Cartan embeddings of compact Riemannian k-symmetric spaces

木村太郎

鶴岡工業高等専門学校

部分多様体幾何とリー群作用 2025

東京理科大学 神楽坂キャンパス 森戸記念館　第 1 フォーラム

間下克哉氏（法政大学　名誉教授）との共同研究

December 10, 2025

目次

Cartan embeddings

k-symmetric spaces

4-symmetric spaces

Biharmonic

Polars

Cartan embeddings

定義

G をコンパクト連結単純リー群とし, σ を有限位数の G の自己同型写像とする. $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とおく. 写像 $\Psi : G \to G; g \mapsto g\sigma(g)^{-1}$ は次の写像を引き起こす：

$$\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$$

この写像を σ が引き起こす *Cartan* 埋め込みという.

σ の位数が 2 のとき, Cartan 埋め込みは全測地的埋め込みとなる.

Cartan embeddings

$o = eK$, s_p を $p \in G/K$ における測地的点対称とするとき,

$$\begin{array}{ccc} M = G/K & \xrightarrow{Q} & G \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ p = gK & \longmapsto & s_p \circ s_o \end{array}$$

$\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$ のとき, $s_p \circ s_o = g\sigma(g)^{-1}$ がわかる.

$$\begin{aligned} Q(p) &= s_p \circ s_o \\ &= s_{g\cdot o} \circ s_o \\ &= g s_o g^{-1} \circ s_o \\ &= g(s_o g^{-1} s_o^{-1}) \\ &= g\sigma(g^{-1}) \end{aligned}$$

準備

リーマン多様体の等長埋め込み $\Psi : (M^m, \langle , \rangle) \to (N^n, \langle , \rangle)$ の第 2 基本形式を α とする.

$$\nabla^N_X Y = \nabla^M_X Y + \alpha(X, Y), \quad H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i)$$

補題

α を位数 k の自己同型写像 σ に対応するカルタン埋め込み Ψ_σ の第 2 基本形式とする. このとき, $X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して,

$$\alpha(X, Y) = -\frac{1}{2}[(1 - d\sigma)X, (1 + d\sigma)Y]_{\mathfrak{k}}.$$

G のリー環を $\mathfrak{g}$ として, σ による分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ で表す.

k-symmetric spaces

定義

G をコンパクトリー群, H をその閉部分群とする. G の有限位数 k の自己同型写像 σ ($\sigma^l \neq \mathrm{id}, l < k$) が存在して,

$$G_o^\sigma \subset H \subset G^\sigma$$

が成り立つとき, $(G/H, \sigma)$ をコンパクト k-対称空間と呼ぶ.

特に, $k = 2$ のとき, 通常のコンパクト対称空間となる.

k-symmetric spaces

例

エルミート対称空間は k-対称空間である.

$$CI(r) \cong Sp(r)/U(r).$$

$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(r)$ の中心は一次元,

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_r \\ \hline I_r & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k}).$$

$Z = \frac{\pi}{k} J$ とすると

$$\exp(Z) = \left(\begin{array}{c|c} \cos(\frac{\pi}{k})I_r & -\sin(\frac{\pi}{k})I_r \\ \hline \sin(\frac{\pi}{k})I_r & \cos(\frac{\pi}{k})I_r \end{array}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) I_{2r} + \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) J$$

となるから

k-symmetric spaces

$$\{\exp(Z)\}^k = \exp(\pi J) = -I_{2r}.$$

$a_k = \exp(Z)$ とおき,

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_k : & \underset{\cup}{Sp(r)} & \longrightarrow & & \underset{\cup}{Sp(r)} \\ & g & \longmapsto & \sigma_k(g) = a_k g a_k^{-1} & \end{array}$$

で写像を定義すると, $(\sigma_k)^k = \mathrm{id}$. このとき,

$$g \in U(r) \iff \sigma_k(g) = g.$$

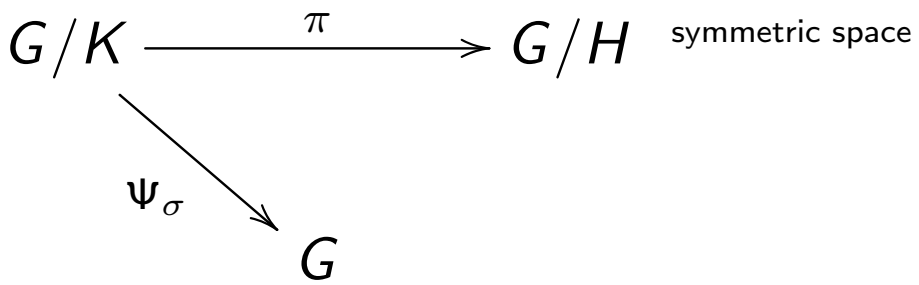
各 $k \geqq 2$ について上記が成立するので, $Sp(r)/U(r)$ は k-対称空間である.

4-symmetric spaces

G をコンパクト単純連結リー群, σ を位数 4 の自己同型写像とし,

$$\tau = \sigma^2, K = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}, H = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$$

とおくと $K \subset H$ をみたすので, ファイバー H/K のファイバー束 $G/K \to G/H$ を得る. このとき, σ が引き起こすのカルタン埋め込み Ψ_σ の像 $\Psi_\sigma(G/K)$ について考える.



4-symmetric spaces

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p+q+r+s)$ に対して, σ を以下で定義する:

$$\sigma(X) = I_{p,q,r,s}\, X\, I_{p,q,r,s}^{-1}.$$

ここで, $I_{p,q,r,s} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \sqrt{-1}I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\sqrt{-1}I_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_s \end{array}\right)$ である.

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= (I_{p,q,r,s})^2 X (I_{p,q,r,s}^{-1})^2 \\ &= \left(\begin{array}{c|c} -1_{p+q} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1_{r+s} \end{array}\right) X \left(\begin{array}{c|c} -1_{p+q} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1_{r+s} \end{array}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & C & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D \end{array}\right) \mid A \in \mathfrak{u}(p), B \in \mathfrak{u}(q), C \in \mathfrak{u}(r), D \in \mathfrak{u}(s), Tr(A+B+C+D) = 0 \right\}$$

$$G/K = SU(p+q+r+s)/S(U(p)\times U(q)\times U(r)\times U(s)) \to G/H = SU(p+q+r+s)/S(U(p+q)\times U(r+s))$$

4-symmetric spaces

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2p+q)$ に対して, σ を以下で定義する:

$$\sigma(X) = J_{p,q}\bar{X}J_{p,q}^{-1}\ (p, q \geq 1).$$

ここで, $J_{p,q} = \left(\begin{array}{c|c} J_p & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -1_q \end{array}\right), J_p = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & 1_p \\ \hline -1_p & \mathbf{0} \end{array}\right)$ である.

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= (J_{p,q})^2 X (J_{p,q}^{-1})^2 \\ &= \left(\begin{array}{c|c} -1_{2p} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1_q \end{array}\right) X \left(\begin{array}{c|c} -1_{2p} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1_q \end{array}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right) \mid A \in \mathfrak{sp}(p), B \in \mathfrak{so}(q) \right\}$$

$G/K = SU(2p+q)/Sp(p)\times SO(q) \to G/H = SU(2p+q)/S(U(2p)\times U(q))$

4-symmetric spaces

$\mathfrak{g}$ のベクトル空間の直和分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{m}$$

とおく. ここで,

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\},$$

$$\mathfrak{b} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\},$$

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma^2(X) = -X\}.$$

また,

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma^2(X) = X\}$$

とおく.

内部自己同型写像

G をコンパクト単純連結リー群, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 環とし, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関するルート系を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ とする. さらに, $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の 1 つの基本ルート系を

$$\Pi(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

とする. $V_i \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} (1 \leq i \leq n)$ を次で定める.

$$\alpha_j(V_i) = \frac{1}{m_i}\delta_{ij}.$$

$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$ を $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ の最高ルートとする.
内部自己同型写像 σ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の下で

$$\mathrm{Ad}\left(\exp 2\pi\sqrt{-1}X\right) \quad (X \in \mathfrak{D}_0)$$

に共役である. $\mathfrak{D}_0$ は基本領域を表す.

k-symmetric spaces

位数 3 の自己同型写像は Wolf and Gray (1968) による分類

- $\mathfrak{g}$: コンパクト単純リー環, σ : 内部自己同型写像
- $\mathfrak{g}$: D_4 型のコンパクトリー環, σ : 外部自己同型写像

位数 4 の自己同型写像は J. A. Jimenez (1988) による分類

- $\mathfrak{g}$: コンパクト単純リー環, $\sigma^2 \neq \mathrm{id}$: 自己同型写像

位数 5 の自己同型写像は Wolf and Gray (1968) による分類 ?

- $\mathfrak{g}$: コンパクト単純リー環, σ : 内部自己同型写像

内部自己同型写像

位数 3（Wolf and Gray）

- $X = 1/3V_i, m_i = 1$
- $X = 2/3V_i, m_i = 2$
- $X = 1/3(V_i + V_j), m_i = m_j = 1$
- $X = V_i, m_i = 3$

位数 4（J. A. Jimenez）

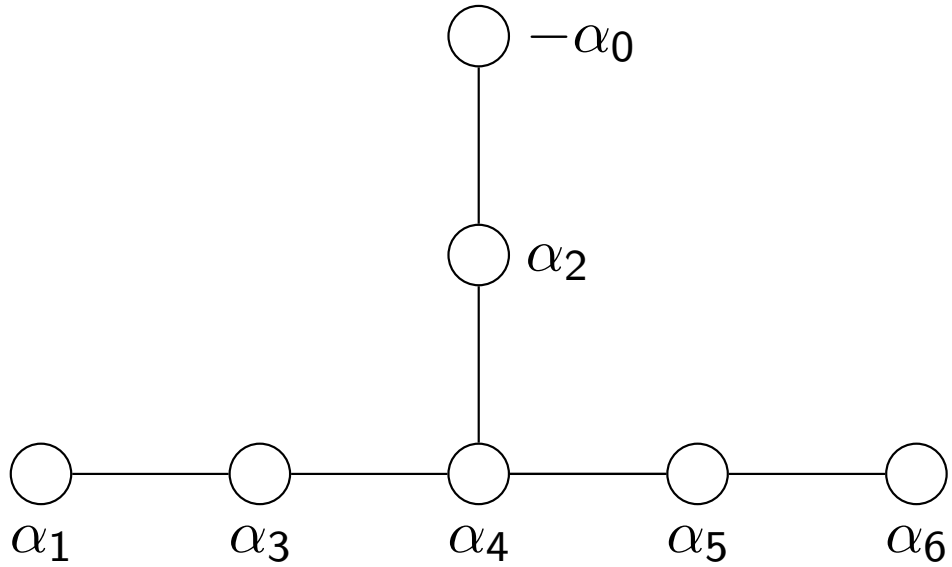
- $X = V_i, m_i = 4$
- $X = 3/4V_i, m_i = 3$
- $X = 1/4(2V_i + V_j), m_i = 2, m_j = 1$
- $X = 1/4(V_i + V_j + V_k), m_i = m_j = m_k = 1$
- $X = 1/4V_i, m_i = 1$
- $X = 1/2V_i, m_i = 2, \quad X = 1/4(V_j + V_k), m_j = m_k = 1,$
  $X = 1/2(V_p + V_q), m_p = m_q = 2$

内部自己同型写像

位数 5（Wolf and Gray）

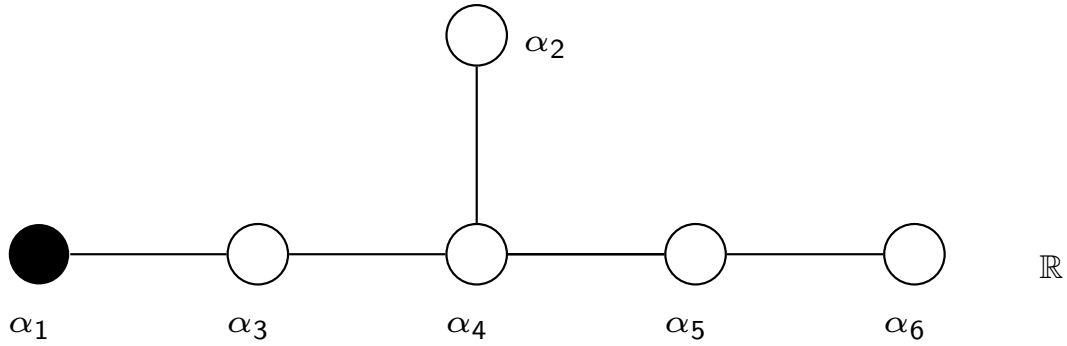
- $X = 1/5 V_i, 1 \leq m_i \leq 5$
- $X = 4/5 V_i, m_i = 2$
- $X = 2/5 V_i, m_i = 1$
- $X = 1/5(V_i + V_j), m_i = m_j = 1$
- $X = 1/5(2V_i + V_j), 1 \leq m_i \leq 2, m_j = 1$
- $X = 1/5(3V_i + V_j), m_i = 3, m_j = 1$
- $X = 2/5(V_i + V_j), 1 \leq m_i \leq m_j = 2$
- $X = 1/5(3V_i + 2V_j), m_i = 3, m_j = 2$
- $X = 1/5(V_i + V_j + V_k), m_i = m_j = m_k = 1$
- $X = 1/5(2V_i + V_j + V_k), 1 \leq m_i \leq 2, m_j = m_k = 1$
- $X = 1/5(V_i + V_j + V_k + V_l), m_i = m_j = m_k = m_l = 1$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_6$

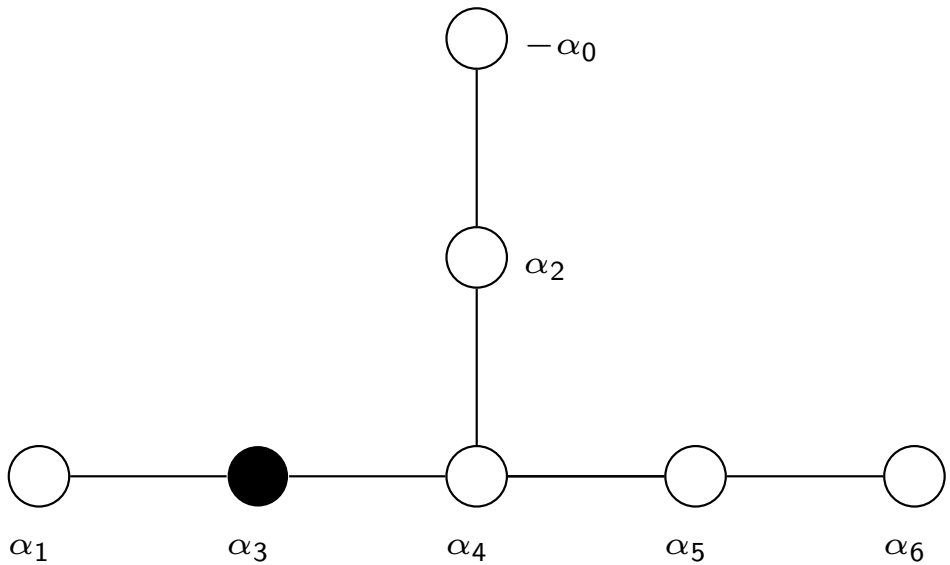


$\mathfrak{e}_6$ には, 互いに共役でない二つの対合が存在し, fixed point Lie algebra $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1$ である.

$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$



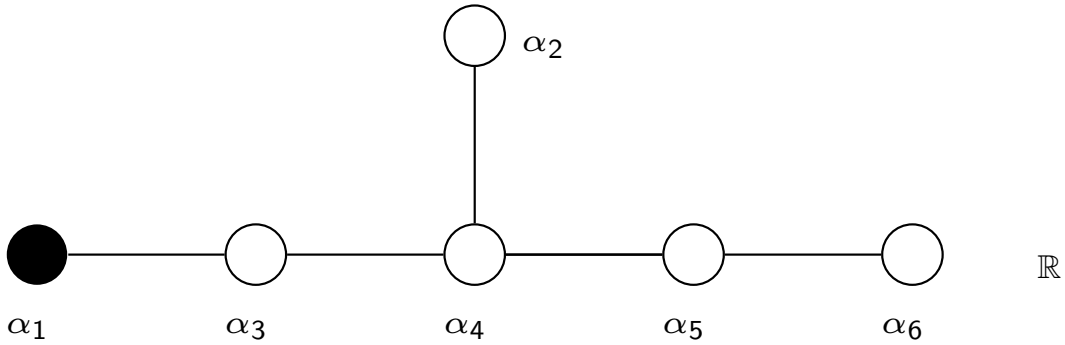
$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_5$



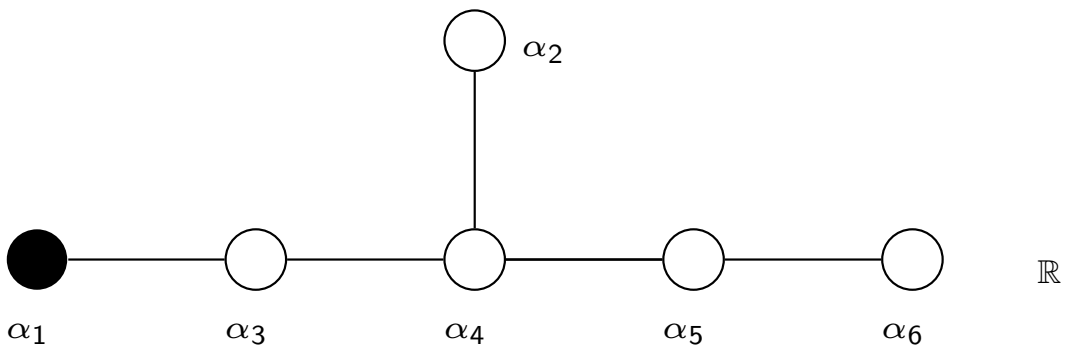
- は Dynkin diagram, extend Dynkin diagram から取り除く.

$H = 1/4v_1$ の場合：$\sigma = \mathrm{Ad}_{\exp(2\pi\sqrt{-1}H)}$

$\mathfrak{k} = \mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$

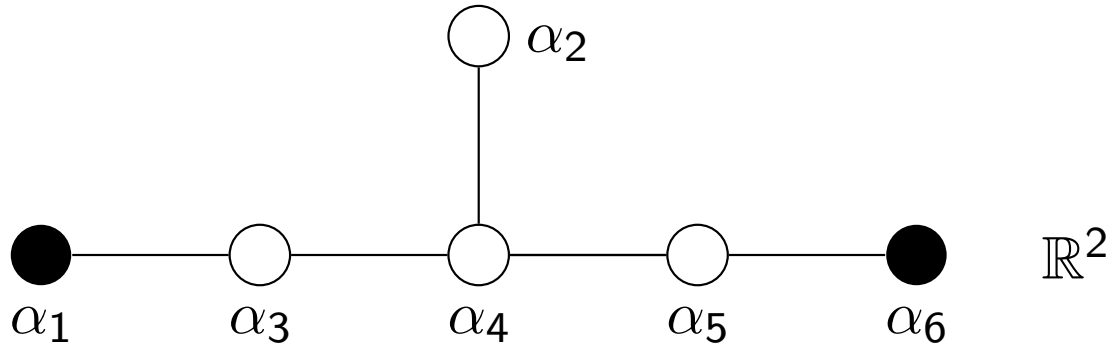


$\mathfrak{h} = \mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$

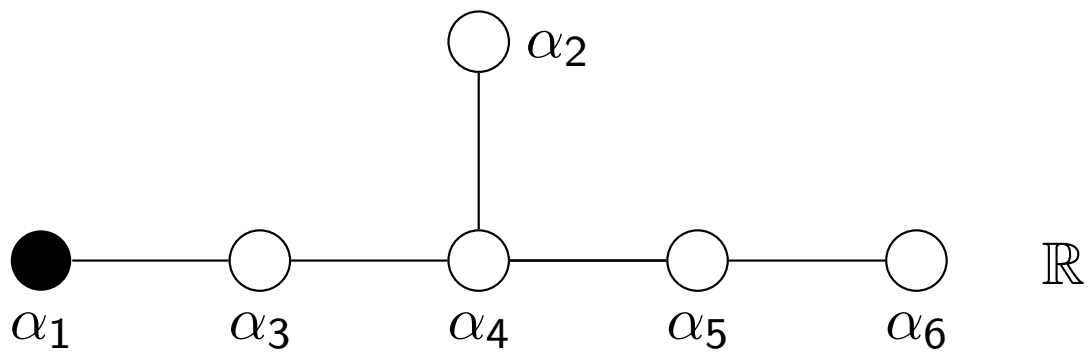


$H = 1/4(v_1 + v_6)$ の場合：$\sigma = \mathrm{Ad}_{\exp(2\pi\sqrt{-1}H)}$

$\mathfrak{k} = \mathfrak{d}_4 \oplus \mathbb{R}^2$



$\mathfrak{h} = \mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$



$\alpha \in \Delta^+$ のルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ に対して, 各 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ について

$$\begin{aligned} \sigma(X_\alpha) &= \mathrm{Ad}_{\exp(2\pi\sqrt{-1}H)}(X_\alpha) \\ &= \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha(H))X_\alpha \end{aligned}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_6$, $H = 1/4(v_1 + v_6)$ の場合について計算すると

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 + c_5\alpha_5 + c_6\alpha_6$$

と置けるので, $\sigma(X_\alpha) = \exp(2\pi\sqrt{-1} \cdot 1/4(c_1 + c_6))X_\alpha$.
$\sigma(X_\alpha) = -X_\alpha$ となるためには, $c_1 + c_6 = 2$. $(c_1, c_6) = (1, 1)$ をみたす正のルートの個数は, 8 個であるので, $\dim \mathfrak{b} = 16$. また, $\dim \mathfrak{k} = 30$. $\dim(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}) = 46$ より

$$\mathfrak{e}_6 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}.$$

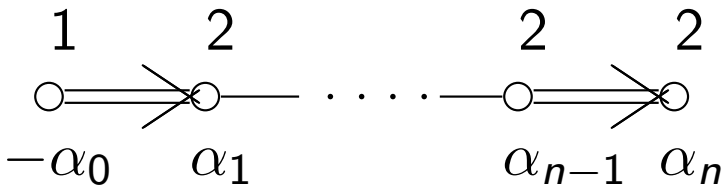
外部自己同型写像

位数 4 の外部自己同型写像が存在するリー環 $\mathfrak{g}_N^{(d)}$

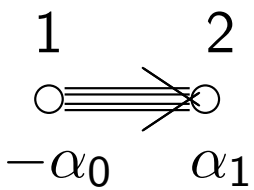
$$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}, \mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}, \mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}, \mathfrak{e}_6^{(2)}$$

以下の図式は, 外部自己同型を構成するのに必要な Kač 図式 (cf. Helgason p.503)

$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$ $(n \geq 2)$

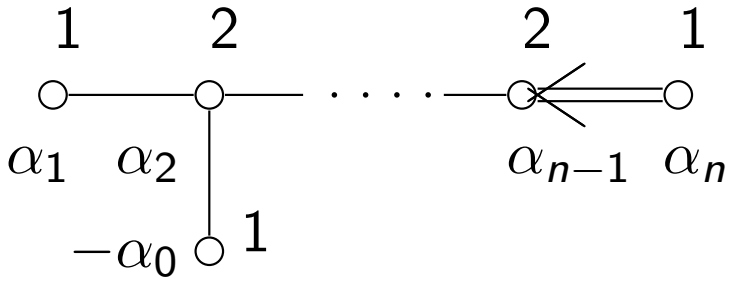


$\mathfrak{a}_2^{(2)}$

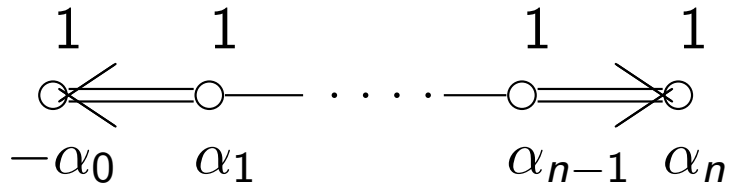


外部自己同型写像

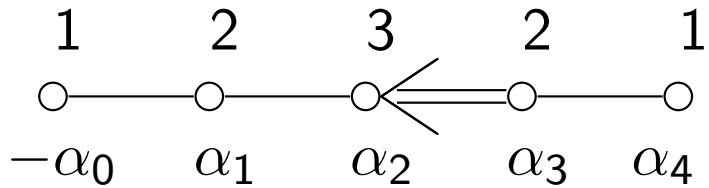
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}$ $(n \geq 3)$



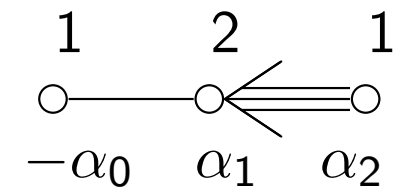
$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$ $(n \geq 2)$



$\mathfrak{e}_6^{(2)}$

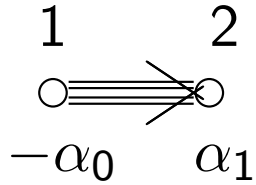


$\mathfrak{d}_4^{(3)}$



$\mathfrak{g}_N^{(d)}$ の外部自己同型 σ を $(\mathfrak{g}_N^{(d)} : s_0, s_1, \ldots, s_n)$ で表すことにする.
また σ の位数は $\mathrm{ord}(\sigma) = d \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$ で与えられる.

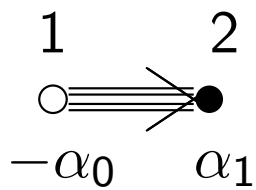
$\mathfrak{a}_2^{(2)}$



$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(\sigma) &= 2(a_0 s_0 + a_1 s_1) \\ &= 2(s_0 + 2s_1) \end{aligned}$$

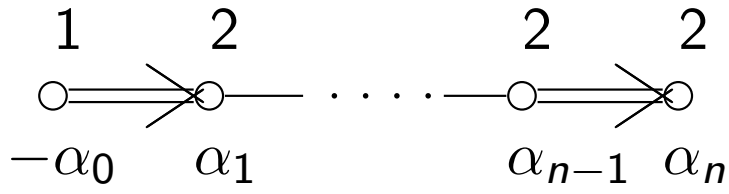
これから $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ となるためには, $(s_0, s_1) = (0, 1)$.

$\mathfrak{k}$



$\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$.

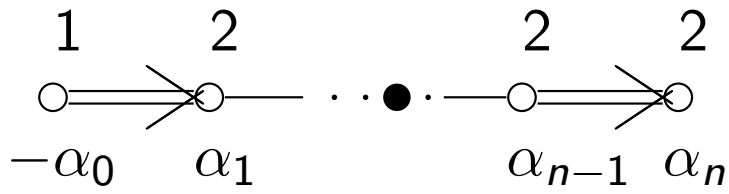
$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$ $(n \geq 2)$



$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(\sigma) &= 2(a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1} s_{n-1} + a_n s_n) \\ &= 2(s_0 + 2s_1 + \cdots + 2s_{n-1} + 2s_n) \end{aligned}$$

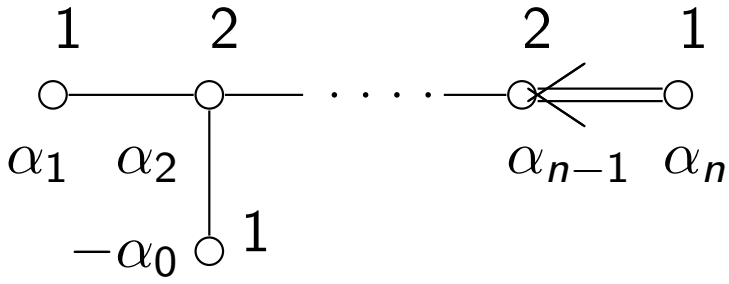
これから $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ となるためには,
$s_p = 1(1 \leq p \leq n), s_l = 0(l \neq p)$.

$\mathfrak{k}$



$\mathfrak{k} = \mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{2p-1} \oplus \mathfrak{a}_{2n-2p} \oplus \mathbb{R}$.

$\mathfrak{a}^{(2)}_{2n-1}$
$(n \geq 3)$



$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(\sigma) &= 2(a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1} s_{n-1} + a_n s_n) \\ &= 2(s_0 + s_1 + 2s_2 \cdots + 2s_{n-1} + s_n) \end{aligned}$$

これから $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ となるためには,

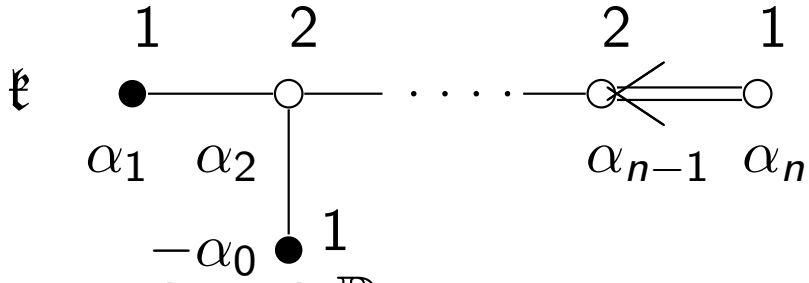
(1) $s_0 = 1, s_1 = 1, s_p = 0 \ (2 \leq p \leq n)$

(2) $s_0 = 1, s_n = 1, s_p = 0 \ (1 \leq p \leq n-1)$

(3) $s_0 = 0, s_1 = 1, s_n = 1, s_p = 0 \ (2 \leq p \leq n-1)$

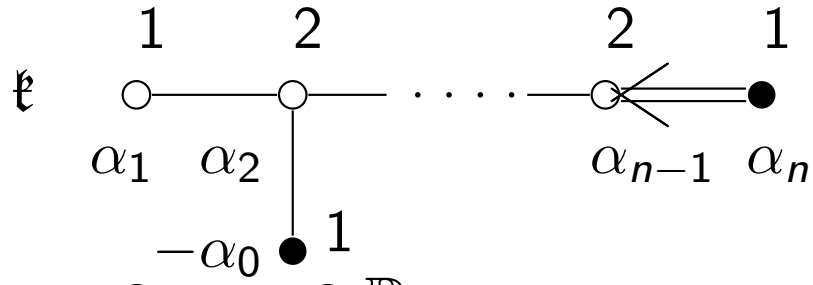
(4) $s_0 = s_1 = s_n = 0, s_p = 1 \ (2 \leq p \leq n-1)$

(1) のとき,



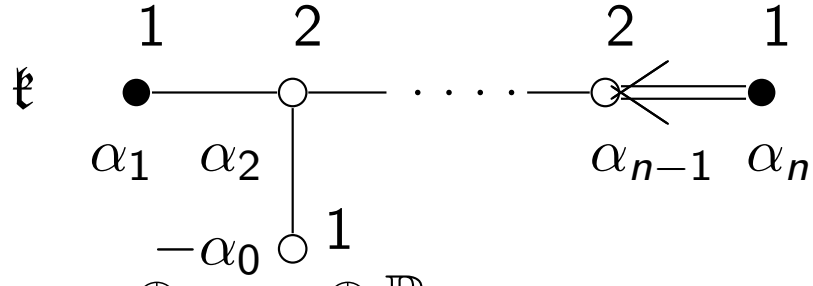
$\mathfrak{k} = \mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{2n-3} \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$.

(2) のとき,



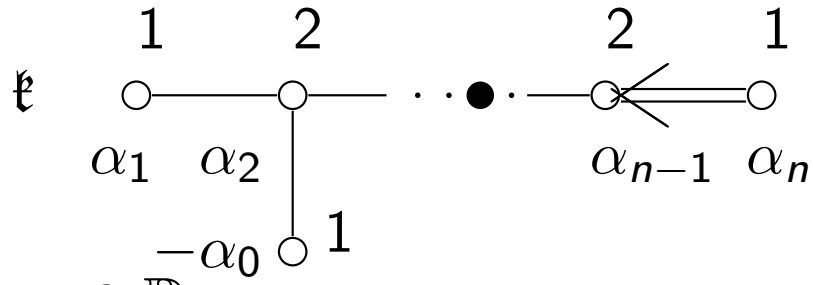
$\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$.

(3) のとき,



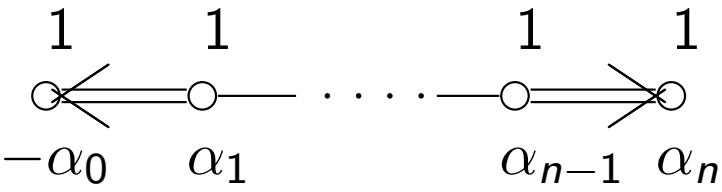
$\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$.

(4) のとき,



$\mathfrak{k} = \mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}$,
$\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{2n-2p-1} \oplus \mathfrak{a}_{2p-1} \oplus \mathbb{R}$.

$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$ $(n \geq 2)$



$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(\sigma) &= 2(a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1} s_{n-1} + a_n s_n) \\ &= 2(s_0 + s_1 + s_2 \cdots + s_{n-1} + s_n) \end{aligned}$$

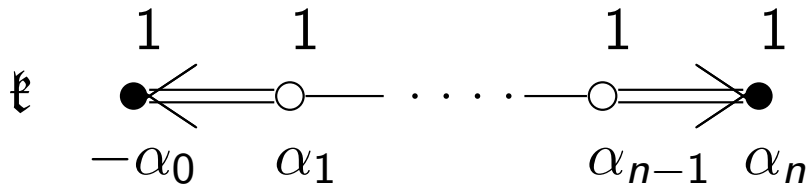
これから $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ となるためには,

(1) $s_0 = 1, s_n = 1, s_p = 0 \ (1 \leq p \leq n-1)$.

(2) $s_0 = 1, s_n = 0, s_p = 1 \ (1 \leq p \leq n-1)$.

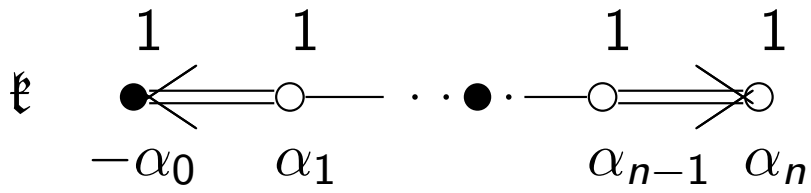
(3) $s_0 = 0, s_p = 1, s_q = 1 \ (1 \leq p < q \leq n)$.

(1) のとき



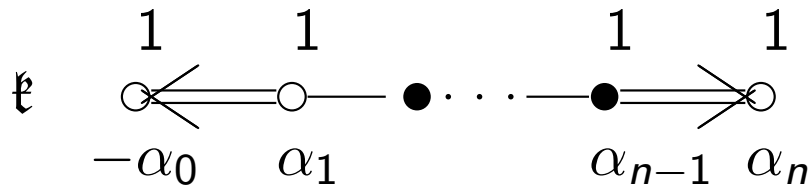
$\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}_n \oplus \mathbb{R}$.

(2) のとき



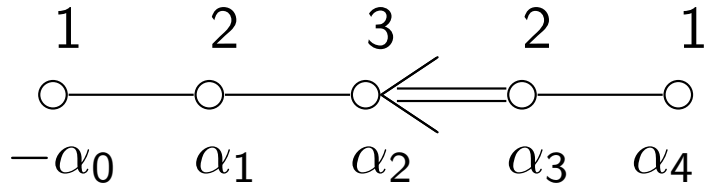
$\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_{p-1} \oplus \mathfrak{b}_{n-p} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{d}_{n-p+1}$.

(3) のとき



$\mathfrak{k} = \mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{q-p-1} \oplus \mathfrak{b}_{n-q} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}_{q-p} \oplus \mathfrak{d}_{n+p-q+1}$.

$\mathfrak{e}_6^{(2)}$



$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(\sigma) &= 2(a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4) \\ &= 2(s_0 + 2s_1 + 3s_2 + 2s_3 + s_4) \end{aligned}$$

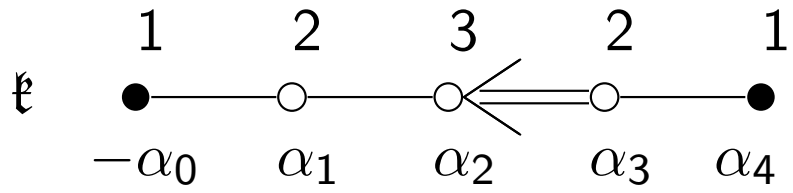
これから $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ となるためには,

(1) $s_0 = 1, s_4 = 1, s_1 = s_2 = s_3 = 0.$

(2) $s_1 = 1, s_0 = s_2 = s_3 = s_4 = 0.$

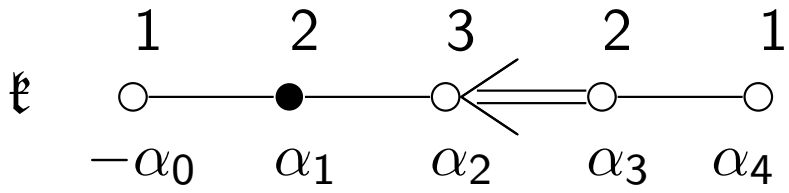
(3) $s_3 = 1, s_0 = s_1 = s_2 = s_4 = 0.$

(1) のとき



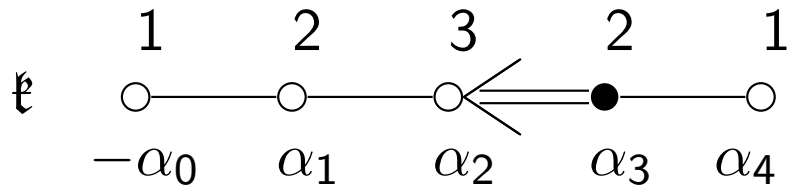
$\mathfrak{k} = \mathfrak{c}_3 \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1$.

(2) のとき



$\mathfrak{k} = \mathfrak{b}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$.

(3) のとき



$\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1$.

以上より, 次の表を得る.

$\mathfrak{g}_N^{(d)}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}$	H/K
$\mathfrak{a}_2^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$	(I)
$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$	$\mathfrak{a}_{2p-1} \oplus \mathfrak{a}_{2n-2p} \oplus \mathbb{R}$	(II)
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}$	$\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{a}_{2n-3} \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$	(III)
	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	(IV)
	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	(V)
	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}$	$\mathfrak{a}_{2n-2p-1} \oplus \mathfrak{a}_{2p-1} \oplus \mathbb{R}$	(VI)
$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{d}_n \oplus \mathbb{R}$	(VII)
	$\mathfrak{a}_{p-1} \oplus \mathfrak{b}_{n-p} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{d}_{p-1} \oplus \mathfrak{d}_{n-p+2}$	(VIII)
	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{q-p-1} \oplus \mathfrak{b}_{n-q} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{d}_{q-p} \oplus \mathfrak{d}_{n+p-q+1}$	(IX)
$\mathfrak{e}_6^{(2)}$	$\mathfrak{c}_3 \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1$	(X)
	$\mathfrak{b}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$	(XI)
	$\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1$	(XII)

	H/K
(I)	$U(2)/SU(2) = S^1$
(II)	$SU(2p)/Sp(p) \times SU(2(n-p)+1)/SO(2(n-p)+1) \times S^1$
(III)	$SU(2n-2)/Sp(n-1)$
(IV)	$SU(n) \times SU(n)/\triangle\, SU(n)$
(V)	$SU(n) \times SU(n)/\triangle\, SU(n)$
(VI)	$SU(2n-2p)/Sp(n-p) \times SU(2p)/SO(2p)$
(VII)	$SO(2n)/U(n) \times SO(2)$
(VIII)	$SO(2p)/U(p) \times SO(2(n-p)+2)/SO(2(n-p)+1))$
(IX)	$SO(2q-2p)/U(q-p) \times SO(2n+2p-2q+2)/(SO(2p+1) \times SO(2n-2q+1))$
(X)	$SU(6)/Sp(3) \times SU(2)/SO(2)$
(XI)	$SO(10)/(SO(3) \times SO(7)) \times S^1$
(XII)	$SU(6)/SO(6)$

H	K	Remark
$SU(n)$	$SO(n)$	$n \geq 2$
$SU(2n)$	$Sp(n)$	$n \geq 2$
$SO(p+q)$	$SO(p) \times SO(q)$	p, q :odd
E_6	$Sp(4)$	
E_6	F_4	

Table: Symmetric spaces of outer type

Biharmonic

- 1983 J. Eells and L. Lemaire
  調和写像の一般化として k 重調和写像
- 2009 G.Y.Jiang
  2 重調和写像の第 1 変分, 第 2 変分公式

リーマン多様体の等長はめ込み $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ に対して

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 \, v_g$$

で bienegy 関数を定義する. ここで, $\tau(\varphi)$ は φ の tension 場である. いま $\varphi_0 = \varphi$ である任意の変分 φ_t に対して第 1 変分公式は,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(\varphi_t) = - \int_M h(\tau_2(\varphi), V) v_g$$

で与えられる. ここで $V \in \Gamma(\varphi^{-1} TN)$, $\tau_2(\varphi)$ は φ の bitension 場を表す.

Biharmonic

定義

$\varphi : (M, g) \to (N, h)$ が $\tau_2(\varphi) = 0$ をみたすとき, φ を**２重調和写像**という.

定義

調和写像でない２重調和写像を **proper な２重調和写像**という

定理 (S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa 2015)

$\varphi : (M, g) \to (N, h)$ を等長はめ込みとする. また, すべての $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $\nabla^{\perp}_X \tau(\varphi) = 0$ と仮定する. このとき, φ が２重調和写像であることは次と同値である.

$$\sum_{k=1}^{m} R^h(\tau(\varphi), d\varphi(e_k))d\varphi(e_k) = \sum_{j,k=1}^{m} h(\tau(\varphi), B_\varphi(e_j, e_k))B_\varphi(e_j, e_k)$$

ここで,$\{e_i\}_{i=1}^m$ は *local orthonomal frame field*, R^h は N のリーマン曲率テンソル, B_φ は φ の第二基本形式である.

Biharmonic

補題

Let G be a compact connected simple Lie group. The Cartan embedding induced by σ is biharmonic if and only if

$$\sum_{\alpha\in\Delta^+,\langle\alpha,H\rangle\neq 0} \left(1-\cot^2\left(\pi\langle\alpha,H\rangle\right)\right)\langle\alpha,\tau\rangle\alpha = 0$$

Theorem (K–Mashimo)

Let G be a compact connected simple Lie group with a bi-invariant Riemannian metric and let σ be an inner automorphism on G of order 4. Then the Cartan embedding Ψ_σ : $G/K \to G; gK \mapsto g\sigma(g^{-1})$ is proper biharmonic if and only if $(\mathfrak{g}, H, \mathfrak{k})$ is one of the following:

$\mathfrak{g}$	H	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{a}_n$ $(n \geq 1)$	$1/4\, v_i \quad (1 \leq i \leq [(n+1)/2])$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-i} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n$ $(n \geq 2)$	$1/4\, v_1$	$\mathfrak{b}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_n$ $(n \geq 2)$	$1/2\,(v_i + v_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{b}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_n$ $(n \geq 3)$	$1/4\, v_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{c}_{2m}$ $(m \geq 2)$	$1/4\,(2\, v_m + v_{2m})$	$\mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathfrak{a}_{m-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 4)$	$1/4\, v_1$	$\mathfrak{d}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 5)$	$1/4\, v_n$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 4)$	$1/4\,(v_1 + 2\, v_2)$	$\mathfrak{d}_{n-2} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_{2n}$ $(n \geq 2)$	$1/4\,(2\, v_n + v_{2n})$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 5)$	$1/2\,(v_i + v_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq n-3,\ 2\,i+1 < n)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{d}_{n-i-1} \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_6$	$1/4\, v_1$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/4\, v_7$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_7$	$1/2\,(v_1 + v_2)$	$\mathfrak{a}_5 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$

Table: Proper biharmonic Cartan embeddings induced by inner automorphism

Theorem (K–Mashimo)

Let G be a compact connected simple Lie group with a bi-invariant Riemannian metric and let σ be an outer automorphism on G of order 4. Then the Cartan embedding Ψ_σ : $G/K \to G; gK \mapsto g\sigma(g^{-1})$ is proper biharmonic if and only if $(\mathfrak{g}, \mathrm{type}, \mathfrak{k})$ is one of the following:

$\mathfrak{g}$	type	$\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{a}^{(2)}_{2n-1}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ $(n \geq 2)$	$s_0 = s_n = 1,\ s_i = 0\ (1 \leq i \leq n-1)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
	$s_1 = s_n = 1,\ s_i = 0\ (i \neq 1, n)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
$(\mathfrak{d}^{(2)}_{n+1}; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ $(n \geq 2)$	$s_p = s_{p+1} = 1,\ s_i = 0$ $(0 \leq p \leq n-1, 2p+1 \neq n)\ (i \neq p, p+1)$	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-2p-2} \oplus$ $\mathfrak{b}_{p+1} \oplus \mathbb{R}$

Table: Proper biharmonic Cartan embeddings induced by outer automorphism

4-symmetric spaces(biharmonic)

(G, H, τ) をコンパクトエルミート対称対とすると, τ は, H のリー環 $\mathfrak{h}$ の 1 次元中心 $\mathfrak{c}$ の元 J_0 を用いて

$$\tau(g) = \exp(\pi J_0)\, g\, \exp(-\pi J_0) \quad (g \in G)$$

で定義される. いま G 上の自己同型 σ_k $(k \neq 2)$ を

$$\sigma_k(g) = \exp\left(\frac{2\pi}{k} J_0\right)\, g\, \exp\left(-\frac{2\pi}{k} J_0\right) \quad (g \in G)$$

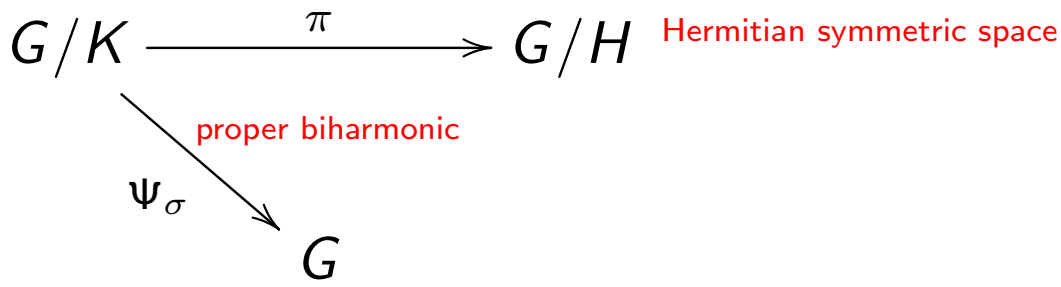
で定義すると $(\sigma_k)^k = id, (\sigma_4)^2 = \tau$.

4-symmetric spaces(biharmonic)

$$K = \{g \in G \mid \sigma_4(g) = g\}, H = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$$

とおくと $K \subset H$ をみたすので, ファイバー H/K のファイバー束 $G/K \to G/H$ を得る. このとき, σ_4 が引き起こすのカルタン埋め込み Ψ_{σ_4} の像 $\Psi_{\sigma_4}(G/K)$ について考える.

4-symmetric spaces(biharmonic)



- Ψ_σ が proper 2 重調和であると仮定する.
  このとき, G/H はエルミート対称空間となる.
- $\Psi_{\sigma_k}(G/K)\,(k>2)$ を proper 2 重調和とする. このとき
  G/K は 4-対称空間となる.

Polars

定義 (極地)

コンパクトリーマン対称空間 $M = G/K$ の原点 o に対して, 点対称 s_o の固定点集合 $F(s_o, M)$ の連結成分を M における o の**極地**という. 特に点 $p \in M$ を含む極地を $M^+(p)$ と表す.

例

$M = SU(n)$ のとき, $1_n \in SU(n)$ のおける点対称を s_{1_n} とすると

$$F(s_{1_n}, SU(n)) = \coprod_{0 \leq j:even \leq n} G_j(\mathbb{C}^n)$$

となる.

Polars

$SU(n)$ における曲線 $c(t)$ $(0 \leq t \leq 2)$ を以下で定義する:

$$c(t) := \exp(\pi t H), \quad H = \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{-1} & & \\ & \sqrt{-1} & \\ \hline & & 0_{n-2} \end{array}\right).$$

$$c(0) = \exp O = 1_n, \quad c(1) = \exp(\pi H) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & & \\ & -1 & \\ \hline & & 1_{n-2} \end{array}\right),$$

$c(2) = \exp(2\pi H) = 1_n$, $c(1) = p$ とおくと $p^2 = 1_n$.

Polars

$$G \cdot p = \{gpg^{-1} \mid g \in SU(n)\}.$$

$$K = \{g \in G \mid gpg^{-1} = p\} \cong S(U(2) \times U(n-2)).$$

これから

$$G \cdot p \cong SU(n)/S(U(2) \times U(n-2)) \cong G_2(\mathbb{C}^2).$$

$$c(1/2) = \exp(\pi H/2) = \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{-1} & & \\ & \sqrt{-1} & \\ \hline & & 1_{n-2} \end{array}\right) = q$$

とおくと, $q^2 = p$ をみたし,

$$G \cdot q \cong SU(n)/S(U(1) \times (1) \times U(n-2)).$$

$G \cdot q$ は 4 対称空間である.

Polars

これから, 写像 $G \cdot q \to G \cdot p$ は

$$\begin{array}{ccc} G \cdot q & \longrightarrow & G \cdot p \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

で定義され, ファイバー F のファイバー束

$$F \to G \cdot q \to G \cdot p$$

の構造を持つ.


J. A. Jiménez, *Riemannian 4 symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 715–734.


G. Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formula*, Chinese Ann. Math., 7A (1986), 388–402; Note di Mat., 28 (2009), 209–232.


T. Kimura and K. Mashimo, Biharmonic Cartan embeddings, a preprint.


S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, *Bi-harmonic homogeneous hypersuefaces in compact symmetric spaces*, Differential geometry and its applications, 43(2015), 155-179.


J.A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I*, J Differential geometry 2 (1968), 77–114.


J.A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, II*, J Differential geometry 2 (1968), 115–159.

ご静聴ありがとうございました