体 $(Gr_p(\mathbf{C}^n), \omega_n)$ を考える。

定義 2.5. $f_1, f_2 : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を Fubini-Study 計量を持つ $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ への二つの正則写像とする。このとき、$f_2 = \psi \circ f_1$ を満たす $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ の正則等長変換 $\psi \in \mathrm{SU}(n)$ が存在するならば、f_1 は f_2 と**像同値**であると言われる。

定義 2.6. M 上のエルミート束 (V,h) を固定する。正則写像 $f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ に対して、引き戻し束 (f^*Q, f^*h_Q) がエルミート束として (V,h) と同型であるとき、f は (V,h) に対する**ゲージ条件**を満たすと言われる。

$(L,h) \to M$ を Einstein-Hermite 直線束とし、そのエルミート接続の曲率 ω が M のケーラー計量と一致するとする（正確には $R^L = \sqrt{-1}\omega$）。正則写像 $f : M \to \mathbf{P}^n$ が (L,h) に対するゲージ条件を持つと仮定する。ただし、$\mathbf{P}^n = Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ とみなす。したがって、$(\mathcal{O}(1), h_1) \to \mathbf{P}^n$ が普遍商束である。ここで、$\mathcal{O}(1)$ は次数 1 の正則直線束であり、h_1 は $\mathcal{O}(1)$ の標準計量である。また、そのエルミート接続の曲率は $\mathbf{P}^n$ のケーラー形式 ω_0 である。ゲージ条件の定義から

$$(f^*\mathcal{O}(1), f^*h_1) \sim (L,h)$$

であるが、このとき曲率も等しいので、$f^*\omega_0 = \omega$ が成り立つ。

定理 2.7. 上の記号の下、次が成り立つ。

$$f \text{ が } (L,h) \text{ に対するゲージ条件を満たす。} \Longleftrightarrow f \text{ が等長写像となる。}$$

したがって、「ゲージ条件を満たす正則写像」は「射影空間への正則等長写像」の一般化とみなせる。

$Gr_p(\mathbf{C}^n)$ 上のベクトル束の完全列 (2.1) を引き戻して、M 上の正則ベクトル束の完全列

$$0 \to U \xrightarrow{i} M \times \mathbf{C}^n \xrightarrow{ev} V \to 0. \tag{2.2}$$

を得る；$U := f^*S$, $V := f^*Q$ である。**ベクトル束の第２基本形式**を H とする [4]：$H = ev \circ d \circ i$、ここで、d は $\mathbf{C}^n$ に値を持つ関数の外微分作用素である。H はベクトル束 $\mathrm{Hom}(U,V)$ に値を持つ $(1,0)$ 形式となる。このとき、ベクトル束に対する Gauss-Codazzi 方程式から

$$R^V = HH^*$$

が成り立つ。ここで、H^* は H の随伴作用素である。したがって、(V,h) は半正となる。

次に**誘導写像**を定義する。$V \to M$ を正則ベクトル束とし、W をその正則切断のなすベクトル空間であるとする。このとき**評価写像**といわれる束写像が定義される:

$$ev : M \times W \to V, \quad ev(x,t) = t(x) \in V_x,$$

評価写像 ev が全射であると仮定する。各 $x \in M$ に対して、$ev_x : W \to V_x$ という線形写像を考えれば、正則写像 $f : M \to Gr_p(W)$ が以下のように定義される（$p = \dim W - \mathrm{rank}\, V$）：

$$f(x) = \mathrm{Ker}\, ev_x \subset W.$$

f を $(V \to M, W)$ もしくは (V,W) による**誘導写像**という（[1] 参照）。$V \to M$ が正則直線束であり、f が埋め込みであるとき、誘導写像は小平埋め込みである。

3. Calabi の剛性定理の一般化

この節では、次の Calabi の結果を一般化を紹介する。

定理 3.1. [2](Calabi) $f : (M,\omega) \to (\mathbf{P}^n, \omega_0)$ が充満な正則等長はめ込みならば、次元 n は一意的であり、f は像同値を除いて一意的である。

一般の複素グラスマン多様体への正則等長はめ込みに対しては上の剛性定理は成立しない。そこで、別のアプローチが必要となる。ここで、定理 2.7 を利用すれば、上記の Calabi の剛性定理は次のように言い換えられることに注意する。

定理 3.2. (Calabi) (M,ω) をケーラー多様体、$(L,h) \to M$ をそのエルミート接続の曲率が $-\sqrt{-1}\omega$ となる（正の）直線束であるとする。

このとき、充満な正則写像 $f : M \to \mathbf{P}^n = Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ が (L,h) に対するゲージ条件を満たすならば、次元 n は一意的であり、f は像同値を除いて一意的である。

この定理は次のように一般化される [6]。

定理 3.3. (M,ω) をケーラー多様体、$(V,h) \to M$ を正のエルミート正則ベクトル束であるとする。

このとき、充満な正則写像 $f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ が (V,h) に対するゲージ条件を満たすならば、n は一意的であり、f は像同値を除いて一意的である。

系 3.4. (V,h) をケーラー多様体 M 上の半正のエルミート正則ベクトル束であるとする。また、正の直線束 $(L,h_L)\to M$ に対するゲージ条件を満たす複素射影空間への充満な正則写像 $\tilde{f}:M\to\mathbf{P}^N$ が存在すると仮定する。

このとき、充満な正則写像 $f:M\to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ が (V,h) に対するゲージ条件を満たすならば、n は一意的であり、f は像同値を除いて一意的である。

注意. 正則写像 $f:M\to(Gr_p(\mathbf{C}^n),\omega_n)$ に対して、ベクトル束の Gauss-Codazzi 方程式より、普遍商束の引き戻し束 (f^*Q,f^*h_Q) は半正となる。

4. 等質ベクトル束

G をコンパクト、単連結、かつ連結な半単純リー群とし、T をそのトーラス部分群とする。また、$C(T)$ を T の G における中心化群とする。V_0 を $C(T)$ のユニタリ表現としたとき、$V:=G\times_{C(T)}V_0$ は誘導計量 h を持つ等質ベクトル束となる。V_0 が既約表現であるとき、V は**既約等質束**であるといわれる。G は V に作用するが、エルミート接続 ∇ が G 作用で不変であるときに ∇ は**不変接続**であるといわれる。

$G\to G/C(T)$ を主束とみなしたとき、Killing 形式を利用して標準接続が定義される。標準接続から誘導される $V\to G/C(T)$ の共変微分作用素 ∇ も標準接続という。標準接続の曲率は $(1,1)$ 形式なので、V には正則ベクトル束の構造が誘導される。また、標準接続は不変接続である。次の小林昭七先生の定理を必要とする。

定理 4.1. [3] V が既約等質束であるとき、(V,h) はホロノミー既約な *Einstein-Hermite* ベクトル束となる。

次を示すことが出来る [7]。

補題 4.2. (V,h) が既約等質束であるとき、(V,h) 上の不変接続は標準接続に限る。

補題 4.3. (V,h) を既約等質束であるとする。このとき、次が成り立つ。

$$V\text{ が非自明な正則切断を持つ }\iff(V,h)\text{ が半正である}$$

任意の等質ベクトル束 (V,h) は C^∞ ベクトル束として、既約等質束の直和 $\oplus_i(V_i,h_i)$ として分解される。

ここでは、V の正則ベクトル束としての構造を正則ベクトル束 (V_i,h_i) の直和として固定する。したがって正則ベクトル束として、$V=\oplus_i(V_i,h_i)$ と分解される。

定義 4.4. (V_i,h_i) $(i=1,2)$ を不変計量 h_i を持つ等質ベクトル束とする。エルミート計量を保つ G-同変ベクトル束同型写像 $\phi:V_1\to V_2$ が存在するとき、$(V_1,h_1)\to M$ と $(V_2,h_2)\to M$ は**等質束として同型である**という。

以後 ϕ を **G-同変束同型**と言う。

5. 主定理

$\mathcal{R}_G$ を G のユニタリ表現全体を対象とし、同変同型写像を射とする圏とする。また、$\mathcal{H}_T$ を半正等質ベクトル束に対するゲージ条件をみたす充満な正則写像 $f:G/C(T)\to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を対象とする圏とする。ここで、$\mathcal{H}_T$ の射を定義するために、半正等質ベクトル束 $V=\oplus_i(V_i,h_i)\to G/C(T)$ を固定し、$f:G/C(T)\to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を V に対するゲージ条件を満たす正則写像とする。すると Calabi の剛性定理の一般化から、f は $(V,\mathbf{C}^n)$ による誘導写像とみなせる：

$$f(x)=\operatorname{Ker}ev_x,\quad ev:\mathbf{C}^n\to V.$$

さらに $\phi:V\to V$ を G-同変束同型としたとき、$ev\circ\phi$ は V に対するゲージ条件を満たす正則写像を誘導する。そこで、$\mathcal{H}_T$ の射として、G-同変束同型を採用する。次が主定理である [7]。

定理 5.1. G 内の任意のトーラス T に対して、$\mathcal{R}_G$ と $\mathcal{H}_T$ は圏として同型となる。

References

[1] R. Bott and L.W.Tu, "Differential forms in algebraic topology", Springer, New York (1995).

[2] E.Calabi, *Isometric Imbedding of Complex Manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1–23.

[3] S. Kobayashi, *Homogeneous vector bundles and stability,* Nagoya Math. J. **101** (1986), 37–54.

[4] S.Kobayashi, "Differential Geometry of Complex Vector Bundles", Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987).

[5] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmann manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **77**, (2025), 629-707. 10.2969/jmsj/90609060.

[6] Y.Nagatomo, *Holomorphic maps into Grassmann manifolds* (*Harmonic maps into Grassmann manifolds III*), Annals of Global analysis and Geometry **60** (2021), 33-63.

[7] Y.Nagatomo, *The categories of representations and holomorphic maps into Grassmannians*, to appear in Proc.Amer.Math.Soc.

[8] M.Takeuchi, *Homogeneous Kähler submanifolds in complex projective spaces*, Japan J. Math. **1** (1978), 171-219.

Department of Mathematics, MEIJI UNIVERSITY, Higashi-Mita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa 214-8571, JAPAN

Email address: yasunaga@meiji.ac.jp