Pin^c 群および関連する コンパクト Lie 群の極地

田崎 博之

(東京都立大学、筑波大学)

この講演の目的

Pin^c 群および関連するコンパクト Lie 群の極地に関する結果を報告

極大トーラスの性質および Hermann 作用の性質から得られる非連結コンパクト Lie 群の共役に関する標準形を利用

$\mathbb{R}^n$ 内の有向部分空間のなす有向実 Grassmann 多様体のすべてが $Pin^c(n)$ の極地の全体に一致

$Pin^c(n)$ に関連するコンパクト Lie 群の極地も同様の手法で得られる

1　導入

群 G の共役作用：$I_g(x) = gxg^{-1}$ $(g, x \in G)$
X：集合、$f : X \to X$：写像

$$F(f, X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

M：コンパクト Riemann 対称空間
s_p：$p \in M$ における点対称
Chen-Nagano
$F(s_p, M)$ の各連結成分：p に関する極地
極地：全測地的部分多様体
特に、極地は対称空間になる。
M の全体像を把握する上で重要

2　連結コンパクトLie群

定理 2.1. G：連結コンパクトLie群
両側不変Riemann計量を持つ。
このとき、Gは対称空間になる。

$$(*) \qquad s_g(x) = gx^{-1}g \quad (g, x \in G).$$

注意 2.2. たとえGが連結ではなくても$(*)$によって、点対称をG全体で定義できる。そこで、非連結コンパクトLie群も対称空間とみなすことにする。

単位元eにおける点対称：$s_e(g) = g^{-1}$ $(g \in G)$

$F(s_e, G) = \{g \in G \mid g^2 = e\}$：各連結成分が極地

Lie 群をアルファベット大文字、
その Lie 環を対応するドイツ小文字で表す。

トーラス：$U(1)$ のいくつかの積と同型になる Lie 群
極大トーラス：包含関係に関して極大なトーラス

定理 2.3. G：連結コンパクト Lie 群
T：G の極大トーラス　次の等式が成り立つ。

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}, \quad \mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}.$$

T, T'：G の極大トーラス $\Rightarrow$ T, T'：共役

回転群 $SO(2n)$ の極大トーラスを記述するために、

$$r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

とおく。$x_1, \ldots, x_m$ が数や正方行列のときに

$$\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_m \end{bmatrix}$$

と書くことにする。$SO(2n)$ において

$$R_n = \{\mathrm{diag}(r(\theta_1), \ldots, r(\theta_n)) \mid \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}\}$$

は極大トーラスになる。m 次単位行列を 1_m で表す。$\mathbb{R}^{2n}$ の直交複素構造の全体

$$\mathbf{OIII}(n) = \{g \in O(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$$

は $SO(2n)$ に含まれる。

$$J_1 = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} r(\theta) = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

とおいておく。定理 2.3 より

$$\begin{aligned}\mathbf{OIII}(n) &= \bigcup_{g \in SO(2n)} g\{r \in R_n \mid r^2 = -1_{2n}\}g^{-1} \\ &= \bigcup_{g \in SO(2n)} g\{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}g^{-1}\end{aligned}$$

を得る。$\{\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, \pm J_1)\}$ の中で $-J_1$ の個数の偶奇が一致するもの同士は $SO(2n)$ の共役作用で写り合う。$J_n = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1) \in \mathrm{OIII}(n)$ とおいて、

$$\mathrm{DIII}(n) = \{gJ_ng^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$$

で表す。J_n と $J'_n = \mathrm{diag}(-J_1, J_1, \ldots, J_1)$ によって、

$$\mathrm{OIII}(n) = \mathrm{DIII}(n) \cup \{gJ'_ng^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$$

と $\mathrm{OIII}(n)$ を 2 つの連結成分の和集合に分解できる。$\mathrm{OIII}(n)$ の元は交代行列になり、交代行列の不変式 Pfaffian の値によって、これら 2 つの連結成分を識別できる (Tanaka-T.)。

3　非連結コンパクト Lie 群の標準形

群 G の元 g に対して $I_g(x) = gxg^{-1}$ $(x \in G)$.

定理 3.1 (Ikawa, Tanaka-T.). G : コンパクト Lie 群

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \quad : \quad \text{連結成分への分解}$$

$0 \in \Lambda$, G_0 : 単位連結成分、$x_\lambda \in G_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$

T_λ : $F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の極大トーラス

このとき、次の等式が成り立つ。

$$G_\lambda = G_0 x_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} I_g(T_\lambda x_\lambda)$$

$0 \leq k \leq n$ に対して
$x_k := \mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)$、$-1$ は k 個。

$$Q_k(n) = \{g x_k g^{-1} \mid g \in O(n)\}$$
$$= \{g \in O(n) \mid g \text{の固有値, 重複度} : (-1, k), (1, n-k)\}.$$

$Q_k(n) \ni g \mapsto g$ の (-1) 固有空間 $\in G_k(\mathbb{R}^n)$
は $Q_k(n)$ と実 Grassmann 多様体の間の微分同型写像

定理 3.2. $O(n)$ の極地は以下の通り。

$$F(s_{1_n}, O(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} Q_k(n).$$

4　O^c 群の極地

$O^c(n) = U(1)O(n) \subset U(n)$

$O^c(n)$ の極地の記述のため記号を導入する。

Pf : Pfaffian

$R^+(2n) = \{g \in \mathrm{OIII}(n) \mid \mathrm{Pf}(g) = 1\} \cong SO(2n)/U(n)$

$R^-(2n) = \{g \in \mathrm{OIII}(n) \mid \mathrm{Pf}(g) = -1\} = x_1 R^+(n) x_1^{-1}$

($\mathrm{OIII}(n)$ は二つの連結成分 $R^+(2n), R^-(2n)$ を持つ)

$SO^c(n) = U(1)SO(n)$ とすると、$O^c(n)$ の連結成分への分解は次のようになる。

$$O^c(n) = \begin{cases} SO^c(n) \cup SO^c(n)x_1 & (n \text{ は偶数}), \\ SO^c(n) & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

定理 4.1. $O^c(n)$ の極地は以下の通り。

$$F(s_{1_n}, O^c(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} Q_k(n) \cup \sqrt{-1}(R^+(n) \cup R^-(n)).$$

ただし、$\sqrt{-1}(R^+(n) \cup R^-(n))$ は n が偶数のときのみ現れる。

5　$O^c(n)/\{\pm 1_n\}$ の極地

定理 5.1. $\pi_n : O^c(n) \to O^c(n)/\{\pm 1_n\}$: 自然な射影
$O^c(n)/\{\pm 1_n\}$ の極地は以下の通り。:

$$
\begin{aligned}
&F(s_{\pi_n(1_n)}, \pi_n(O^c(n))) \\
&= \bigcup_{0\le k\le n} \pi_n(Q_k(n)) \cup \bigcup_{0\le k\le n} \pi_n(\sqrt{-1}Q_k(n)) \\
&\quad \cup \pi_n(R^+(n)) \cup \pi_n(R^-(n)) \\
&\quad \cup \pi_n(\sqrt{-1}R^+(n)) \cup \pi_n(\sqrt{-1}R^-(n))
\end{aligned}
$$

ただし、$R^+(n), R^-(n)$ は n が偶数のときのみ現れる。

6　Pin^c 群の極地

Cl_n : $\mathbb{R}^n$ の標準内積から定まる Clifford 代数
$Pin(n)$: Cl_n の可逆元全体の群の部分群として定まる

$$Pin^c(n) = U(1)Pin(n) \subset Cl_n \otimes \mathbb{C}$$

$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的正規直交基底とする。
$Pin(n) = Spin(n) \cup Spin(n)e_1$: 連結成分への分解
ここで、$Spin(n) = Pin(n) \cap Cl_n^0 = Pin^0(n)$,
$Spin(n)e_1 = Pin(n) \cap Cl_n^1 = Pin^1(n)$.
$Spin^c(n) = U(1)Spin(n)$ とすると

$Pin^c(n) = Spin^c(n) \cup Spin^c(n)e_1$: 連結成分への分解

$Pin^c(n)$ の極地の記述のため記号を導入する。

$e_{[n]} = e_1 \cdots e_n$ と定める。

$0 < k < n$ に対して

$$P_k(n) = \{v_1 \cdots v_k \in Pin(n) \mid \{v_i\} : \mathbb{R}^n \text{の正規直交系}\}$$

$$\cong \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) : \text{有向実 Grassmann 多様体}$$

$$P_0^+(n) = \{1\}, \quad P_0^-(n) = \{-1\},$$

$$P_n^+(n) = \{e_{[n]}\}, \quad P_n^-(n) = \{-e_{[n]}\}.$$

定理 $6.1.$ $Pin^c(n)$ の極地は以下のとおり。

$$F(s_1, Pin^c(n)) = M_0^+ \cup M_0^- \cup \bigcup_{0<k<n} M_k \cup M_n^+ \cup M_n^-$$

ここで、$0 < k < n$ と $\epsilon = \pm 1$ に対して

$$M_k = \begin{cases} P_k(n) \subset Spin(n) & (k \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 4)), \\ \sqrt{-1}P_k(n) \subset \sqrt{-1}Pin^1(n) & (k \equiv 1 \ (\mathrm{mod} 4)), \\ \sqrt{-1}P_k(n) \subset \sqrt{-1}Spin(n) & (k \equiv 2 \ (\mathrm{mod} 4)), \\ P_k(n) \subset Pin^1(n) & (k \equiv 3 \ (\mathrm{mod} 4)), \end{cases}$$

$$M_0^\epsilon = P_0^\epsilon(n) \subset Spin(n),$$

$$M_n^{\epsilon} = \begin{cases} \boldsymbol{P}_n^{\epsilon}(n) \subset \boldsymbol{Spin}(n) & (n \equiv \mathbf{0}\ (\mathrm{mod}4)), \\ \sqrt{-1}\boldsymbol{P}_n^{\epsilon}(n) \subset \sqrt{-1}\boldsymbol{Pin}^{\mathbf{1}}(n) & (n \equiv \mathbf{1}\ (\mathrm{mod}4)), \\ \sqrt{-1}\boldsymbol{P}_n^{\epsilon}(n) \subset \sqrt{-1}\boldsymbol{Spin}(n) & (n \equiv \mathbf{2}\ (\mathrm{mod}4)), \\ \boldsymbol{P}_n^{\epsilon}(n) \subset \boldsymbol{Pin}^{\mathbf{1}}(n) & (n \equiv \mathbf{3}\ (\mathrm{mod}4)). \end{cases}$$

$\boldsymbol{Spin}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{Pin}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{Spin}(\boldsymbol{n})$ の極地も共通部分をとる
ことでわかる。

7　Ss^c群の極地

$e_{[4m]}$: $Spin^c(4m)$の中心の元

$e_{[4m]}^2 = 1$, $\langle e_{[4m]} \rangle = \{1, e_{[4m]}\}$

$$Ss(4m) = Spin(4m)/\langle e_{[4m]} \rangle,$$
$$Ss^c(4m) = Spin^c(4m)/\langle e_{[4m]} \rangle$$

自然な射影

$$\sigma : Spin(4m) \to Ss(4m),$$
$$\sigma^c : Spin^c(4m) \to Ss^c(4m)$$

は二重被覆準同型写像

$$e_{i,j}(\theta) = \cos\theta + \sin\theta e_i e_j \quad (1 \leq i, j \leq 4m,\ i \neq j),$$

$$\tilde{J}_{2m} = e_{1,2}\left(\frac{1}{4}\pi\right) e_{3,4}\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdots e_{4m-1,4m}\left(\frac{1}{4}\pi\right),$$

$$\tilde{J}'_{2m} = e_{1,2}\left(\frac{3}{4}\pi\right) e_{3,4}\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdots e_{4m-1,4m}\left(\frac{1}{4}\pi\right),$$

$$\tilde{R}^{+}(4m) = \{x\tilde{J}_{2m}x^{-1} \mid x \in Spin(4m)\},$$

$$\tilde{R}^{-}(4m) = \{x\tilde{J}'_{2m}x^{-1} \mid x \in Spin(4m)\}.$$

$\rho : Spin(4m) \to SO(4m)$: 標準的被覆準同型写像

$$\rho(\tilde{R}^{\pm}(4m)) = \{g \in \mathrm{OIII}(2m) \mid \mathrm{Pf}(g) = \pm 1\}$$

$\rho : \tilde{R}^{\pm}(4m) \to \rho(\tilde{R}^{\pm}(4m))$: 微分同型

$\cong SO(4m)/U(2m)$

$$\{\xi \in Spin(4m) \mid \xi^2 = e_{[4m]}\} = \tilde{R}^{+}(4m) \cup (-\tilde{R}^{+}(4m)),$$

$$\{\xi \in Spin(4m) \mid \xi^2 = -e_{[4m]}\} = \tilde{R}^{-}(4m) \cup (-\tilde{R}^{-}(4m))$$

定理 7.1. $Ss^c(4m)$ **の極地は以下の通り。**

$$
\begin{aligned}
F(1, Ss^c(4m)) = {} & \sigma^c(P_0^+(4m)) \cup \sigma^c(P_0^-(4m)) \\
& \cup \bigcup_{1 \le k \le (m+1)/2} \sigma^c(\sqrt{-1} P_{4k-2}(4m)) \\
& \cup \bigcup_{1 \le k \le m/2} \sigma^c(P_{4k}(4m)) \\
& \cup \sigma^c(\tilde{R}^+(4m)) \cup \sigma^c(-\tilde{R}^+(4m)) \\
& \cup \sigma^c(\sqrt{-1} \tilde{R}^-(4m)).
\end{aligned}
$$

ここで、$\sigma^c(P_0^+(4m)), \sigma^c(P_0^-(4m))$ **は極であり、他の極地は以下のとおり。**

$$\sigma^c(\sqrt{-1}P_{4k-2}(4m)) \cong P_{4k-2}(4m) \quad (1 \leq k < (m+1)/2),$$
$$\sigma^c(\sqrt{-1}P_{2m}(4m)) \cong P_{2m}(4m)/\langle e_{[4m]} \rangle \quad (m\text{: 奇数}),$$
$$\sigma^c(P_{4k}(4m)) \cong P_{4k}(4m) \quad (1 \leq k < m/2),$$
$$\sigma^c(P_{2m}(4m)) \cong P_{2m}(4m)/\langle e_{[4m]} \rangle \quad (m\text{: 偶数}),$$
$$\sigma^c(\tilde{R}^+(4m)) \cong \sigma^c(-\tilde{R}^+(4m)) \cong \tilde{R}^+(4m)/\langle e_{[4m]} \rangle,$$
$$\sigma^c(\sqrt{-1}\tilde{R}^-(4m)) \cong \tilde{R}^-(4m).$$

文献

H. Tasaki, Polars of Pin^c groups and related compact Lie groups, to appear in Tohoku Math.J.

H. Tasaki, ——. II, preprint.