Hurwitz–Radon 数と半単純リー群の固有作用

甘中一輝

東條広一氏（東海大学）との共同研究 (arXiv:2602.04544) に基づく

2025 年 12 月 9 日

部分多様体幾何とリー群作用 2025

目次

1 序

2 主定理

3 疑問

Hurwitz–Radon 数

Hurwitz–Radon 数とは以下で定義される $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の事:

$$\rho(2^{4a+b} \times (\text{odd})) = 8a + 2^b \quad (a \in \mathbb{N},\ b = 0, 1, 2, 3)$$

N	1	2	4	8	16	32	64	128	...
$\rho(N)$	1	2	4	8	9	10	12	16	...

定理 (Hurwitz (1923), Radon (1923))

$n \leq \rho(N) \Leftrightarrow \exists\, \mathbb{R}$ 双線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *s.t.* $\|x\|\|y\| = \|f(x,y)\|$

- $(n, N) = (2, 2)$. $x, y \in \mathbb{C}$ に対する等式 $|x||y| = |xy|$ から,
$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$
- $(n, N) = (4, 4)$. $x, y \in \mathbb{H}$ に対する等式 $|x||y| = |xy|$ から,
$$\begin{aligned}&(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)\\ =&(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2\\ +&(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)^2 + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)^2\end{aligned}$$

Hurwitz–Radon 数

Hurwitz–Radon 数とは以下で定義される $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の事:

$$\rho(2^{4a+b} \times (\text{odd})) = 8a + 2^b \quad (a \in \mathbb{N},\ b = 0, 1, 2, 3)$$

N	1	2	4	8	16	32	64	128	...
$\rho(N)$	1	2	4	8	9	10	12	16	...

定理 (Adams (1962))

$n \leq \rho(N) \Leftrightarrow$ 各点的に一次独立な $n-1$ 個のベクトル場が $\mathbf{S}^{N-1}$ 上に存在.

今日のトピック

Hurwitz–Radon 数は擬リーマン幾何の文脈でも現れる!

擬リーマン空間形

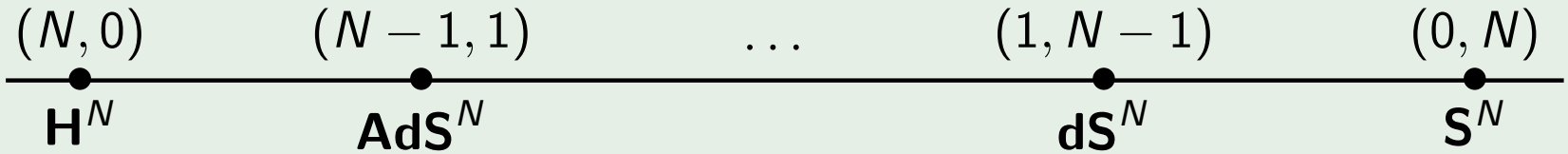
定義 (空間形)

測地的完備かつ断面曲率一定の擬リーマン多様体のことを**空間形**という.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{p,q} &= \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid (x_1^2 + \cdots + x_p^2) - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q+1}^2) = -1\} \\ &\simeq O(p, q+1)/O(p, q)\end{aligned}$$

1. 断面曲率が -1 で一定の符号 (p, q) の擬リーマン空間形
2. 等長変換群は丁度 $O(p, q+1)$.

N 次元の $\mathbf{H}^{p,q}$ $(p+q=N)$



計量 g を $-g$ に置き換えると, 符号が (q, p), 断面曲率は $+1$ になる.

不連続群

定義 (等質空間 G/H の不連続群)

G の離散部分群 Γ で, G/H への作用が固有不連続かつ自由であるもの

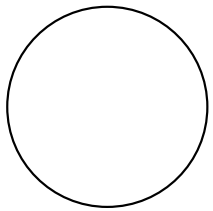
簡単な事実

1. 商空間 $\Gamma\backslash G/H$ は C^∞ 級多様体.
2. 商写像 $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ は C^∞ 級の被覆写像.

$\mathbf{H}^{p,q} = O(p,q+1)/O(p,q)$ の場合,

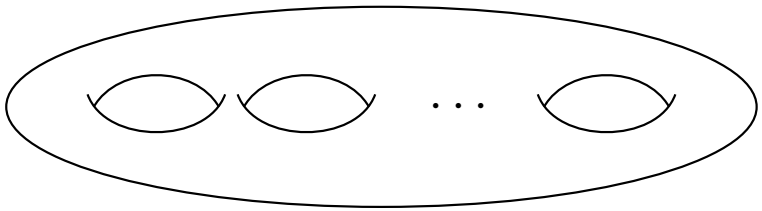
定理 (簡単の為 $q \neq 1$ を課す)

$$\{\mathbf{H}^{p,q} \text{ の不連続群 }\}/\sim \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{ 符号 } (p,q) \text{ で断面曲率 } -1 \text{ の空間形 }\}$$



G/H (ポアンカレ円盤)

被覆 $\longrightarrow$

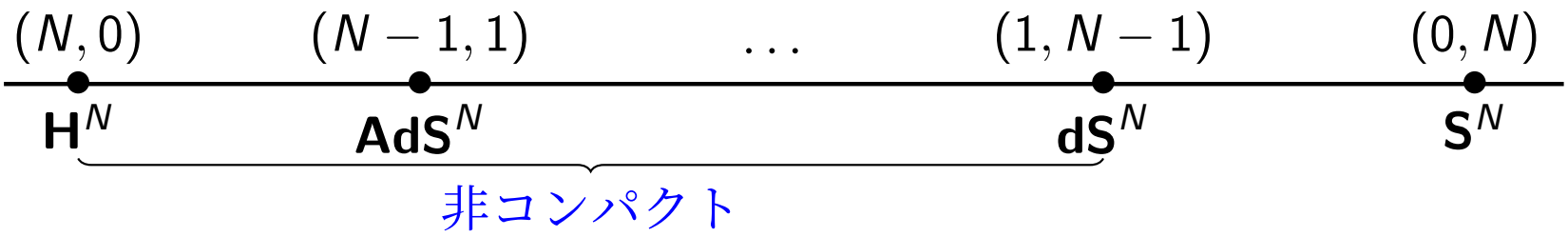


$\Gamma\backslash G/H$ (双曲的リーマン面)

Calabi–Markus 現象

問: どの様な離散群 Γ が $\mathbf{H}^{p,q}$, または一般の G/H の不連続群になるか?

$\mathbf{H}^{p,q} = O(p, q+1)/O(p, q)$.



(有限群の差を除いて) **無限群**からなる不連続群に注目したい.
H が**非コンパクト**の時, 次に注意しなければならない:

離散部分群 $\Gamma \subset G$ の作用 $\Gamma \curvearrowright G/H$ は固有不連続とは限らない.

極端なケースとして, **ある**等質空間 G/H では,

Calabi–Markus 現象

G の有限部分群**しか** G/H に固有不連続に作用できない.

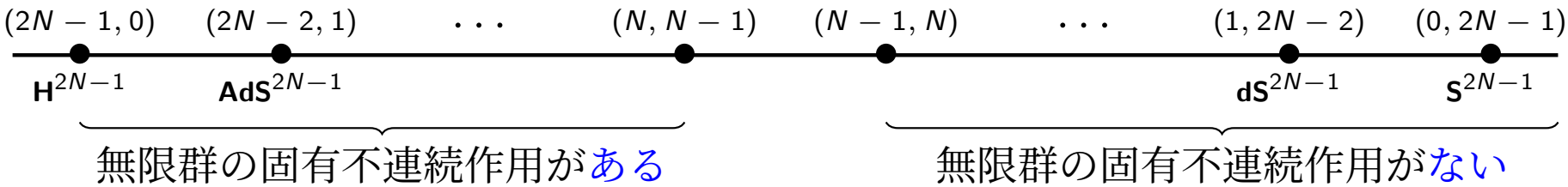
小林–Benoist の固有性判定法

$G \supset H$: 線形簡約リー群

Calabi–Markus 現象の判定法 (小林 (1989))

Calabi–Markus 現象が G/H で起こる $\iff$ $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\, G = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\, H$.

$\mathbf{H}^{p,q} = O(p, q+1)/O(p, q)$ $(p+q = 2N-1)$ の場合,



この判定法は次の定理により示される:

固有性判定法 (小林 (1989,1996), Benoist (1996))

与えられた離散部分群 $\Gamma \subset G$ に対して, 作用 $\Gamma \curvearrowright G/H$ の固有不連続性を Cartan 射影 $\mu(\Gamma)$ の言葉で判定できる.

Cartan 射影 μ: $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K \to \mathfrak{a}^+$ $\cdots$ 簡約リー群の構造論.

簡約群作用に関する小林の固有性判定法

問: どの様な離散群 Γ が G/H の不連続群になるか?

不連続群の標準的な構成法

ステップ 1 G の簡約部分群 L で作用 $L \curvearrowright G/H$ が固有なものを探す.

ステップ 2 L の離散部分群 Γ (例えば一様格子) を取る.

$\rightsquigarrow$ 作用 $\Gamma \curvearrowright G/H$ は固有不連続.

ステップ 1 — 固有性判定法 (小林 (1989))

$$L \curvearrowright G/H \text{ が固有} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{a}_L \cap W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)\mathfrak{a}_H = 0$$

(位相的条件) (代数的条件)

幾つかの先行研究

問題

1. どの様な離散群 Γ が G/H に固有不連続に作用するか?
2. どの様な簡約リー群 L が G/H に固有に作用するか?

小林–Benoist の固有性判定法の応用として:

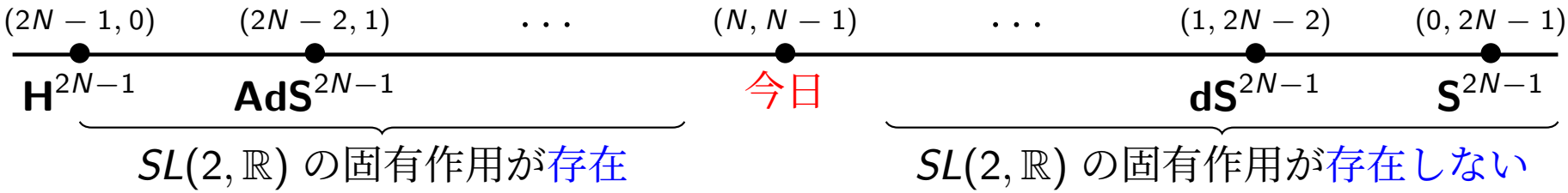
1. Benoist (1996) は自由群 F_n の G/H への固有不連続作用の存在の為のリー代数的判定法を発見した.
2. 奥田 (2013) は G/H が**対称空間**の場合に, いつ固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用が存在するかを調査した. その結果, 次の事実を得た:

$$\exists(F_n \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \Leftrightarrow \exists(SL(2,\mathbb{R}) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \Leftrightarrow \exists(\pi_1(\Sigma_g) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H).$$

上の二つの同値はいずれも G/H が非対称空間の場合は不成立 (奥田, Bochenski–森田).

固有な $SL(2,\mathbb{R})$ 作用の存在の境界線

$\mathbf{H}^{p,q} = O(p,q+1)/O(p,q)$ $(p+q = 2N-1)$ の場合:



さらに $\mathbf{H}^{N,N-1}$ に $SL(2,\mathbb{R})$ の固有作用が存在する $\iff$ N が偶数

我々の出発点となる疑問

$SL(2,\mathbb{R})$ 固有作用の存在の「境界線」上でどの種の現象が生ずるか？

- 今回は, $\mathbf{H}^{N,N-1}$ に固有 (かつ等長) に作用する半単純リー群を分類
- $\mathbf{H}^{N,N-1}$ の等長変換群 $O(N,N)$ は豊富な簡約部分群を持つ事に注意

主結果 — $\mathbf{H}^{N,N-1}$ の場合

定理 (甘中・東條, arXiv:2602.04544)

L をコンパクト因子を持たない連結半単純リー群とする.

$$\exists\left(L \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} \mathbf{H}^{N,N-1}\right) \iff L \text{ が大域的に } Spin(n,1) \text{ と同型かつ } 2 \le n \le \rho(N)$$

$n \ge 2$ の時, $Spin(n,1)$ は $SO_0(n,1)$ の (ただ一つの) 非自明な二重被覆群.

既知の例:

- $Spin(2,1) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} \mathbf{H}^{2,1} = \mathbf{AdS}^3$
- $Spin(4,1) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} \mathbf{H}^{4,3}$
- $Spin(8,1) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} \mathbf{H}^{8,7}$

これらは余コンパクトでもある (Kulkarni, 小林).

N	1	2	4	8	16	...
$\rho(N)$	1	2	4	8	9	...

$\rightsquigarrow \Gamma \subset Spin(N,1)$ を余コンパクト離散部分群とすると, $\Gamma\backslash\mathbf{H}^{N,N-1}$ は**コンパクト**空間形になる $(N = 2, 4, 8)$

より一般的な主張を述べる前に

定理 (再掲)

L をコンパクト因子を持たない連結半単純リー群とする.

$\exists(L \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} \mathbf{H}^{N,N-1}) \iff L$ が大域的に $Spin(n,1)$ と同型かつ $2 \leq n \leq \rho(N)$

より一般の等質空間で定理の主張を述べる為に, 以下を念頭におく:

1. 固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用の存在の「境界線」をどのように定式化するか？
2. なぜ $Spin(n,1)$ だけが特別なのか？
3. なぜ Hurwitz–Radon 数 $\rho(N)$ が現れるのか？

目次

1 序

2 主定理

3 疑問

固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用の存在の「境界線」 — Property (VE)

$\iota\colon G \hookrightarrow GL(N,\mathbb{C})$: 古典型リー群の標準的埋め込み

$\varphi\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ が **very even** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\iota\circ\varphi$ の全ての既約部分表現が偶数次元.

定義 (甘中・東條)

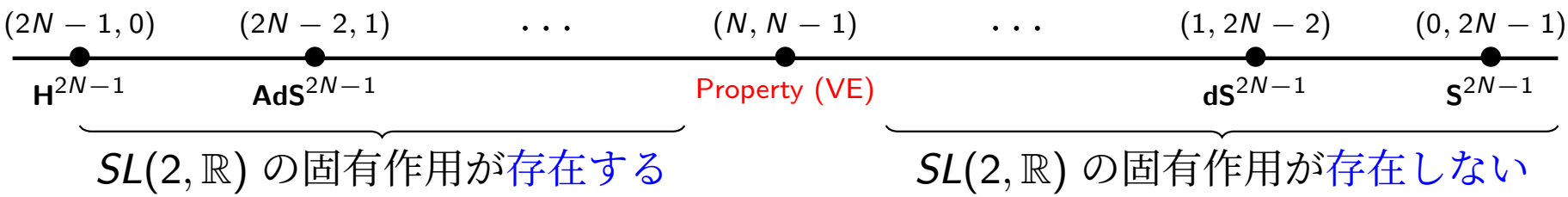
G/H が **Property (VE)** を持つ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\varphi\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$, 次が成立:

$$SL(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi}{\curvearrowright} G/H \text{ が固有} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ が very even.}$$

(位相的条件) (表現論的条件)

$\cdots$ 固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用の希少さを反映する条件

$\mathbf{H}^{p,q}$ $(p+q=2N-1)$ の場合,



分類定理

定理 A (Property (VE) を持つ対称空間の分類)

次の対称空間は Property (VE) を持つ:

	G	H
①	$SL(2N,\mathbb{R})$	$SO(N+1,N-1)$
②	$SL(2N,\mathbb{C})$	$SU(N+1,N-1)$
③	$SL(2N,\mathbb{H})$	$Sp(N+1,N-1)$
④	$SO(4N,\mathbb{C})$	$SO(2p+1,\mathbb{C})\times SO(4N-2p-1,\mathbb{C})$ $(0\le p<N)$
⑤	$SO(4N,\mathbb{C})$	$SO(2N+1,2N-1)$
⑥	$SU(N,N)$	$S(U(p,p+1)\times U(N-p,N-p-1))$ $(0\le p<N/2)$
⑦	$SO(2N,2N)$	$SO(p,p+1)\times SO(2N-p,2N-p-1)$ $(0\le p<N)$
⑧	$SO^*(4N)$	$SO^*(4p+2)\times SO^*(4N-4p-2)$ $(0\le p<N/2)$
⑨	$SO^*(4N)$	$U(N+1,N-1)$
⑩	$Sp(N,N)$	$Sp(p,p+1)\times Sp(N-p,N-p-1)$ $(0\le p<N/2)$

- ⑦で $p=0$ とすると $\mathbf{H}^{N.N-1}$.
- ⑥で $p=0$ とすると複素双曲空間 $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ の擬リーマン類似

分類定理の証明の構造

$\iota\colon G \hookrightarrow GL(N,\mathbb{C})$: 古典型リー群の標準的埋め込み

$\varphi\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ が **very even** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\iota\circ\varphi$ の全ての既約部分表現が偶数次元.

定義 (再掲)

G/H が **Property (VE)** を持つ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\varphi\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$, 次が成立する:

$$SL(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi}{\curvearrowright} G/H \text{ が固有} \quad \iff \quad \varphi \text{ が very even.}$$

$$\varphi_{\mathbb{C}}\colon SL(2,\mathbb{C}) \to G_{\mathbb{C}} \overset{\text{Dynkin–Kostant}}{\longleftrightarrow} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の重み付き Dynkin 図形}$$

$SL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright G/H$ が固有 $\overset{\text{奥田}}{\longleftrightarrow}$ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のある二つの実形の佐武図形との整合性

比較!

φ が very even $\longleftrightarrow$ 重みに関する条件

何故 $Spin(n,1)$ が特別なのか？

G/H: Property (VE) を持つ等質空間
L: コンパクト因子を持たない連結半単純リー群

定理 B

$$\exists(L \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \Rightarrow L \simeq Spin(n,1).$$

L が $SO_0(n,1)$ と同型であっても固有には決して作用できない.

次が議論の鍵となる:

補題

$\mathfrak{l}$ を非コンパクト実単純リー環とする. この時,

$$\mathfrak{l} \simeq \mathfrak{so}(n,1) \iff \textit{non-even}\ \text{準同型}\ \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{l}\ \text{が存在しない}.$$

$\cdots$ 単純リー環の分類を用いてケースバイケースに証明する.

何故 $\rho(N)$ と $\mathbf{H}^{N,N-1}$ が結びつくのか?

定理 (再掲)

L をコンパクト因子を持たない連結半単純リー群とする.

$$\exists(L \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} \mathbf{H}^{N,N-1}) \iff L \text{ が大域的に } Spin(n,1) \text{ と同型かつ } 2 \leq n \leq \rho(N)$$

Hurwitz, Radon, Eckmann, Adams の結果によれば, 次が分かる:

事実

以下は同値.

- $n \leq \rho(N)$.
- $\exists\, \mathbb{R}$ 線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to M(N,\mathbb{R})$ $s.t.$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t f(x) f(x) = \|x\|^2 I_N$
- $\exists\, \mathbb{R}$ 線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to M(N,\mathbb{R})$ $s.t.$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x)$ は可逆.

$\mathbf{H}^{N,N-1}$ の等長変換群 $O(N,N)$ のリー環の $\mathfrak{p}$ が $M(N,\mathbb{R})$ である事に注目.

Hurwitz–Radon 数のリー環を用いた定式化

$\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$: 古典型リー環の標準的埋め込み (簡単のため)
$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$: $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解

定義 (甘中・東條)

$\rho^{(1)}(\mathfrak{g},\iota)$ と $\rho^{(2)}(\mathfrak{g},\iota)$ をそれぞれ次の条件を満たす $\mathbb{R}$ 線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{p}$ が存在するような最大の $n \in \mathbb{N}$ として定義する:

$\underline{\rho^{(1)}(\mathfrak{g},\iota)}$　全ての $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $\iota(f(v))^2 = \|v\|^2 I_N$ が成立する.

$\underline{\rho^{(2)}(\mathfrak{g},\iota)}$　全ての $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\iota(f(v))$ が可逆.

次の等式が実は成立:

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{so}(N,N),\iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{so}(N,N),\iota) = \rho(N)!$$

$\mathbf{H}^{N,N-1}$ の等長変換群のリー環は $\mathfrak{so}(N,N)$!

例 — $\mathfrak{so}(N,N)$ の場合

標準的埋め込み $\iota\colon \mathfrak{so}(N,N) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(2N,\mathbb{C})$ を考える.

$$\mathfrak{so}(N,N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \middle| A, C \in \mathfrak{so}(N),\ B \in M(N,\mathbb{R}) \right\} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

観察

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathfrak{p} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to M(N,\mathbb{R})$$

$$\iota(f(v))^2 = \|v\|^2 I_N \quad \Longleftrightarrow \quad {}^t\tilde{f}(v)\tilde{f}(v) = \|v\|^2 I_N$$

$$\iota(f(v)) \text{ が可逆} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{f}(v) \text{ が可逆}$$

従って,

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{so}(N,N),\iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{so}(N,N),\iota) = \rho(N)$$

Hurwitz–Radon 数 — 古典型リー環の自然表現の場合

$\mathfrak{g}$: 古典型実リー環, $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}$: $\mathfrak{g}$ の標準的埋め込み.

定理 C

- 全ての $(\mathfrak{g}, \iota)$ に対して $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ を計算した.
- 特に, $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}(2N+1, \mathbb{D})$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H},\ N \geq 1)$ の時,

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

例えば,

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{so}(N,N)$	$\mathfrak{gl}(N,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(N,\mathbb{C})$
$\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$	$\rho(N)$	$\rho(N/2)+1$	$\rho(N/2)+2$	$\rho(N/2)+3$
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{sp}(N,N)$	$\mathfrak{gl}(N,\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}^*(2N)$	$\mathfrak{so}(N,\mathbb{C})$
$\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$	$\rho(N/2)+4$	$\rho(N/2)+5$	$\rho(N/8)+6$	$\rho(N/16)+7$

証明 – 周期 8 の古典型リー環の列

証明の鍵となるアイデア

周期 8 の古典型リー環の列を用いる:

$$\begin{aligned} \ldots \quad &\subset \mathfrak{so}(N,N) \quad \subset \mathfrak{gl}(2N,\mathbb{R}) \quad \subset \mathfrak{sp}(2N,\mathbb{R}) \quad \subset \mathfrak{sp}(2N,\mathbb{C}) \\ &\subset \mathfrak{sp}(2N,2N) \quad \subset \mathfrak{gl}(4N,\mathbb{H}) \quad \subset \mathfrak{so}^*(2(8N)) \quad \subset \mathfrak{so}(16N,\mathbb{C}) \\ &\subset \mathfrak{so}(16N,16N) \quad \subset \ldots \end{aligned}$$

上記の列で隣接する各古典型リー環の対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して:

補題 ($\iota_{\mathfrak{h}}, \iota_{\mathfrak{g}}$ はそれぞれの自然表現)

$$\rho^{(i)}(\mathfrak{h},\iota_{\mathfrak{h}}) + 1 \leq \rho^{(i)}(\mathfrak{g},\iota_{\mathfrak{g}}) \quad (i = 1,2)$$

$\cdots$ $+1$ のポイントは associated pair $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^a)$ がパラエルミートである事.

$Spin(n,1)$ の固有作用と Hurwitz–Radon 数

G/H: Property (VE) の古典型等質空間. $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$: 標準的包含.

定理 D

$$\exists (Spin(n,1) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \iff n \le \rho^{(1)}(\mathfrak{g},\iota).$$

再掲. $\rho^{(1)}(\mathfrak{g},\iota)$ は次が存在する最大の $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}\text{-線型写像} \quad f\colon \mathbb{R}^n \to \mathfrak{p} \quad \text{s.t.} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \iota(f(v))^2 = \|v\|^2 I_N.$$

証明の構造 $C^+(n,1)(\supset Spin(n,1))$: even Clifford 代数.

$$\exists (Spin(n,1) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \overset{\text{(a)}}{\longleftrightarrow} \exists \varphi\colon Spin(n,1) \to G \ \text{ s.t. } \ \tilde{\iota}\circ\varphi(-1) = -I$$

$$\Big\updownarrow \text{(b)}$$

$$n \le \rho^{(1)}(\mathfrak{g},\iota) \overset{\text{(c)}}{\longleftrightarrow} \exists \varphi\colon Spin(n,1) \to G \ \text{ s.t. } \ \tilde{\iota}\circ\varphi \text{ が } C^+(n,1) \text{ に拡張される}$$

目次

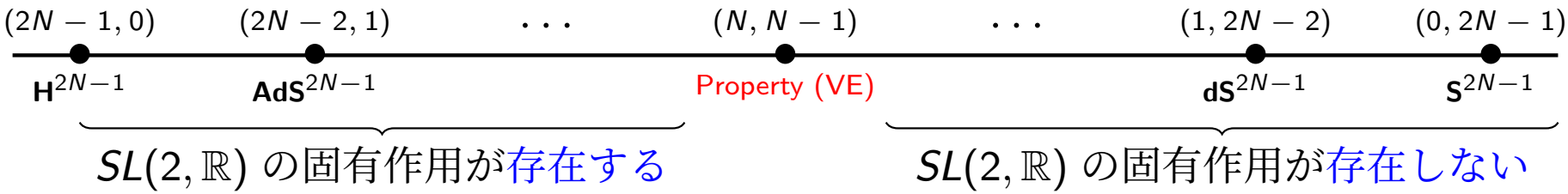
1 序

2 主定理

3 疑問

一つ目: 「境界線」の定式化

$\mathbf{H}^{N,N-1}$ が固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用の存在の「境界線」であった:



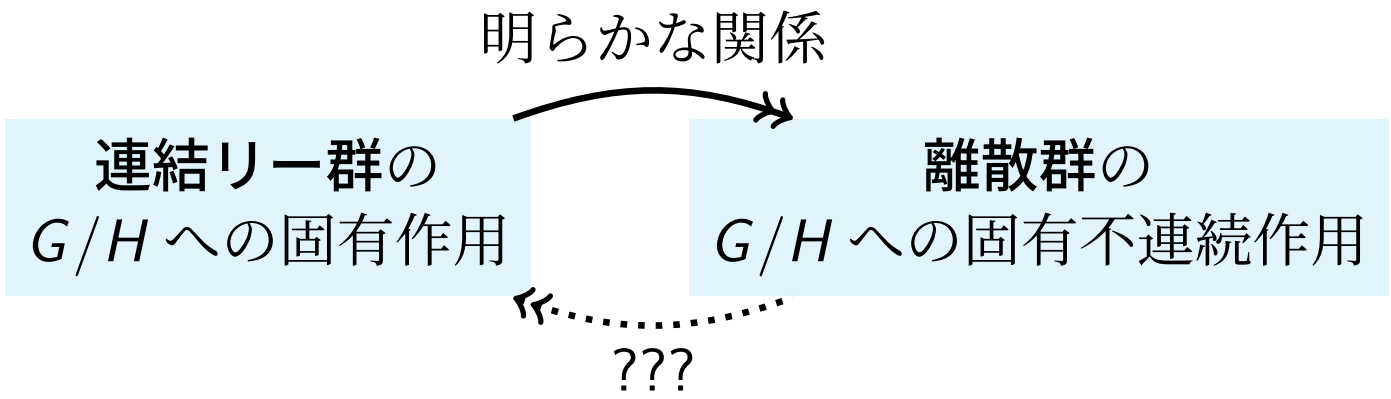
疑問 1

「境界線」の (例えばルート系を用いる様な) より良い他の定式化はあり得るか?

· · · 固有に作用する半単純リー群や不連続群の分類に面白い現象が起こる事が望ましい.

連続 v.s. 離散

次の二つの関係を観察する事は面白い問題を引き起こしてきた:



例:

- Margulis の超剛性定理
- アファイン不連続群の Milnor 予想への Margulis の反例
- コンパクト Clifford–Klein 形の存在に関する小林予想 (未解決)
- 半単純対称空間 G/H に対する奥田の結果:

$$\exists(F_n \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \Leftrightarrow \exists(\pi_1(\Sigma_g) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H) \Leftrightarrow \exists(SL(2,\mathbb{R}) \overset{\text{固有}}{\curvearrowright} G/H).$$

二つ目 — 複素双曲格子

$X = G/H$: Property (VE) を持つ等質空間.

定理 B (再掲)

L をコンパクト因子を持たない連結半単純リー群とする.

$$L \not\simeq Spin(n,1) \Rightarrow G/H \text{ への固有 } L \text{ 作用が存在しない.}$$

Margulis の超剛性と上記の定理を組み合わせると次を得る:

系

Γ を $SO(n,1), SU(n,1)$ と局所同型では**ない**非コンパクト半単純リー群の一様格子とする. この時,

$$G/H \text{ への固有不連続な } \Gamma \text{ 作用が存在しない.}$$

疑問 2 ($n \geq 2$)

Γ が $SU(n,1)$ の一様格子の時, G/H は固有不連続な Γ の作用を持つか?

三つ目 — 実双曲格子と HR 数

G/H: Property (VE) を持つ対称空間.

定理 D (再掲)

G/H への $Spin(n,1)$ の固有作用が存在 $\iff$ $n \leq \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$.

疑問 3

Γ を $Spin(n,1)$ の一様格子とする. この時次は正しいか?

G/H への Γ の固有不連続作用が存在 $\iff$ $n \leq \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$.

1. $n = 2$ の時, $Spin(2,1) \simeq SL(2,\mathbb{R})$ で, 奥田の結果からこの同値は真.
2. $n = 3$ の時, $Spin(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C})$ で Γ は Klein 群. 上の同値が真なら,

$\mathbf{H}^{N,N-1}$ への Γ の固有不連続作用が存在 $\iff$ N が 4 の倍数.