Invariant measures on reductive real spherical homogeneous spaces

笹木 集夢　(東海大学理学部数学科)*

1. 導入

1.1. 半単純対称空間上の不変測度

連結実半単純リー群の半単純対称空間上の不変測度は(正の定数倍を除いて)一意に存在するが，この不変測度はカルタン分解に即したある積分公式によって特徴付けられる．まずはこれを [3, 19] を基に概説しよう．連結実半単純リー群 G の半単純対称空間 G/H に対して，G の対合 σ で $(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma$ を満たすものが存在する．ただし，$(G^\sigma)_0$ で G^σ の単位元を含む連結成分を表す．このとき，σ と可換な G のカルタン対合 θ を選ぶことができる．特に H は簡約リー群で $\theta(H) = H$ を満たす．G における θ の固定部分群 G^θ を K とすると，K は連結かつ G の極大コンパクト部分群になる．G のリー環を $\mathfrak{g}_0$ とし，θ に対応する $\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ で表す．特に，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0^\theta$ は K のリー環である．また，$\mathfrak{g}_0$ の σ による固有空間分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{q}_0$ で表す．特に，$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}_0^\sigma$ は H のリー環である．このとき，$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{q}_0$ の極大可換部分空間は $K \cap H$ の共役を除いて一意であり，これを G/H の**分裂カルタン部分環**とよぶ．いま，それを1つ選び $\mathfrak{a}_0$ とする．実半単純リー環 $\mathfrak{g}_0$ の $\mathfrak{a}_0$ に関する制限ルート系を Σ とし，正の制限ルート系 Σ^+ を1つ固定する．この Σ^+ に関する $\mathfrak{a}_0$ の Weyl の部屋を $\mathfrak{a}_0^+ = \{X \in \mathfrak{a}_0 : \lambda(X) > 0 \ (\forall \lambda \in \Sigma^+)\}$ とし，$\mathfrak{a}_0$ における $\mathfrak{a}_0^+$ の閉包を $\overline{\mathfrak{a}_0^+}$ で表す．このとき，次の半単純対称空間のカルタン分解が成り立つ．

事実 1.1 (cf. [2, 12])**.** $K\backslash G/H \simeq \overline{\mathfrak{a}_0^+}$. 特に $G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}_0^+})H$.

さて，σ と θ の可換性から $\sigma\theta$ は再び対合となる．制限ルート $\lambda \in \Sigma$ に対する制限ルート空間 $\mathfrak{g}_\lambda$ は $\sigma\theta$-不変であるから，$\mathfrak{g}_\lambda$ は $\mathfrak{g}_\lambda$ の (± 1)-固有空間 $\mathfrak{g}_\lambda^{\pm\sigma\theta}$ に分解される．そこで，$m_\pm(\lambda) := \dim \mathfrak{g}_\lambda^{\pm\sigma\theta}$ とし $(m_+(\lambda), m_-(\lambda))$ を λ の符号とよぶ．以上の準備の下で，G/H 上の不変測度 dg_H は次の積分公式を満たす：

事実 1.2 (cf. [3, Thm. 5.8 in Chap. I], [19, Thm. 8.1.1])**.** $\mathfrak{a}_0$ 上の実関数 δ を

$$\delta(Y) := \prod_{\lambda \in \Sigma^+} |\sinh \lambda(Y)|^{m_+(\lambda)} |\cosh \lambda(Y)|^{m_-(\lambda)} \quad (Y \in \mathfrak{a}_0) \tag{1.1}$$

で定める．コンパクト群 K 上の(正規化された) Haar 測度を dk，可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ 上の Lebesgue 測度を dY とする．このとき，ある正の定数 C を用いて，等式

$$\int_{G/H} f(gH)\, dg_H = C \int_K \int_{\mathfrak{a}_0^+} f(k(\exp Y)H)\, \delta(Y)\, dY dk \tag{1.2}$$

が $f \in C_c(G/H)$ に対して成り立つ．

研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2025」(2025 年 12 月 9 日–10 日，東京理科大学神楽坂キャンパス森戸記念館第 1 フォーラム（B1 階），世話人：小池直之氏，田中真紀子氏，馬場蔵人氏) における記録集.
本研究は JSPS 科研費 JP19K03453，JP23K03037 の助成を受けたものです.
* 〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1.
e-mail: atsumu@tokai.ac.jp（ドメインが変更されました）

事実 1.2 にあるように，半単純対称空間上の不変測度を特徴づける積分公式 (1.2) はカルタン分解 (事実 1.1) に立脚している．この視点に立つと，一般の簡約等質空間上の不変測度を (1.2) のような積分公式によって特徴付けるという研究は，事実 1.1 に類する群の分解定理が未開拓であるが故に困難であると考えられる (cf. [7])．

そのような中，小林俊行は表現論における重複度の研究の観点から簡約等質空間 G/H として半単純対称空間を含む広いクラスで実球等質空間に対する研究が重要であることを提唱し，$G = K(\exp \mathfrak{b}_0)H$ を満たす $\mathfrak{p}_0$ の可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ が存在すると予想した ([6, 予想 3.5])．実際に，筆者は複素多様体における可視的作用の理論と重複のない表現 ([8]) という視点から簡約複素球等質空間の個々の例に対して可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ を具体的に構成した (cf. [13]–[15], [16])．また，田中雄一郎は [20] で上記の分解を満たす可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ の存在を証明した．

一方で，対称空間とは異なり非対称な簡約実球等質空間の幾何構造，あるいはリー群の組 (G, H) としての構造に関して，個々に固有のものが備わっていると考えられ，個々に解析する必要性が未だに生じている．

以上を背景として，本稿では非対称な簡約型実球等質空間に対してカルタン分解を具体的に与える方法および不変測度を特徴付ける積分公式を明示的に与えることについて解説する．

2. 準備

2.1. 簡約実球等質空間

本稿では，連結な非コンパクト実半単純リー群 G とその簡約な閉部分群 H を扱う．簡約等質空間 G/H が**実球 (real spherical)** であるとは，G の極小放物型部分群の G/H への作用が開軌道をもつときをいう．半単純対称空間は簡約実球等質空間である．また，G, H ともに複素リー群のとき，上の条件を満たす G/H は複素球と呼ばれる．簡約実球等質空間の分類は，Krämer [11], Brion [1] が複素球等質空間に対して，また小林–松木 [10] は半単純対称対 (G, H) で $(G \times H)/\operatorname{diag}(H)$ が実球等質空間となるものに対して，Knop–Krötz–Pecher–Schlichtkrull [4, 5] で実半単純リー群の簡約型実球等質空間に対してそれぞれ与えた．

2.2. 主結果

以下，G/H は簡約実球等質空間とする．H は簡約であるから $\theta(H) = H$ を満たすカルタン対合 θ が存在する．この θ を固定し $K = G^\theta$ とする．また，G のリー環を $\mathfrak{g}_0$ とし，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を θ によるカルタン分解とする．特に，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0^\theta$ は K のリー環である．

定理 2.1. 簡約型実球等質空間 G/H に対して，$G = K(\exp \mathfrak{b}_0)H$ を満たす $\mathfrak{p}_0$ の可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ を明示的に与えることができる．

本稿では，簡約実球等質空間 G/H に対して分解 $G = K(\exp \mathfrak{b}_0)H$ を G/H のカルタン分解とよぶ．

次に，G, H がともに簡約リー群より，簡約等質空間 G/H 上に不変測度が (正の定数倍を除いて) 一意に存在する．いま，dg_H で G/H 上の不変測度とする．定理 2.1 のカルタン分解の下で，dk を K 上の (正規化された) Haar 測度，dY を可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ 上の Lebesgue 測度とする．

定理 2.2 ([18]). $\mathfrak{b}_0$ の開集合 $\mathfrak{b}_0^+$ と $\mathfrak{b}_0$ 上の実関数 δ で

$$\int_{G/H} f(gH)\,dg_H = C\int_K\int_{\mathfrak{b}_0^+} f(k(\exp Y)H)\,\delta(Y)\,dY\,dk \tag{2.1}$$

を満たすものをそれぞれ具体的に与えることができる．ただし，C は正の定数である．

2.3. 方針

簡約実球等質空間 G/H を以下の 2 つに分けて議論する：

[1] **階数 1 型簡約実球等質空間**．対応するリー環の組 $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ が次のいずれかと同型のときに G/H は**階数 1 型**であるという：

$$(\mathfrak{so}(7,\mathbb{C}),\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})),(\mathfrak{g}_2(\mathbb{C}),\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})),(\mathfrak{so}(3,4),\mathfrak{g}_{2(2)}),(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})),(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{su}(1,2)). \tag{2.2}$$

ただし，$\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$ は例外 G_2 型の複素単純リー環で $\mathfrak{g}_{2(2)}$ はその非コンパクト実型を表す．

[2] **対称空間でも階数 1 型でもない非対称な簡約実球等質空間**．この場合，本稿では**一般型**と呼ぶことにする．このとき，分類 [4, 5] から次の事実が分かる [1]．

事実 2.3. 一般型の簡約実球等質空間 G/H に対して，G の閉部分群 L で，$H\subset L$ かつ G/L が対称空間となるものが存在する．

3. 階数 1 型の簡約実球等質空間上の不変測度

本章では，G/H を階数 1 型の簡約実球等質空間とする．対応するリー環の組 $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ が (2.2) と同型であることから，(2.2) の 5 種類について各々考察すればよい．ここでは，論文 [17] の結果を紹介する．

リー環 $\mathfrak{g}_0$ における $\mathfrak{h}_0$ の (キリング形式 B に関する) 直交補空間を $\mathfrak{q}_0$ とする．このとき，H の極大コンパクト部分群 $K_H:=K\cap H$ は $\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{q}_0$ に作用するが，この作用は余等質性 1 作用である．このことから，0 でない元 $E\in\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{q}_0$ に対して $\mathfrak{b}_0:=\mathbb{R}E$ とすると $\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{q}_0=K_H\cdot\mathfrak{b}_0$ が成り立つ．特に，$\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{q}_0$ における 1 次元可換部分空間は K_H による共役を除いて一意である．また，$\mathfrak{b}_0^+=\mathbb{R}_+E$ は $\mathfrak{b}_0$ の開集合で閉包 $\overline{\mathfrak{b}_0^+}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}E$ に等しく，$K_H\backslash(\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{q}_0)\simeq\overline{\mathfrak{b}_0^+}$ が成り立つ．これを用いて次が成り立つ：

定理 3.1 ([17, Thm. 1.1]). 階数 1 型の簡約実球等質空間 G/H に対して，$\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{q}_0$ の 1 次元可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ を 1 つ選ぶと $K\backslash G/H\simeq\overline{\mathfrak{b}_0^+}$．特に，$G=K(\exp\overline{\mathfrak{b}_0^+})H$ である．

以下，$\mathfrak{b}_0=\mathbb{R}E$ を 1 つ固定する．$\mathfrak{b}_0$ の双対空間 $\mathfrak{b}_0^*$ の 0 でない元 $\lambda\in\mathfrak{b}_0^*$ が $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ の ($\mathfrak{b}_0$ に関する) **制限ルート**であるとは，0 でない元 $X\in\mathfrak{g}_0$ で $[E,X]=\lambda(E)X$ を満たすときをいう．$(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ の制限ルート全体の集合を Σ とする．

定理 3.2 ([17, Thm. 1.2]). 各階数 1 型の簡約実球等質空間 G/H に対して，Σ は表 3.1 で与えられる．

注意 3.3. 表 3.1 から，階数 1 型の簡約実球等質空間 G/H で $\mathfrak{g}_0$ が例外型のとき，制限ルートの集合 Σ はルート系の公理を満たさないことが分かる．

定理 3.4 ([17, Thm. 1.3]). 各階数 1 型の簡約実球等質空間 G/H に対して，積分公式 (2.1) を満たす $\mathfrak{b}_0$ 上の実数値関数 δ は表 3.1 で与えられる．また，$\mathfrak{b}_0^+=\mathbb{R}_+E$ である．

[1] 事実 2.3 は [20, Prop. 3] で指摘されている．

$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$	Σ	$\delta(Y)$
$(\mathfrak{so}(7,\mathbb{C}), \mathfrak{g}_2(\mathbb{C}))$	$\{\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon\}$	$\lvert\sinh 3\varepsilon(Y)\rvert^6$
$(\mathfrak{g}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$	$\{\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \pm 3\varepsilon\}$	$\lvert\sinh 4\varepsilon(Y)\rvert^5$
$(\mathfrak{so}(3,4), \mathfrak{g}_{2(2)})$	$\{\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon\}$	$\lvert\sinh 3\varepsilon(Y)\rvert^3$
$(\mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}))$	$\{\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \pm 3\varepsilon\}$	$\lvert\sinh 4\varepsilon(Y)\rvert^2 \lvert\cosh 2\varepsilon(Y)\rvert$
$(\mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{su}(1,2))$	$\{\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \pm 3\varepsilon\}$	$\lvert\sinh 4\varepsilon(Y)\rvert^2 \lvert\sinh 2\varepsilon(Y)\rvert$

表 3.1: 階数 1 型の簡約実球等質空間の制限ルートの集合と不変測度

4. 一般の簡約実球等質空間上の不変測度

本章では，G/H は一般の (対称空間でも階数 1 型でもない) 簡約実球等質空間に対して定理 2.2 を満たす可換部分空間 $\mathfrak{b}_0$ および $\mathfrak{b}_0$ 上の実関数 δ の構成について概説する．

4.1. 概略

事実 2.3 により，G の閉部分群 L で $H \subset L$ かつ G/L が対称空間となるものを選ぶ．まずは対称空間 G/L に対して第 1 章で説明したように G/L のカルタン分解および積分公式 (1.2) を得る．実際に，半単純対称空間 G/L に対する分裂カルタン部分環 $\mathfrak{a}_0$ を選ぶと，事実 1.1 により $K\backslash G/L \simeq \overline{\mathfrak{a}_0^+}$ となる．また，$\mathfrak{a}_0$ 上の実関数 δ_1 を (1.1) の右辺で定義すると，事実 1.2 により半単純対称空間 G/L 上の不変測度 dg_L は正の定数 C_1 を用いて

$$\int_{G/L} f(gL)\, dg_L = C_1 \int_K \int_{\mathfrak{a}_0^+} f(k(\exp Y_1)L)\, \delta_1(Y_1)\, dY_1 dk \tag{4.1}$$

が $f \in C_c(G/L)$ に対して成り立つ．ただし，dY_1 は $\mathfrak{a}_0$ 上の Lebesgue 測度である．

ここで，L における $\mathfrak{a}_0$ の中心化群 $Z_L(\mathfrak{a}_0)$ の単位元を含む連結成分を M とし，$M_H := M \cap H$ とする．このとき，M および M_H は θ-不変な簡約リー群で $K_M := K \cap M$ は M の極大コンパクト部分群となる．

事実 4.1 (cf. [5, Prop. 3.4])．(1) 包含写像 $M \hookrightarrow L$ は同型 $M/M_H \simeq L/H$ を導く．

(2) M/M_H は簡約実球等質空間である．

ゆえに，次の 2 つの両側剰余空間の間の全単射を得る：

$$K_M\backslash M/M_H \simeq K_M\backslash L/H, \quad K_M m M_H \mapsto K_M m H. \tag{4.2}$$

以下，G のカルタン対合 θ の M への制限も同じ記号で表す．ここで，$\mathfrak{m}_0$ を M のリー環とすると，$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{m}_0$ のカルタン対合 θ に対応するカルタン分解である．

次の補題は，G/H のカルタン分解を与える上で重要である．

補題 4.2. $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{m}_0$ の可換部分空間 $\mathfrak{a}_0'$ で $M = K_M(\exp \mathfrak{a}_0')M_H$ を満たすとする．このとき，$G = K \exp(\overline{\mathfrak{a}_0^+} + \mathfrak{a}_0')H$ が成り立つ．また，$\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_0'$ は $\mathfrak{p}_0$ の可換部分空間である．

Sketch of Proof. 両側剰余空間の全単射対応 (4.2) により，L の分解 $L = K_M(\exp \mathfrak{a}_0')H$ を得る．よって，$K_M = Z_{K\cap L}(\mathfrak{a}_0)$ であるから [2]

$$G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}_0^+})L = K(\exp \overline{\mathfrak{a}_0^+})(K_M(\exp \mathfrak{a}_0')H) = KK_M(\exp \overline{\mathfrak{a}_0^+})(\exp \mathfrak{a}_0')H.$$

[2] この手法は編み上げの手法とよび，小林俊行によって [9] で提唱された．

$K_M \subset K$ より $KK_M = K$ である．また，$\mathfrak{a}'_0 \subset \mathfrak{m}_0$ であるから $[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}'_0] = \{0\}$ である．よって，$(\exp \overline{\mathfrak{a}_0^+})(\exp \mathfrak{a}'_0) = \exp(\overline{\mathfrak{a}_0^+} + \mathfrak{a}'_0)$ が成り立つ．以上より，主張が示された． □

次に，G/H 上の不変測度を特徴づける積分公式 (2.1) を満たす実関数 δ の構成法を考察しよう．簡約実球等質空間 M/M_H 上の不変測度も (正の定数倍を除いて) 一意に存在し，それを dm_{M_H} とする．また，$d\ell$ をコンパクトリー群 K_M 上の (正規化された) Haar 測度とし，dY_2 を可換部分空間 $\mathfrak{a}'_0$ 上の Lebesgue 測度とする．

定理 4.3 ([18])．補題 4.2 の設定において，$\mathfrak{a}'_0$ 上の実関数 δ_2 と $\mathfrak{a}'_0$ の開集合 $(\mathfrak{a}'_0)^+$ および正の定数 C' を用いて，M/M_H 上の不変測度 dm_{M_H} に関する積分公式

$$\int_{M/M_H} f(mM_H)\, dm_{M_H} = C' \int_{K_M} \int_{(\mathfrak{a}'_0)^+} f(\ell(\exp Y_2)M_H)\, \delta_2(Y_2)\, dY_2 d\ell$$

が $f \in C_c(M/M_H)$ に対して成り立つとする．このとき，ある正の定数 C'' を用いて等式

$$\int_{G/H} f(gH)\, dg_H = C'' \int_K \int_{\mathfrak{a}_0^+ + (\mathfrak{a}'_0)^+} f(k \exp(Y_1 + Y_2)H)\, \delta_1(Y_1)\delta_2(Y_2)\, dY_2 dY_1 dk$$

が $f \in C_c(G/H)$ に対して成り立つ．なお，$\mathfrak{a}_0$ 上の実関数 δ は (4.1) を満たすものである．

事実 4.1 により M/M_H は簡約実球等質空間である．もし M/M_H が対称空間もしくは階数 1 型ならば，定理 4.3 の仮定を満たす $\mathfrak{a}'_0$ およびその上の実関数 δ_2 は上述の結果より求まる．M/M_H が一般型のときは，改めて $(G', H') = (M, M_H)$ とおいて G'/H' に対して本節の最初の議論を展開する．$\dim G'/H' \leq \dim G/H$ により，この操作を有限回繰り返すことで等式 (2.1) を満たす δ を構成することができる．

参考文献

[1] M. Brion, Classification des espaces homogènes sphériques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 813–815.

[2] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Functional Analysis* **30** (1978), 106–146.

[3] S. Helgason, *Groups and geometric analysis, Integral Geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, Math. Survey Monogr., 83, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, xxii+667 pp.

[4] F. Knop, B. Krötz, T. Pecher and H. Schlichtkrull, Classification of reductive real spherical pairs I. The simple case, *Transform. Groups* **24** (2019), 67–114.

[5] F. Knop, B. Krötz, T. Pecher and H. Schlichtkrull, Classification of reductive real spherical pairs II. The semisimple case, *Transform. Groups* **24** (2019), 467–510.

[6] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, in Proceedings of the 3rd Summer School on Number theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" (ed. F. Sato) in Nagano, 1995, 22-41 (in Japanese).

[7] T. Kobayashi, Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type, *J. Reine Angew. Math.* **490** (1997), 37–53.

[8] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **41** (2025), 497–549.

[9] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.

[10] T. Kobayashi and T. Matsuki, Classification of finite-multiplicity symmetric pairs, *Transform. Groups* **19** (2014), 457–493, Special Issue in honour of Professor Dynkin for his 90th birthday.

[11] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Composito Math.* **38** (1979), 129–153.

[12] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, *Canad. J. Math.* **31** (1979), 157–180.

[13] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158.

[14] A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1)SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$, *J. Math. Sci., the Univ. Tokyo* **17** (2010), 201–215.

[15] A. Sasaki, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci.* **91** (2015), 70–75.

[16] 笹木集夢, 無重複表現と可視的作用, 日本数学会‘数学’**74**, 第3号 (2022), 225–252.

[17] A. Sasaki, Invariant measures on non-symmetric reductive real spherical homogeneous spaces of rank-one type, *Symmetry in Geometry and Analysis, Vol. 1, Festscrhift for Toshiyuki Kobayashi*, 497–531, Progr. Math. **357**, Birkhäuser/Springer, Singapore, 2025.

[18] A. Sasaki, Invariant measures on non-symmetric reductive real spherical homogeneous spaces of higher-rank type, *preprint*.

[19] H. Schlichtkrull, Hyperfunctions and harmonic analysis on symmetric spaces, Progr. Math. **49**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984.

[20] Y. Tanaka, A Cartan decomposition for a reductive real spherical homogeneous spaces, *Kyoto J. Math.* **62** (2022), 95–102.