旗多様体からグラスマン多様体への正則写像；竹内の定理の一般化

長友康行

明治大学理工学部

2025 年 12 月 10 日

竹内の結果

G : コンパクト、単連結、連結な半単純リー群

G の極大トーラス $T_{\max} \subset G$ を固定し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を単純ルートとする：

$$\Delta := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

Δ の部分集合 Δ' をとり、Δ' に対応する $T_{\max}$ の部分トーラスを T とおく。また、$r := |\Delta'|$ とする。このとき、G における T の中心化群を $C(T)$ と表す。このとき、$G/C(T)$ は第 2Betti 数が r である旗多様体となる。
ここでは、T を**標準的トーラス**ということにする。G 内の任意のトーラスは標準的トーラスと共役となるので、以後標準的トーラスのみを考えることにする。
さらに $\mathbf{Z}_+^r$ を r 個の正整数からなる集合とする。

定理 (竹内, 1978)

標準的トーラス T を固定する。$G/C(T)$ から $\mathbf{P}^n$ への充満な正則等長写像の像同値類からなる集合を B とおく。このとき、B は $\mathbf{Z}_+^r$ と同一視される。

証明の概観

1. この定式化は竹内先生の定式化とは少し異なる（かつ対称性を無視しているので若干不正確である）。

2. $G/C(T)$ から $\mathbf{P}^n$ への充満な正則等長写像に対して、$\mathbf{P}^n$ の次数 1 の直線束の引き戻し束は、$G/C(T)$ 上の正の正則直線束となる。$G/C(T)$ の第 2Betti 数が r であることから、$G/C(T)$ 上の正の直線束全体の集合は $\mathbf{Z}_+^r$ と同一視される。さらに小平消滅定理から正の**正則**直線束のモジュライ空間が $\mathbf{Z}_+^r$ と同一視されることがわかる。

3. 逆に $G/C(T)$ 上の正の正則直線束 $L \to G/C(T)$ を固定する。$G/C(T)$ 上の正則直線束は等質ベクトル束なので、Bott-Borel-Weil(BBW) の定理より、正則切断の空間 W は G の既約表現空間であることがわかる。すると小平埋め込み定理から正則写像 $f : G/C(T) \to \mathbf{P}(W^*)$ を構成できる。この f は G-同変なので、$L \to G/C(T)$ に誘導される接続も G-不変となる。L は正なので、曲率は $G/C(T)$ のケーラー計量となり、f は正則等長写像となる。Calabi の剛性定理から竹内の定理が成り立つことがわかる。

Introduction

竹内の定理は、正則等長写像全体の集合と $G/C(T)$ 上の正の正則直線束の同型類との同一視 (Calabi の剛性定理) だとみなせるが、さらに後者は Bott-Borel-Weil の定理を経て、G の既約表現の**一部**の集合 $-\mathbf{Z}_+^r-$ と同一視される。ここでは、既約とは限らない G のすべての表現を問題としたい。そのために

$$\mathcal{R}_G : G\text{のユニタリ表現全体のなす圏}$$

また、G 内の標準的トーラス T を一つ固定した上で

$$\mathcal{H}_T : \text{半正の等質ベクトル束に対するゲージ条件をみたす} G/C(T) \text{から複素グラスマン多様体への充満な正則写像全体のなす圏}$$

定理

G 内の任意のトーラス T に対して、$\mathcal{R}_G$ と $\mathcal{H}_T$ は圏として同型となる。

Y.N, *The categories of representations and holomorphic maps into Grassmannians*, to appear in Proc.Amer.Math.Soc.

Vector bundles

M : (コンパクト) ケーラー多様体

$(V, h) \to M$: M上のエルミート計量 h を持つ正則ベクトル束

以後、(V, h) を**エルミート束**と言う。

$H^0(M; V)$: $V \to M$の正則切断のなすベクトル空間

$(V, h) \to M$ の正則ベクトル束としての構造とエルミート計量 h を保つ接続を**エルミート接続**という。

V_x : $x \in M$ 上の $V \to M$のファイバー

R^V : (V, h)のエルミート接続の曲率

定義

任意の $x \in M$ に対して、エルミート接続のホロノミー群が $(V, h) \to M$ のファイバー V_x に既約に作用するとき、(V, h) を**ホロノミー既約な**ベクトル束であるという。

Vector bundles

定義

$(V, h) \to M$ のエルミート接続の曲率 R^V が任意の $(1,0)$ ベクトル Z $(Z \neq 0)$ と $v \in V_x \backslash \{0\}$ $(\forall x \in M)$ に対して,

$$h(R^V(Z, \overline{Z})v, v) > 0, \ (\text{resp. } \geq 0),$$

を満たすならば、(V, h) は**正** (resp. **半正**) であるという。

$$K^V := R^V(Z_i, \overline{Z}_i) \in \Gamma(\text{End } V)$$

定義

$K^V = \lambda \, \mathrm{id}_V$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ であるときに、(V, h) を **Einstein-Hermitian** ベクトル束という。このとき、(V, h) のエルミート接続を **Hermitian Yang-Mills** 接続という。

Holomorphic maps into Grassmannians

$f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$: M から複素グラスマン多様体への正則写像

$S \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を同語反復束とすると、次のベクトル束の完全列を得る：

$$0 \to S \xrightarrow{i} Gr_p(\mathbf{C}^n) \times \mathbf{C}^n \xrightarrow{\pi} Q \to 0.$$

$Q \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$: **普遍商束**

このとき、

$$H^0(Gr_p(\mathbf{C}^n); Q) = \mathbf{C}^n.$$

が成り立つ。

$f^*Q \to M$: $Q \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ の f による引き戻し束.

定義

上の仮定の下、$\mathbf{C}^n$ を $f^*Q \to M$ の切断のなすベクトル空間とみなす。このとき、線形写像 $\mathbf{C}^n \to \Gamma(f^*Q)$ が単射であれば、$f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ は**充満な**写像と言われる。

Holomorphic maps into Grassmannians

$\mathbf{C}^n$ はエルミート内積を持つとする.

このとき、普遍商束 $Q \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ にはエルミート計量 h_Q が誘導され、さらに $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ にリーマン計量が誘導される。このリーマン計量は Fubini-Study 計量と言われる。

定義

$f_1, f_2 : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を Fubini-Study 計量を持つ $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ への二つの正則写像とする。このとき、$f_2 = \psi \circ f_1$ を満たす $Gr_p(\mathbf{C}^n)$ の正則等長変換 $\psi \in \mathrm{SU}(n)$ が存在するならば、f_1 は f_2 と**像同値**であると言われる。

定義

M 上のエルミート束 (V, h) を固定する。正則写像 $f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ に対して、引き戻し束 (f^*Q, f^*h_Q) がエルミート束として (V, h) と同型であるとき、f は (V, h) に対する**ゲージ条件**を満たすと言われる。

Holomorphic maps with the gauge condition

$(L, h) \to M$ を Einstein-Hermite 直線束とし、その Hermite 接続の曲率 ω が M のケーラー計量と一致するとする（正確には $R^L = \sqrt{-1}\omega$）。正則写像 $f : M \to \mathbf{P}^n$ が(L, h) に対するゲージ条件を持つとする。ただし、$\mathbf{P}^n = Gr_n(\mathbf{C}^{n+1})$ とみなす。したがって、$(\mathcal{O}(1), h_1) \to \mathbf{P}^n$ が普遍商束である。ここで、h_1 は $\mathcal{O}(1)$ の標準計量であり、その Hermite 接続の曲率は $\mathbf{P}^n$ のケーラー形式 ω_0 である。ゲージ条件の定義から

$$(f^*\mathcal{O}(1), f^*h_1) \sim (L, h)$$

であるが、このとき、曲率も等しいので、$f^*\omega_0 = \omega$ が成り立つ。

定理

上の記号の下、次が成り立つ。

$$f \text{ が } (L, h) \text{ に対するゲージ条件を満たす} \iff f \text{ が等長写像となる}$$

したがって、「ゲージ条件を満たす正則写像」は「射影空間への正則等長写像」の一般化とみなせる。

Holomorphic maps with the gauge condition

$f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n) : (V, h)$ に対するゲージ条件を満たす正則写像

同語反復束を $S \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ と表したとき、ベクトル束の完全列を f で引き戻し、次の完全列を得る。

$$0 \to f^*S \xrightarrow{i} M \times \mathbf{C}^n \xrightarrow{\pi} f^*Q = V \to 0. \tag{1}$$

ベクトル束の第２基本形式を H とする：$H = \pi di$、ここで、d は $\mathbf{C}^n$ に値を持つ関数の外微分作用素である。H はベクトル束 $\mathrm{Hom}(f^*S, V)$ に値を持つ $(1,0)$ 形式となる。このとき、ベクトル束に対する Gauss-Codazzi 方程式から

$$R^V = HH^*$$

が成り立つ。ここで、H^* は H の随伴作用素である。したがって、(V, h) は半正となる。

誘導写像

$V \to M$ を正則ベクトル束としたとき、**評価写像** $ev : M \times H^0(M; V) \to V$ が

$$ev(x, t) = ev_x(t) = t(x) \in V_x$$

と定義される。このとき、誘導写像を定義することが出来る。

定義

評価写像 $ev_x : W \subset H^0(M; V) \to V_x$ が $\forall x \in M$ に対して全射であるとする。この時、正則写像 $f : M \to Gr_p(W)$ を次のように定義することが出来る。

$$f(x) = \mathrm{Ker}\, ev_x \subset W.$$

ここで、$p = \dim W - \mathrm{rank}\, V$ である。正則写像 f を (V, W) による**誘導写像**という。

Calabi の剛性定理の一般化

ケーラー多様体から射影空間への正則等長写像は像同値を除いて一意的であるという「Calabi の剛性定理」を一般化する。
ケーラー多様体から複素グラスマン多様体への正則等長写像に対しては剛性定理は成立しないので、別の観点が必要である。

定理 (Y.N. Ann. Global Anal. Geom. 60 (2021), 33-63)

(V, h) をケーラー多様体 M 上の半正のエルミートベクトル束であるとする。(V, h) が正でないときには、さらに射影空間への正則等長写像 $\tilde{f} : M \to \mathbf{P}^n$ があると仮定する。
$f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ が (V, h) に対するゲージ条件を満たす充満な正則写像であれば、n は一意的に決まり、$f : M \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ はゲージ同値を除いて、一意的である。

定理内にゲージ同値とあるが、ゲージ同値であれば像同値であることが証明されるので、ここではその定義を述べない。

等質ベクトル束

G : コンパクト、単連結、連結な半単純リー群,

T : 標準的トーラス部分群

V_0 を $C(T)$ のユニタリ表現としたとき、$V := G \times_{C(T)} V_0$ を誘導計量 h を持つ等質ベクトル束とする。V_0 が既約表現であるとき、V を**既約等質束**であるという。G は V に作用するが、エルミート接続 ∇ が G 作用で不変であるときに**不変接続**であるという。
$G \to G/C(T)$ を主束とみなしたとき、標準接続が定義される。標準接続から誘導される $V \to G/C(T)$ の共変微分作用素 ∇ も標準接続という。標準接続の曲率は $(1,1)$ 形式なので、V には正則ベクトル束の構造が誘導される。また、標準接続は不変接続である。次の小林昭七先生の定理を必要とする。

定理 (S.Kobayashi, Nagoya Math. J. 101 (1986), 37–54.)

V が既約等質束であるとき、(V, h) はホロノミー既約な *Einstein-Hermitian* ベクトル束となる。

等質ベクトル束

Lemma

(V, h) を既約等質束であるとする。このとき、標準接続は *Hermitian Yang-Mills* 接続となり、(V, h) 上の不変接続は標準接続に限る。

Lemma

(V, h) を既約等質束であるとする。このとき、次が成り立つ。

$$V \text{ が非自明な正則切断を持つ} \iff (V, h) \text{ が半正である}$$

任意の等質ベクトル束 (V, h) は C^∞ ベクトル束として、既約等質束の直和 $\oplus_i (V_i, h_i)$ として分解される。
ここでは、V の正則ベクトル束としての構造を正則ベクトル束 (V_i, h_i) の直和として固定する。したがって正則ベクトル束として、$V = \oplus_i (V_i, h_i)$ と分解される。

圏の射

定義

$(V_i, h_i)(i = 1, 2)$: 不変計量 h_i を持つ等質ベクトル束

に対して、エルミート計量を保つ G-同変ベクトル束同型写像 $\phi : V_1 \to V_2$ が存在するとき、$(V_1, h_1) \to M$ と $(V_2, h_2) \to M$ は**等質束として同型である**という。

以後 ϕ を G-**同変束同型**と言う。

$V = \oplus_i (V_i, h_i) \to G/C(T)$ を固定し、$f : G/C(T) \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を V に対するゲージ条件を満たす正則写像とする。f は $(V, \mathbf{C}^n)$ による誘導写像とみなせる：$f(x) = \mathrm{Ker}\, ev_x$, $ev : \mathbf{C}^n \to V$. さらに $\phi : V \to V$ を G-同変束同型としたとき、$ev \circ \phi$ は V に対するゲージ条件を満たす正則写像を誘導する。そこで、$\mathcal{H}_T$ の射として、G-同変束同型を採用する。

$\mathcal{R}_G$ の射としては、G-同変同型写像をとることにする。

主定理

$\mathcal{R}_G$: Gのユニタリ表現全体のなす圏

$\mathcal{H}_T$:半正等質ベクトル束に対するゲージ条件をみたす充満な
正則写像 $f : G/C(T) \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ 全体のなす圏

定理

G 内の任意のトーラス T に対して、$\mathcal{R}_G$ と $\mathcal{H}_T$ は圏として同型となる。

W を G の既約ユニタリ表現とする。Bott-Borel-Weil の定理から、$W = H^0(G/C(T); V)$ を満たす半正既約等質束 V が存在する。このとき、$ev : W \to V$ は G-同変束写像となるので、(V, W) による誘導写像 f も G-同変かつ充満な写像となる。したがって、引き戻し接続も不変接続となるが、先ほどの補題から、標準接続となることがわかる。したがって、f は V に対するゲージ条件を満たす正則写像となるので、$\mathcal{H}_T$ の対象となる。

$\mathcal{R}_G \to \mathcal{H}_T$

一般の G の表現は完全可約であり、対応するベクトル束の正則ベクトル束としての構造は直和因子である既約表現から得られる正則ベクトル束 (V_i, h_i) の直和から得られるので、上の議論に帰着される。
任意の旗多様体は代数多様体なので、Calabi の剛性定理の一般化の仮定を満たす。したがって V に対するゲージ条件を満たす正則写像は像同値を除いて一意的である。
W_1 と W_2 を同値な G のユニタリ表現とし、$\Phi : W_1 \to W_2$ を G-同変線形同型とする。V_α を $W_\alpha = H^0(G/C(T); V_\alpha)$ を満たす半正等質束とする。
上の構成から評価写像

$$ev_\alpha : G/C(T) \times W_\alpha \to V_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

が得られる。随伴写像 $ev_1^* : V_1 \to G/C(T) \times W_1$ を考え、
$ev_2 \Phi ev_1^* : V_1 \to V_2$ と定義すれば、$ev_2 \Phi ev_1^*$ は G-同変束同型となる。したがって、Φ に対して、$ev_2 \Phi ev_1^*$ を対応させればよい。

$\mathcal{H}_T \to \mathcal{R}_G$

逆に $f : G/C(T) \to Gr_p(\mathbf{C}^n)$ を半正等質ベクトル束 $\oplus_i(V_i, h_i)$ に対するゲージ条件を満たす充満な正則写像とする。補題から (V_i, h_i) $(i = 1, \cdots, r)$ は非自明な正則切断を持つことがわかる。Bott-Borel-Weil の定理により、各 $W_i = H^0(G/C(T); V_i)$ は G の既約なユニタリ表現となる。Calabi の剛性定理の一般化から、f は $\oplus_i(V_i, h_i)$ による誘導写像と像同値となる。f は充満であるので、$\mathbf{C}^n$ はベクトル空間として $\oplus_i W_i$ と同型である。したがって、$\mathbf{C}^n$ は G のユニタリ表現と考えられ、このとき、f は G-同変写像となる。そこで、f に対して $\mathbf{C}^n = \oplus_i W_i$ を対応させればよいことがわかる。

(V_1, h_1) と (V_2, h_2) を標準接続を Hermite 接続として持つ等質ベクトル束とする。$\phi : V_1 \to V_2$ を G-同変束同型とすれば、ϕ は $\Gamma(V_1)$ から $\Gamma(V_2)$ への G-同変線形同型を誘導する。G-同変束同型の定義から、ϕ は接続も保つので、誘導された G-同変線形同型は正則切断の空間を保つ。ゆえに ϕ は G-同変線形同型 $\Phi : H^0(G/C(T); V_1) \to H^0(G/C(T); V_2)$ を与える。

注意

定理 (竹内, 1978)

$G/C(T)$ から $\mathbf{P}^n$ への充満な正則等長写像の像同値類からなる集合を B とおく。このとき、B は $\mathbf{Z}_+^r$ と同一視される。

すでに述べたように「$\mathbf{P}^n$ への正則等長写像」は「$\mathbf{P}^n$ への正の直線束に対するゲージ条件を満たす正則写像」と言い換えることが出来るので、終域を $\mathbf{P}^n$ に限定しても上の定理の一般化が得られる。

系

$G/C(T)$ から $\mathbf{P}^n$ への半正直線束に対するゲージ条件を満たす充満な正則写像の像同値類からなる集合を C とおく。このとき、C は $\mathbf{Z}_{\geq 0}^r$ と同一視される。

また、$\mathcal{H}_T$ の対象となる正則写像に対しては、直和、テンソル積、双対を定義することも可能となる。

参考文献

- S. Kobayashi, *Homogeneous vector bundles and stability,* Nagoya Math. J. **101** (1986), 37–54.
- S.Kobayashi, “Differential Geometry of Complex Vector Bundles”, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987).
- Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmann manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **77**, (2025), 629-707. 10.2969/jmsj/90609060.
- Y.Nagatomo, *Holomorphic maps into Grassmann manifolds* (*Harmonic maps into Grassmann manifolds III*), Ann. Global Anal. Geom. **60** (2021), 33-63.
- Y.Nagatomo, *The categories of representations and holomorphic maps into Grassmannians*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- M.Takeuchi, *Homogeneous Kähler submanifolds in complex projective spaces*, Japan J. Math. **1** (1978), 171-219.