Pin^c群および関連するコンパクトLie群の極地

田崎博之
(東京都立大学、筑波大学)

連結コンパクトLie群の極大トーラスと非連結コンパクトLie群の類似物を利用して得られた、Pin^c群および関連するコンパクトLie群の極地に関する結果を示す。これにより、すべての有向実Grassmann多様体がPin^c群の極地として現れることがわかる。また、Ss^c群の極地と直交複素構造全体の2つの連結成分との関連性も明らかにする。この講演の内容は[9]と[10]に基づいている。

1 導入

極地はChen-Nagano [2]や[3]で導入された概念である。**極地**とは、対称空間Mの各点xにおける点対称s_xの固定点集合$F(s_x, M) = \{y \in M \mid s_x(y) = y\}$の連結成分である。極地が一点からなるとき、**極**と呼ぶ。極地は全測地的部分多様体になり、特に対称空間になる。Chen-Naganoは極地を利用してコンパクト対称空間の幾何学的理論を発展させた。Nagano [5]は$\mathbb{R}^n$内の$4k$次元有向部分空間のなす有向実Grassmann多様体$\tilde{G}_{4k}(\mathbb{R}^n)$を$Spin$群内に極地として実現した。この講演ではすべての有向実Grassmann多様体がPin^c群内の極地として実現できることを示す。さらに、関連するLie群の極地も具体的に記述する。これらの記述はPin^c群に関連したコンパクトLie群の極大対蹠部分群の分類やそれらの極地の極大対蹠集合の分類に役立つことが期待できる。対蹠集合はChen-Nagano [4]が導入した概念である。

一般に集合Xの変換$f : X \to X$の固定点集合を$F(f, X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$で表すことにする。

2 連結コンパクトLie群の標準形

リー群を表すアルファベットに対応するドイツ小文字でそのリー群のリー代数を表すことにする。$U(1)$のいくつかの積と同型になるLie群を**トーラス**と呼ぶ。連結コンパクトLie群内で包含関係に関して極大なトーラスを**極大トーラス**と呼ぶ。

定理 2.1. G を連結コンパクト Lie 群，T を G の極大トーラスとすると、次の等式が成り立つ。

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}, \quad \mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}.$$

T と T' がともに G の極大トーラスならば、T と T' は共役になる。

この定理の主張は G の元の共役作用に関する標準形は T の元であることを意味している。

定理 2.1 の応用例を 1 つ挙げておく。回転群 $SO(2n)$ の極大トーラスを記述するために、

$$r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

によって $r(\theta) \in SO(2)$ を定める。

$$J_1 = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} r(\theta) = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

とおいておく。$x_1, \ldots, x_m$ が数や正方行列のときに

$$\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_m \end{bmatrix}$$

と書くことにする。$SO(2n)$ において

$$R_n = \{\mathrm{diag}(r(\theta_1), \ldots, r(\theta_n)) \mid \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}\}$$

は極大トーラスになる。m 次単位行列を 1_m で表す。$\mathbb{R}^{2n}$ の直交複素構造の全体

$$\mathrm{OIII}(n) = \{g \in O(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$$

は $SO(2n)$ に含まれることがわかる。$r \in R_n$ と $g \in SO(2n)$ に対して、$(grg^{-1})^2 = -1_{2n}$ は $r^2 = -1_{2n}$ と同値になるので、定理 2.1 より

$$\mathrm{OIII}(n) = \bigcup_{g \in SO(2n)} g\{r \in R_n \mid r^2 = -1_{2n}\}g^{-1}$$

を得る。$r(\theta)^2 = -1_2$ は $r(\theta) = \pm J_1$ と同値になり、

$$\{r \in R_n \mid r^2 = -1_{2n}\} = \{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}.$$

したがって、

$$\mathrm{OIII}(n) = \bigcup_{g \in SO(n)} g\{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}g^{-1}.$$

が成り立つ。$\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ に対して

$$\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)\mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \epsilon_2 J_1)\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)^{-1} = \mathrm{diag}(-\epsilon_1 J_1, -\epsilon_2 J_1)$$

が成り立つので、$\{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}$ の中で $-J_1$ の個数の偶奇が一致するもの同士は $SO(2n)$ の共役作用で写り合う。そこで、$J_n = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1) \in \mathrm{OIII}(n)$ とおいて、J_n の共役類を

$$\mathrm{DIII(n)} = \{gJ_n g^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$$

で表すと、$-J_1$ が 0 個の J_n と $-J_1$ が 1 個の $J'_n = \mathrm{diag}(-J_1, J_1, \ldots, J_1)$ によって、

$$\mathrm{OIII}(n) = \mathrm{DIII}(n) \cup \{gJ'_n g^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$$

と $\mathrm{OIII}(n)$ を 2 つの連結成分の和集合に分解できる。これは、交代行列の不変式 Pfaffian の値によって、これら 2 つの連結成分を識別できる ([7]) ことからわかる。

3　非連結コンパクト Lie 群の標準形

この節では連結コンパクト Lie 群の類似物を非連結コンパクト Lie 群に対して導入する。群 G の元 x に対してその共役作用を $I_x(g) = xgx^{-1}$ $(g \in G)$ によって定める。

定理 3.1. G コンパクト Lie 群とし、

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

を G の連結成分への分解とする。ただし、$0 \in \Lambda$ であり、G_0 は G の単位連結成分である。各 $\lambda \in \Lambda$ について、$x_\lambda \in G_\lambda$ をとり T_λ は $F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の極大トーラスとする。このとき、次の等式が成り立つ。

$$G_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} g(T_\lambda x_\lambda)g^{-1}.$$

これは [8] の Lemma 3.1 の証明と同様の議論からわかる。この定理の主張は G_λ の元の共役作用に関する標準形は $T_\lambda x_\lambda$ の元であることを意味している。

定理 3.1 の設定のもとで

$$F(s_e, G) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{x \in G_\lambda \mid x^{-1} = x\}$$

となり

$$\{x \in G_\lambda \mid x^{-1} = x\} = \bigcup_{g \in G_0} g\{t_\lambda x_\lambda \mid t_\lambda \in T_\lambda, (t_\lambda x_\lambda)^2 = e\}g^{-1}$$

が成り立つ。この記述は G の極地を記述するときに役立つ。

$0 \leq k \leq n$ に対して $x_k = \mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1) \in O(n)$ とおく。ただし、-1 は k 個である。

$$\begin{aligned} Q_k(n) &= \{g x_k g^{-1} \mid g \in O(n)\} \\ &= \{g \in O(n) \mid g \text{ の固有値とその重複度}: (-1, k), (1, n-k)\}. \end{aligned}$$

$g \in Q_k(n)$ にその (-1) 固有空間を対応させると、$Q_k(n)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元部分空間全体の成す実 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ に微分同型であることがわかる。

定理 3.1 または行列の計算から次の定理を得る。

定理 3.2. $O(n)$ の極地は以下の通り。

$$F(s_{1_n}, O(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} Q_k(n).$$

4 O^c 群の極地

この節では $O^c(n) = U(1)O(n) \subset U(n)$ の極地を具体的に記述する。$O(n)$ は 2 つの連結成分を持つ。: $O(n) = SO(n) \cup SO(n)x_1$. $SO^c(n) = U(1)SO(n)$ は $O^c(n)$ の連結 Lie 部分群である。

$$O^c(n) = \begin{cases} SO^c(n) \cup SO^c(n)x_1 & (n: \text{偶数}), \\ SO^c(n) & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ。

OIII(n) の任意の元は交代行列である。よって、OIII(n) の元の Pfaffian Pf を考えることができる。

$$\begin{aligned} R^+(n) &= \{g \in \mathrm{OIII}(n) \mid \mathrm{Pf}(g) = 1\}, \\ R^-(n) &= \{g \in \mathrm{OIII}(n) \mid \mathrm{Pf}(g) = -1\} = x_1 R^+(n) x_1^{-1}. \end{aligned}$$

$O^c(n)$ の極地を記述するために定理 3.1 を $O^c(n)$ に適用し、次の定理を得る。

定理 4.1. $O^c(n)$ の極地は以下の通り。

$$F(s_{1_n}, O^c(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} Q_k(n) \cup \sqrt{-1}(R^+(n) \cup R^-(n)).$$

ただし、$\sqrt{-1}(R^+(n) \cup R^-(n))$ は n が偶数のときのみ現れる。特に、$Q_0(n)$ と $Q_n(n)$ は $O^c(n)$ の極である。

証明の概略　$O(n)$ と $O^c(n)$ の極大トーラスを記述するために $SO(2)$ のある 1 径数部分を定める。$l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とおく。2 節で定めた $r(\theta)$ を使って $SO(n)$ の極大トーラス T と $SO^c(n)$ の極大トーラス T^c を次のように定める。

$$T = \{\mathrm{diag}(r(\theta_1), \ldots, r(\theta_l), (1)) \mid \theta_1, \ldots, \theta_l \in \mathbb{R}\}, \quad T^c = U(1)T.$$

ここで、(1) は n が奇数のときのみ現れる。

$SO^c(n)$ 内の極地を明らかにするためにまず $\{t \in T^c \mid t^2 = 1_n\}$ を明らかにする。行列の計算により、n が奇数のときは

$$\{t \in T^c \mid t^2 = 1_n\} = \{\mathrm{diag}(\pm 1_2, \ldots, \pm 1_2, \pm 1)\}$$

である。$\mathrm{diag}(\pm 1_2, \ldots, \pm 1_2, \pm 1)$ の共役軌道として $Q_k(n)$ を得る。ここで、k は -1 の個数である。

n が偶数のときは

$$\{t \in T^c \mid t^2 = 1_n\} = \{\mathrm{diag}(\pm 1_2, \ldots, \pm 1_2)\} \cup \sqrt{-1}\{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}$$

である。ただし、J_1 は2節で定めた J_1 である。$\mathrm{diag}(\pm 1_2, \ldots, \pm 1_2)$ の共役軌道として $Q_{2k}(n)$ を得る。ここで、$2k$ は -1 の個数である。$\sqrt{-1}\{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}$ の共役軌道として $\sqrt{-1}(R^+(n) \cup R^-(n))$ を得る。

次に $SO^c(n)x_1$ 内の極地を明らかにする。これは n が偶数の場合を考えれば十分である。

$$S = \{\mathrm{diag}(1_2, r(\theta_1), \ldots, r(\theta_{l-1})) \mid \theta_1, \ldots, \theta_{l-1} \in \mathbb{R}\}, \quad S^c = U(1)S$$

によって $F(I_{x_1}, SO(n))$ の極大トーラス S と $F(I_{x_1}, SO^c(n))$ の極大トーラス S^c を定める。$\{x \in S^c x_1 \mid x^2 = 1_n\}$ を明らかにする。

$$\{x \in S^c x_1 \mid x^2 = 1_n\} = \{\mathrm{diag}(\pm I_1, \pm 1_2, \ldots, \pm 1_2)\}$$

が成り立つことがわかる。ただし、

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。$\mathrm{diag}(\pm I_1, \pm 1_2, \ldots, \pm 1_2)$ の共役軌道として $Q_{2k+1}(n)$ を得る。ここで、$2k+1$ は -1 の個数である。

定理 4.1 の結果より、$SO^c(n), O(n), SO(n)$ の極地を得る。n が奇数の場合は $SO^c(n) = O^c(n)$ なので、$SO^c(2n), O(n), SO(n)$ の極地を記述すれば十分である。

系 4.2.

$$F(s_{1_{2n}}, SO^c(2n)) = \bigcup_{0 \le 2k \le 2n} Q_{2k}(2n) \cup \sqrt{-1}(R^+(2n) \cup R^-(2n)),$$
$$F(s_{1_n}, O(n)) = \bigcup_{0 \le k \le n} Q_k(n),$$
$$F(s_{1_n}, SO(n)) = \bigcup_{0 \le 2k \le n} Q_{2k}(n).$$

5 $O^c(n)/\{\pm 1_n\}$の極地

この節では$O^c(n)/\{\pm 1_n\}$ の極地を具体的に記述する。

定理 5.1. $\pi_n : O^c(n) \to O^c(n)/\{\pm 1_n\}$ を自然な射影とする。$O^c(n)/\{\pm 1_n\}$ の極地は以下の通り。:

$$\begin{aligned}
&F(s_{\pi_n(1_n)}, \pi_n(O^c(n))) \\
&= \bigcup_{0\le k\le n} \pi_n(Q_k(n)) \cup \bigcup_{0\le k\le n} \pi_n(\sqrt{-1}Q_k(n)) \\
&\quad \cup \pi_n(R^+(n)) \cup \pi_n(R^-(n)) \cup \pi_n(\sqrt{-1}R^+(n)) \cup \pi_n(\sqrt{-1}R^-(n))
\end{aligned}$$

ただし、$R^+(n), R^-(n)$ は n が偶数のときのみ現れる。

証明の概略

$$\begin{aligned}
&F(s_{\pi_n(1_n)}, \pi_n(O^c(n))) \\
&= \pi_n(\{g \in O(n) \mid g^2 = \pm 1_n\}) \cup \pi_n(\sqrt{-1}\{g \in O(n) \mid g^2 = \pm 1_n\})
\end{aligned}$$

となり、極大トーラスを利用した計算により、定理の主張を得る。

6 Clifford代数とPin群

この節では後で必要になる Clifford 代数と Pin 群の基本事項について復習しておく。詳しくは [1] をどうぞ。

$\mathbb{R}^n$ とその標準的内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる Clifford 代数を Cl_n で表す。$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的正規直交基底とする。Clifford 代数 Cl_n は $e_1, \ldots, e_n$ によって生成され、これらは関係式 $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$ を満たす。$\mathbb{R}^n$ は自然に Cl_n に埋め込まれる。$[n]$ は集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を表す。部分集合 $I \subset [n]$ に対して、$I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ の元を小さい順 $i_1 < \cdots < i_k$ に並べて、$e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_k} \in Cl_n$ と定める。ベクトル空間の同型写像 $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ;\ v \mapsto -v$ を Cl_n の代数同型写像に拡張でき、それも α で表す。α は対合的なので、$Cl_n^i = \{x \in Cl_n \mid \alpha(x) = (-1)^i x\}$ $(i = 0, 1)$ とおくと直和分解 $Cl_n = Cl_n^0 \oplus Cl_n^1$ を得る。

$$(v_1v_2 \cdots v_k)^t = v_k \cdots v_2v_1 \quad (v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n).$$

を満たす反同型写像 $Cl_n \to Cl_n\ ;\ x \mapsto x^t$ が存在する。さらに反同型写像を $\bar{x} = \alpha(x^t)$ $(x \in Cl_n)$ によって定め、$N : Cl_n \to Cl_n$ を $N(x) = x\bar{x}$ $(x \in Cl_n)$ によって定義する。$v \in \mathbb{R}^n$ に対して、$N(v) = \langle v, v\rangle$ が成り立つことがわかる。Cl_n の可逆元全体の成す群を $Cl_n^\times$ で表し、

$$\Gamma_n = \{x \in Cl_n^\times \mid \alpha(x)\mathbb{R}^n x^{-1} \subset \mathbb{R}^n\}$$

とおく。Γ_n の $\mathbb{R}^n$ への表現 ρ を

$$\rho(x)v = \alpha(x)vx^{-1} \quad (x \in \Gamma_n,\, v \in \mathbb{R}^n)$$

によって定める。すると、$\mathbb{R}^n - \{0\} \subset \Gamma_n$ と

$$\rho(v)w = w - \frac{2\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}v \quad (v \in \mathbb{R}^n - \{0\},\, w \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つことがわかる。これは $\rho(v)$ が $\mathbb{R}^n$ における v に関する鏡映であることを意味する。$v_1, \ldots, v_k$ が $\mathbb{R}^n$ 内の正規直交系ならば、$\rho(v_1 \cdots v_k) = -1_{\langle v_1 \cdots v_k\rangle} + 1_{\langle v_1 \cdots v_k\rangle^\perp}$ である。ただし、$\langle v_1 \cdots v_k\rangle$ は $v_1, \ldots, v_k$ が生成する $\mathbb{R}^n$ の部分空間であり、$\langle v_1 \cdots v_k\rangle^\perp$ はその直交補空間である。$0 < k < n$ に対して

$$P_k(n) = \{v_1 \cdots v_k \in \Gamma_n \mid v_i \in \mathbb{R}^n,\, \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}\ (i, j \in [k])\}$$

とおくと、$\rho(P_k(n)) = Q_k(n)$ が成り立ち、$\rho : P_k(n) \to Q_k(n)$ は二重被覆写像になる。$v_1 \cdots v_k \in P_k(n)$ に対して部分空間 $\langle v_1 \cdots v_k\rangle$ に $v_1, \ldots, v_k$ が定める向きを入れたものを対応させると、$P_k(n)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の有向 k 次元部分空間全体の成す有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ に微分同型である。さらに

$$P_0^+(n) = \{1\}, \quad P_0^-(n) = \{-1\}, \quad P_n^+(n) = \{e_{[n]}\}, \quad P_n^-(n) = \{-e_{[n]}\}$$

とおく。

$x \in \Gamma_n$ に対して $N(x) \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$ が成り立つ。$N : \Gamma_n \to \mathbb{R}^\times$ は準同型写像になり、Γ_n において $N \circ \alpha = N$ が成り立つ。N を使うと、$\rho(\Gamma_n) = O(n)$ がわかる。$Pin(n) = \ker N$ によって $Pin(n)$ を定義する。すると、完全系列

$$1 \to \{\pm 1\} \to Pin(n) \xrightarrow{\rho} O(n) \to 1$$

を得る。$Spin(n) = Pin(n) \cap Cl_n^0$ によって $Spin(n)$ を定める。

$$Pin(n) = Spin(n) \cup (Pin(n) \cap Cl_n^1)$$

は $Pin(n)$ の連結成分への分解になる。$\mathbb{R}^n$ の任意の単位ベクトル u に対して $Pin(n) \cap Cl_n^1 = Spin(n)u$ が成り立つ。$n \geq 2$ ならば、$\rho|_{Spin(n)}$ は $Spin(n)$ から $SO(n)$ への二重被覆準同型写像になる。$n \geq 3$ ならば、$\rho : Spin(n) \to SO(n)$ は普遍被覆準同型写像になる。$\{x \in Pin(n) \mid \rho(x) = -1_n\} = \{\pm e_{[n]}\}$ が成り立つ。

7 Pin^c 群の極地

この節では $Pin^c(n) = U(1)Pin(n) \subset Cl_n \otimes \mathbb{C}$ の極地を具体的に記述する。$Spin^c(n) = U(1)Spin(n)$ は $Pin^c(n)$ の部分群である。$Pin(n)$ の連結成分への分解は $Pin(n) = Spin(n) \cup Spin(n)e_n$ となる。これより、$Pin^c(n)$ の連結成分への分解は次のようになる。

$$Pin^c(n) = U(1)Spin(n) \cup U(1)Spin(n)e_n = Spin^c(n) \cup Spin^c(n)e_n.$$

$Pin^c(n)$ の極地を記述するために定理 3.1 を $Pin^c(n)$ に適用し、次の定理を得る。

定理 7.1. $Pin^c(n)$ の極地は以下の通り。

$$F(s_1, Pin^c(n)) = M_0^+(n) \cup M_0^-(n) \cup \bigcup_{0<k<n} M_k(n) \cup M_n^+(n) \cup M_n^-(n).$$

ここで $0 < k < n$、$\epsilon = \pm 1$ であり、

$$M_k(n) = \begin{cases} P_k(n) \subset Spin(n) & (k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}4)), \\ \sqrt{-1}P_k(n) \subset \sqrt{-1}Spin(n)e_n & (k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}4)), \\ \sqrt{-1}P_k(n) \subset \sqrt{-1}Spin(n) & (k \equiv 2 \ (\mathrm{mod}4)), \\ P_k(n) \subset Spin(n)e_n & (k \equiv 3 \ (\mathrm{mod}4)), \end{cases}$$

$$M_0^\epsilon(n) = P_0^\epsilon(n) \subset Spin(n),$$

$$M_n^\epsilon(n) = \begin{cases} P_n^\epsilon(n) \subset Spin(n) & (n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}4)), \\ \sqrt{-1}P_n^\epsilon(n) \subset \sqrt{-1}Spin(n)e_n & (n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}4)), \\ \sqrt{-1}P_n^\epsilon(n) \subset \sqrt{-1}Spin(n) & (n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}4)), \\ P_n^\epsilon(n) \subset Spin(n)e_n & (n \equiv 3 \ (\mathrm{mod}4)). \end{cases}$$

特に、$M_0^\epsilon(n)$ と $M_n^\epsilon(n)$ は $Pin^c(n)$ の極である。

証明の概略　$Spin(n)$ と $Spin^c(n)$ の極大トーラスを記述するために $Spin(n)$ のある 1 径数部分群を定める。相異なる $i, j \in [n]$ とパラメータ θ に対して

$$e_{i,j}(\theta) = \cos\theta + \sin\theta e_i e_j,$$

によって $e_{i,j}(\theta)$ を定める。これを使って $Spin(n)$ 内のトーラス T_l $(2l \leq n)$ と $Spin^c(n)$ 内のトーラス T_l^c $(2l \leq n)$ を次のように定める。

$$T_l = \{e_{1,2}(\theta_1) \cdots e_{2l-1,2l}(\theta_l) \mid \theta_1, \ldots, \theta_l \in \mathbb{R}\}, \quad T_l^c = U(1)T_l.$$

$T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ は $Spin(n)$ の極大トーラスになり、$T^c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ は $Spin^c(n)$ の極大トーラスになる。

$Spin^c(n)$ の極地を記述するためにまず $\{t \in T_l^c \mid t^2 = 1\}$ を明らかにする。

$$\{t \in T_l^c \mid t^2 = 1\} = \{t \in T_l \mid t^2 = 1\} \cup \sqrt{-1}\{t \in T_l \mid t^2 = -1\}$$

が成り立つことがわかる。Clifford 代数の計算により

$$\{t \in T_l \mid t^2 = 1\} = \{\pm e_{2i_1-1}e_{2i_1} \cdots e_{2i_{2k}-1}e_{2i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k} \leq l\},$$
$$\sqrt{-1}\{t \in T_l \mid t^2 = -1\} = \sqrt{-1}\{\pm e_{2i_1-1}e_{2i_1} \cdots e_{2i_{2k+1}-1}e_{2i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1} \leq l\}$$

を得る。これらの共役軌道として $P_{4k}(n)$ および $\sqrt{-1}P_{4k+2}(n)$ を得る。

定理3.1を$Pin^c(n)$に適用する。$Pin^c(n)$の単位連結成分は$Spin^c(n)$であり、$e_n \notin Spin^c(n)$である。$T^c_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}$は$F(I_{e_n}, Spin^c(n))$の極大トーラスになる。$Spin^c(n)e_n$内の極地を記述するために、$2l \leq n-1$に対して$\{x \in T^c_l e_n \mid x^2 = 1\}$を明らかにする。

$$\{x \in T^c_l e_n \mid x^2 = 1\} = \{t \in T_l \mid t^2 = -1\}e_n \cup \sqrt{-1}\{t \in T_l \mid t^2 = 1\}e_n$$

が成り立つことがわかる。e_nを除いた部分はすでにわかっているので、それを利用して

$$\begin{aligned}&\{x \in T^c_l e_n \mid x^2 = 1\}\\ =&\{\pm e_{2i_1-1}e_{2i_1}\cdots e_{2i_{2k+1}-1}e_{2i_{2k+1}}e_n \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1} \leq l\}\\ &\cup \sqrt{-1}\{\pm e_{2i_1-1}e_{2i_1}\cdots e_{2i_{2k}-1}e_{2i_{2k}}e_n \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k} \leq l\}\end{aligned}$$

を得る。これらの共役軌道として$P_{4k+3}(n)$および$\sqrt{-1}P_{2k+1}(n)$を得る。

定理7.1の結果と$Spin^c(n), Pin(n), Spin(n)$との共通部分をとることにより、これらの極地も得られる。$Spin(n)$の極地は[5]で得られていた。

系 7.2.

$$F(s_1, Spin^c(n)) = M_0^+(n) \cup M_0^-(n) \cup \bigcup_{\substack{0<k<n\\ k\equiv 0,2 \pmod 4}} M_k(n)\left(\cup M_n^+(n) \cup M_n^-(n)\right)$$

(( ) 内の極地は$n \equiv 0, 2 \pmod 4$のときのみ現れる),

$$F(s_1, Pin(n)) = M_0^+(n) \cup M_0^-(n) \cup \bigcup_{\substack{0<k<n\\ k\equiv 0,3 \pmod 4}} M_k(n)\left(\cup M_n^+(n) \cup M_n^-(n)\right)$$

(( ) 内の極地は$n \equiv 0, 3 \pmod 4$のときのみ現れる),

$$F(s_1, Spin(n)) = M_0^+(n) \cup M_0^-(n) \cup \bigcup_{\substack{0<k<n\\ k\equiv 0 \pmod 4}} M_k(n)\left(\cup M_n^+(n) \cup M_n^-(n)\right)$$

(( ) 内の極地は$n \equiv 0 \pmod 4$のときのみ現れる).

8 Ss^c群の極地

Cl_{4m}において$e_{[4m]}$はCl_{4m}の中心に含まれ、$e^2_{[4m]} = 1$が成り立つ。一般に群の元xが生成する部分群を$\langle x\rangle$で表す。$\langle e_{[4m]}\rangle$は$\mathbb{Z}_2$に同型になる。$Ss(4m) = Spin(4m)/\langle e_{[4m]}\rangle$によって$Ss(4m)$を定義する。$Spin^c(4m)$を使って$Ss^c(4m) = Spin^c(4m)/\langle e_{[4m]}\rangle$によって$Ss^c(4m)$を定める。自然な射影$\sigma : Spin(4m) \to Ss(4m)$は二重被覆準同型写像になり、その核は$\ker\sigma = \langle e_{[4m]}\rangle$となる。二重被覆準同型写像$\sigma^c : Spin^c(4m) \to Ss^c(4m)$も考えることができ、その核も$\ker\sigma^c = \langle e_{[4m]}\rangle$となる。

$P_{2m}(4m)$において$e_{[4m]}$の積による変換に対応する$\tilde{G}_{2m}(\mathbb{R}^{4m})$の変換は、$\tilde{G}_{2m}(\mathbb{R}^{4m})$の元に直交補空間に適切な向きを付けたものを対応させる変換になる。この変換による$\tilde{G}_{2m}(\mathbb{R}^{4m})$の商空間を$G^{\#}_{2m}(\mathbb{R}^{4m})$で表す。すると、$P_{2m}(4m))/\langle e_{[4m]}\rangle$は$G^{\#}_{2m}(\mathbb{R}^{4m})$に微分同型になる。

さらに $Ss^c(4m)$ の極地を記述するために次のように記号を定める。

$$\tilde{J}_{2m} = e_{1,2}\left(\frac{1}{4}\pi\right) e_{3,4}\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cdots e_{4m-1,4m}\left(\frac{1}{4}\pi\right),$$
$$\tilde{J}'_{2m} = e_{1,2}\left(\frac{3}{4}\pi\right) e_{3,4}\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cdots e_{4m-1,4m}\left(\frac{1}{4}\pi\right),$$
$$\tilde{R}^+(4m) = \{x\tilde{J}_{2m}x^{-1} \mid x \in Spin(4m)\},$$
$$\tilde{R}^-(4m) = \{x\tilde{J}'_{2m}x^{-1} \mid x \in Spin(4m)\}$$

定理 8.1. e で $Ss^c(4m)$ と $Ss(4m)$ の単位元を表す。$Ss^c(4m)$ と $Ss(4m)$ の極地は以下の通り。

$$\begin{aligned}
F(s_e, Ss^c(4m)) &= \sigma^c(P_0^+(4m)) \cup \sigma^c(P_0^-(4m)) \\
&\cup \bigcup_{1\le k\le (m+1)/2} \sigma^c(\sqrt{-1}P_{4k-2}(4m)) \cup \bigcup_{1\le k\le m/2} \sigma^c(P_{4k}(4m)) \\
&\cup \sigma^c(\tilde{R}^+(4m)) \cup \sigma^c(-\tilde{R}^+(4m)) \cup \sigma^c(\sqrt{-1}\tilde{R}^-(4m)), \\
F(s_e, Ss(4m)) &= \sigma^c(P_0^+(4m)) \cup \sigma^c(P_0^-(4m)) \\
&\cup \bigcup_{1\le k\le m/2} \sigma^c(P_{4k}(4m)) \\
&\cup \sigma^c(\tilde{R}^+(4m)) \cup \sigma^c(-\tilde{R}^+(4m)).
\end{aligned}$$

$\sigma^c(P_0^+(4m))$ と $\sigma^c(P_0^-(4m))$ は極であり、それ以外の極地は以下の通り。

$$\begin{aligned}
\sigma^c(\sqrt{-1}P_{4k-2}(4m)) &\cong \tilde{G}_{4k-2}(\mathbb{R}^{4m}) \quad (1 \le k < (m+1)/2), \\
\sigma^c(\sqrt{-1}P_{2m}(4m)) &\cong G^{\#}_{2m}(\mathbb{R}^{4m}) \quad (m\text{:奇数}), \\
\sigma^c(P_{4k}(4m)) &\cong \tilde{G}_{4k}(\mathbb{R}^{4m}) \quad (1 \le k < m/2), \\
\sigma^c(P_{2m}(4m)) &\cong G^{\#}_{2m}(\mathbb{R}^{4m}) \quad (m\text{:偶数}), \\
\sigma^c(\tilde{R}^+(4m)) &\cong \sigma^c(-\tilde{R}^+(4m)) \cong \mathrm{DIII}(2m)/\{\pm 1_{4m}\}, \\
\sigma^c(\sqrt{-1}\tilde{R}^-(4m)) &\cong \mathrm{DIII}(2m).
\end{aligned}$$

証明の概略 $Spin(4m)$ のトーラス T_l $(l \le 2m)$ と $Spin^c(4m)$ のトーラス T_l^c $(l \le 2m)$ を

$$T_l = \{e_{1,2}(\theta_1)\cdots e_{2l-1,2l}(\theta_l) \mid \theta_1, \ldots, \theta_l \in \mathbb{R}\}, \quad T_l^c = U(1)T_l$$

によって定める。T_{2m} は $Spin(4m)$ の極大トーラスになり、T_{2m}^c は $Spin^c(4m)$ の極大トーラスになる。これらの像 $\sigma(T_{2m})$ と $\sigma^c(T_{2m}^c)$ はそれぞれ $Ss(4m)$ と $Ss^c(4m)$ の極大トーラスになる。.

$Ss(4m)$ のすべての極地を得るために $\{\sigma(\xi) \mid \xi \in T_{2m},\, \sigma(\xi)^2 = \sigma(1)\}$ を決定する。.$\xi \in T_{2m}$ をとる。$\ker\sigma = \langle e_{[4m]}\rangle$ なので、条件 $\sigma(\xi)^2 = \sigma(1)$ は $\xi^2 = 1$ または $e_{[4m]}$ と同値である。そこで、$\xi^2 = 1$ の場合と $\xi^2 = e_{[4m]}$ の場合に分けて考える。

(1) $\xi^2 = 1$ の場合。このような ξ は第 7 節で明らかにしている。系 7.2 より次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\{\xi \in Spin^c(4m) \mid \xi^2 = 1\}\\ &= P_0^+(4m) \cup P_0^-(4m) \cup \bigcup_{k=1}^{m} \sqrt{-1}P_{4k-2}(4m) \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} P_{4k}(4m)\\ &\quad \cup P_{4m}^+(4m) \cup P_{4m}^-(4m).\end{aligned}$$

これより、$\{\sigma^c(\xi) \mid \xi \in Spin^c(4m), \xi^2 = 1\}$ に含まれる極地のすべては以下の通り。

$$\begin{aligned}&\{\sigma^c(\sqrt{-1}P_{4k-2}(4m)) \mid 1 \leq k \leq (m+1)/2\}\\ &\cup \{\sigma^c(P_{4k}(4m)) \mid 1 \leq k \leq m/2\}\\ &\cup \{\sigma^c(P_0^+(4m)), \sigma^c(P_0^-(4m))\}.\end{aligned}$$

$\sigma^c(P_0^+(4m)), \sigma^c(P_0^-(4m))$ は極である。$1 \leq k < (m+1)/2$ ならば、$\sigma^c(\sqrt{-1}P_{4k-2}(4m)) \cong P_{4k-2}(4m) \cong \tilde{G}_{4k-2}(\mathbb{R}^{4m})$ が成り立つ。m が奇数のとき、

$$\sigma^c(\sqrt{-1}P_{2m}(4m)) \cong P_{2m}(4m))/\langle e_{[4m]} \rangle \cong G_{2m}^{\#}(\mathbb{R}^{4m}).$$

$1 \leq k < m/2$ ならば、$\sigma^c(P_{4k}(4m)) \cong P_{4k}(4m) \cong \tilde{G}_{4k}(\mathbb{R}^{4m})$ が成り立つ。m が偶数のとき、

$$\sigma^c(P_{2m}(4m)) \cong P_{2m}(4m)/\langle e_{[4m]} \rangle \cong G_{2m}^{\#}(\mathbb{R}^{4m}).$$

(2) $\xi^2 = e_{[4m]}$ の場合。$\{\xi \in T_{2m}^c \mid \xi^2 = e_{[4m]}\}$ を明らかにする。

$$\{\xi \in T_{2m}^c \mid \xi^2 = e_{[4m]}\} = \{\xi \in T_{2m} \mid \xi^2 = e_{[4m]}\} \cup \sqrt{-1}\{\xi \in T_{2m} \mid \xi^2 = -e_{[4m]}\}$$

となる。さらに上記の極大トーラスを利用した計算により

$$\begin{aligned}\{\xi \in Spin(4m) \mid \xi^2 = e_{[4m]}\} &= \tilde{R}^+(4m) \cup (-\tilde{R}^+(4m)),\\ \{\xi \in Spin(4m) \mid \xi^2 = -e_{[4m]}\} &= \tilde{R}^-(4m) \cup (-\tilde{R}^-(4m))\end{aligned}$$

を得る。これらの ρ による像を考えると、$\rho(\tilde{J}_{2m}) = J_{2m}$, $\rho(\tilde{J}'_{2m}) = J'_{2m}$ となり、

$$\rho(\tilde{R}^+(4m)) = \rho(-\tilde{R}^+(4m)) = R^+(4m) \cong \mathrm{DIII}(2m)$$

および

$$\rho(\tilde{R}^-(4m)) = \rho(-\tilde{R}^-(4m)) = R^-(4m) \cong \mathrm{DIII}(2m)$$

が成り立つ。これらを利用すると定理の主張が得られる。

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology **3** Supp. 1 (1964), 3–38.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, I, Duke Math. J. **44** (1977), 745–755.

[3] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II, Duke Math. J. **45** (1978), 405–425.

[4] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[5] T. Nagano, The involutionsof compact symmetric spaces, Tokyo J. Math. 11 (1988), 57–79.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, J. Lie Theory **27** (2017), 801–829.

[7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I, Differ. Geom. Appl. 73 (2020), 101682.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Polars of disconnected compact Lie groups, Contempolary Mathematics **777** (2022), 211–225.

[9] H. Tasaki, Polars of Pin^c groups and related compact Lie groups, to appear in Tohoku Math. J.

[10] H. Tasaki, Polars of Pin^c groups and related compact Lie groups. II, to appear in Osaka J. Math.