特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率

山内 優太

横浜国立大学

(arXiv:2412.19147)

部分多様体幾何とリー群作用 2025

12 月 10 日

Contents

Part I.

『特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率』

[1] Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of submanifolds with singularities*, preprint (arXiv:2412.19147).

Part II.

『余向き付け不可能な曲線の全曲率』

[2] A. Honda, C. Tanaka and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, Adv. Geom. **25** (2025), 93–104.

Part I.

『特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率』

[1] Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of submanifolds with singularities*, preprint (arXiv:2412.19147).

導入

絶対全曲率 (はめ込み)

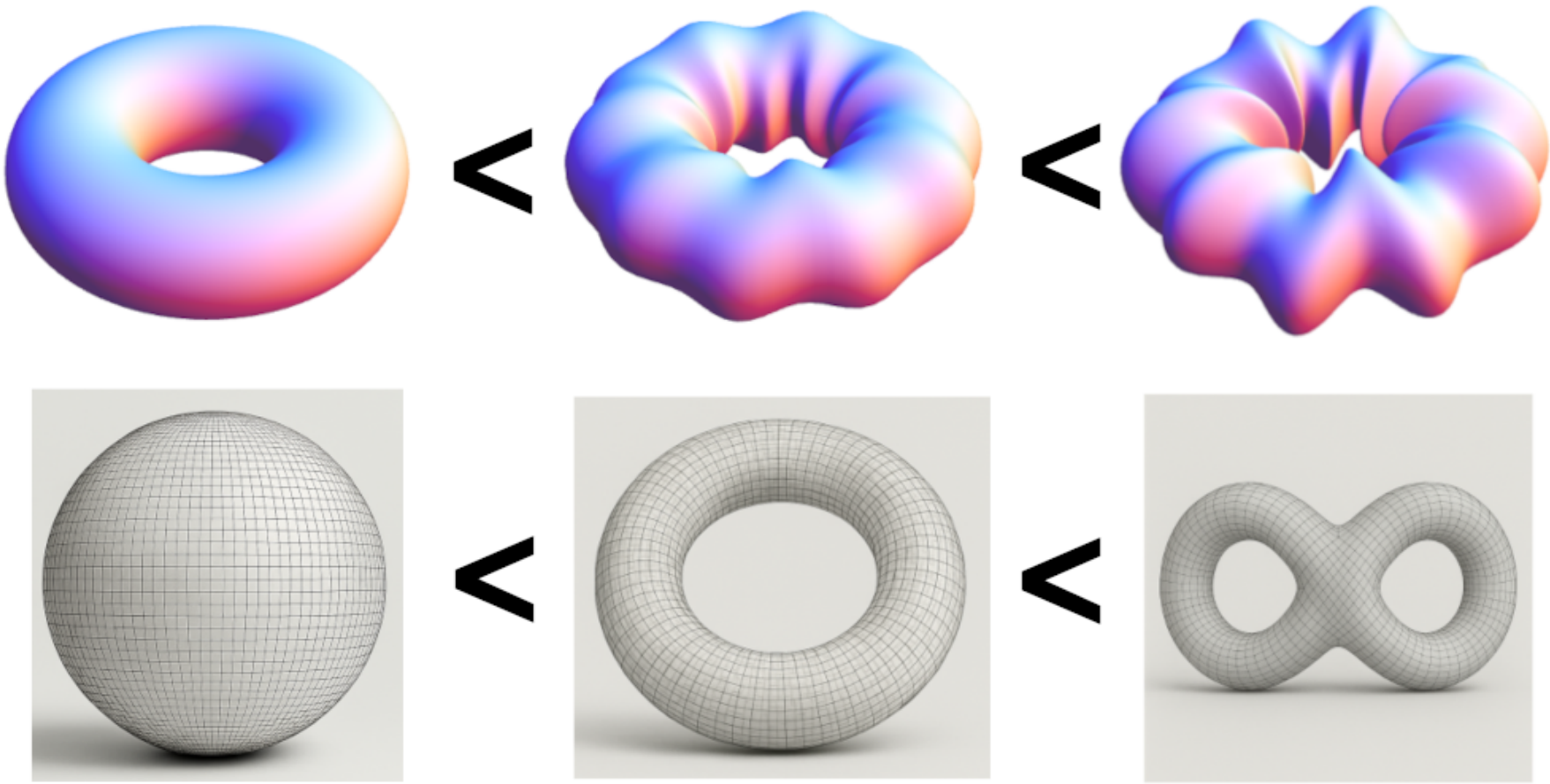
- M . . . 向き付けられた n 次元閉多様体,
- $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ . . . はめ込み $(r \geq 1)$,
- B . . . f の単位法束,
- $G = G(p, \xi) : B \to \boldsymbol{R}$ . . . **Lipschitz-Killing 曲率**.

絶対全曲率 $\tau(M, f)$ は以下で定義される.

$$\tau(M, f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G(p, \xi)| \, d\mu_B.$$

導入

- 絶対全曲率は凹凸の具合や位相的複雑さと共に増加する.



導入

Chern–Lashof の定理 (1957, 1958)

- M . . . 向き付けられた n 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ . . . はめ込み

この時,

$$\tau(M,f) \geq \sum_{q=0}^{n} b_q$$

が成り立つ. ただし, b_q は M の q 次の Betti 数である.
さらに,

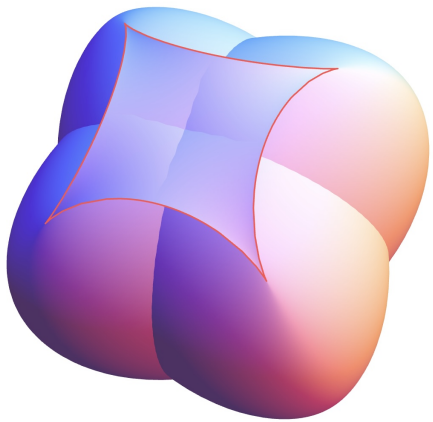
- $\tau(M,f) < 3 \implies M$ は S^n と位相同型,
- $\tau(M,f) = 2 \iff f(M)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれる**凸超曲面**である.

導入

- Kossowski と Scherfner は Chern-Lashof の定理を **特異点をもつ曲面**の場合に拡張した.
- 特異点をもつ曲面の絶対全曲率は以下で定められる.

$$\frac{1}{2\pi}\int_M |K|\,dA + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_f} |\kappa|\,ds,$$

K . . . ガウス曲率, κ . . . 空間曲線の $f|_{\Sigma_f}$ の 曲率関数.



特異点をもつ曲面の図

導入

定理 (Kossowski-Scherfner (2005))

$$\frac{1}{2\pi}\int_M |K|\,dA + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_f} |\kappa|\,ds \geq 2 + 2g(M)$$

が成り立つ．ただし，$g(M)$ は M の種数である．

- 一般の次元，余次元の場合は？
- 特異点をもつ場合の
  凸性と絶対全曲率の最小性の関係は？

導入

主定理 A

- M . . . 向き付け可能な n 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ . . . 余向き付け可能かつ **許容的なフロンタル**

この時,

$$\tau(M,f) \geq \sum_{q=0}^{n} b_q$$

が成り立つ．ただし， b_q は M の q 次の Betti 数である．
さらに,

- $\tau(M,f) < 3 \implies M$ は S^n と位相同型,
- $\tau(M,f) = 2 \implies f(M)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれる.

導入

主定理 B

- M . . . 向き付け可能な n 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ . . . 余向き付け可能なフロンタル.

また,

$$\Sigma_f\,(\neq \emptyset) \text{ は } \textbf{第一種特異点} \text{のみからなる}$$

と仮定する.
この時, $\tau(M,f) = 2 \iff$

- M と Σ_f はそれぞれ S^n と S^{n-1} に位相同型,
- $f(M)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれる**閉凸体**,
- 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ は $f(M)$ の境界と一致する.

フロンタルと特異点

M を n 次元多様体とする．$f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ $(r \geq 1)$ に対し，

- $p \in M$ が **正則点** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\operatorname{rank}(df)_p = n$,
- $p \in M$ が **特異点** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\operatorname{rank}(df)_p < n$.
  - 本講演では，f の正則点集合は M の稠密な集合とする．

定義 (フロンタル, cf. Ishikawa (2018))

C^∞ 級写像 $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ $(r \geq 1)$ が **フロンタル** $\overset{\text{def}}{\iff}$
$\forall p \in M$ に対し，p の近傍 U と写像 $\Pi : U \to \widetilde{Gr}(n, n+r)$ が存在して

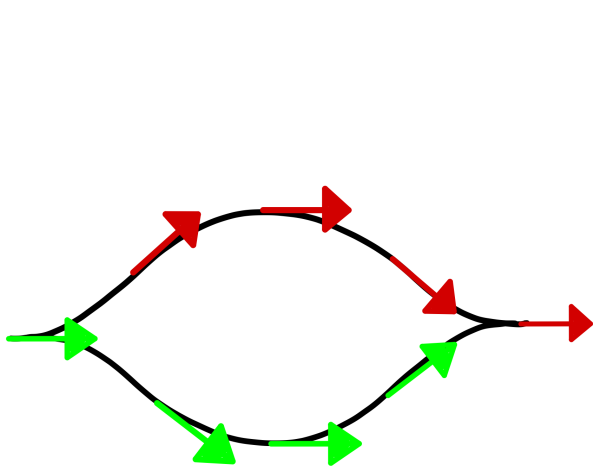
$$(df)_q(X) \in \Pi(q) \qquad (\forall q \in U,\ \forall X \in T_q M)$$

を満たす．
また，Π を **generalized Gauss map** と呼ぶ．

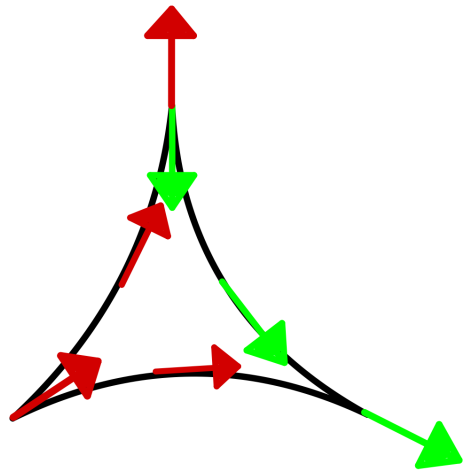
定義 (余向き付け可能)

フロンタル $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ が **余向き付け可能**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ generalized Gauss map Π が M 上で定義可能.



余向き付け可能



余向き付け不可能

- f が余向き付け不可能の場合でも，二重被覆をとることで f を可能とできる．よって，一般性を失うことなく f を余向き付け可能と仮定できる.

フロンタルと特異点

- M を n 次元多様体，$f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ をフロンタルとする．

M の局所座標近傍 $(U; u_1, \cdots, u_n)$ に対し，

$$\lambda := \det(f_1, \cdots, f_n, E_1, \cdots, E_r)$$

とおく．ここで，$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$, $\{E_1, \cdots, E_r\}$ は $\Pi^{\perp}$ の正規直交枠である．

✓ $p \in U$ が **特異点** $\iff$ $\lambda(p) = 0$

定義 (非退化特異点)

特異点 p は **非退化** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(d\lambda)_p \neq 0$

第一種，第二種特異点

Σ_f を特異点集合とする.

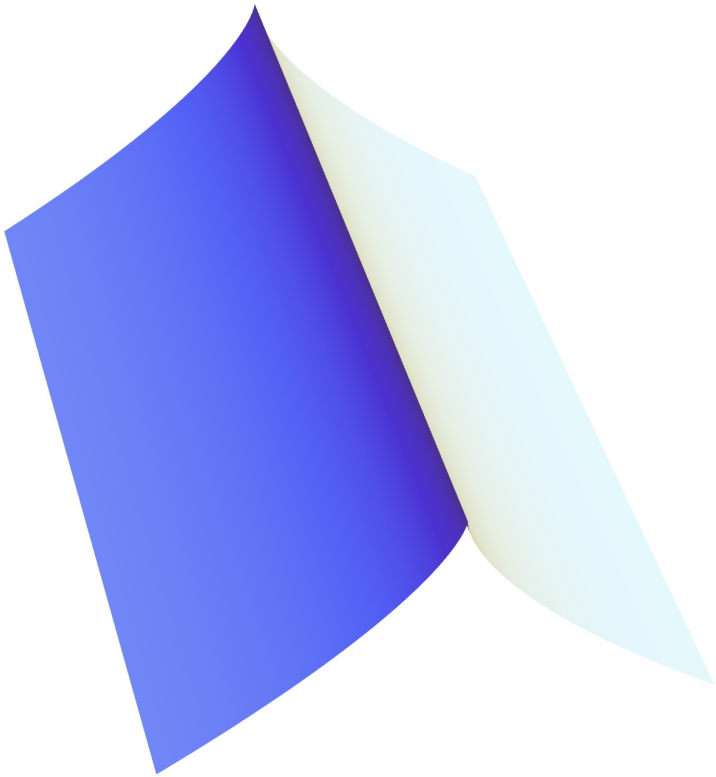
- 特異点がすべて **非退化** $\Rightarrow \Sigma_f$ は M 内の**超曲面** となる.

定義 (第一種，第二種)

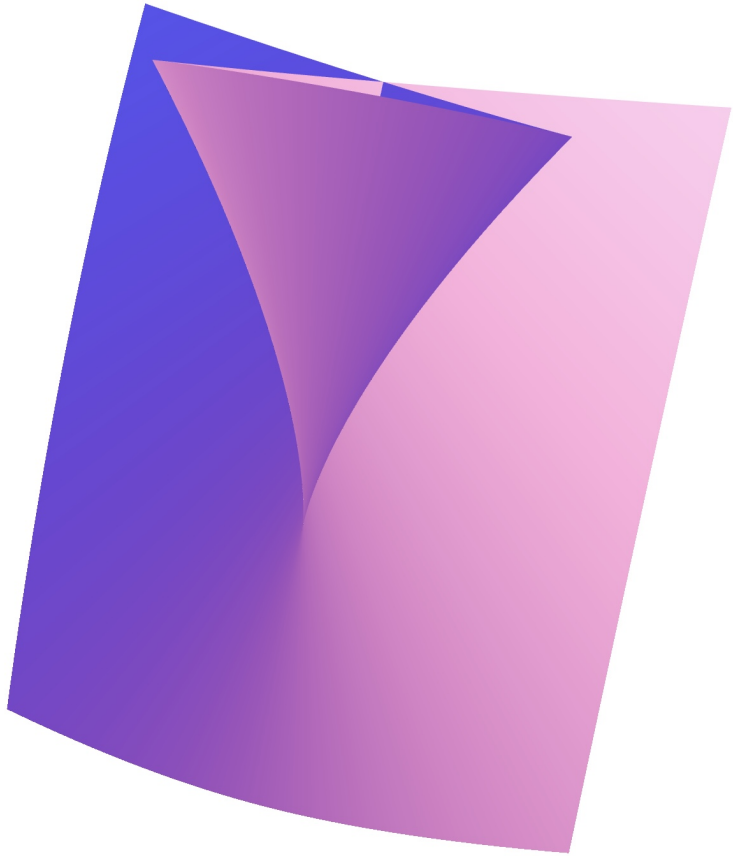
p を **非退化特異点**とする.

- p が **第一種特異点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ker(df)_p \not\subset T_p\Sigma_f$.
- p が **第二種特異点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ker(df)_p \subset T_p\Sigma_f$.

もしすべての特異点が**第一種特異点**ならば，特異点集合の像は正則な部分多様体となる.



カスプ辺
(第 1 種)



ツバメの尾
(第 2 種)

許容的なフロンタル

C_f を 第二種特異点の集合とする.

定義 (許容的なフロンタル)

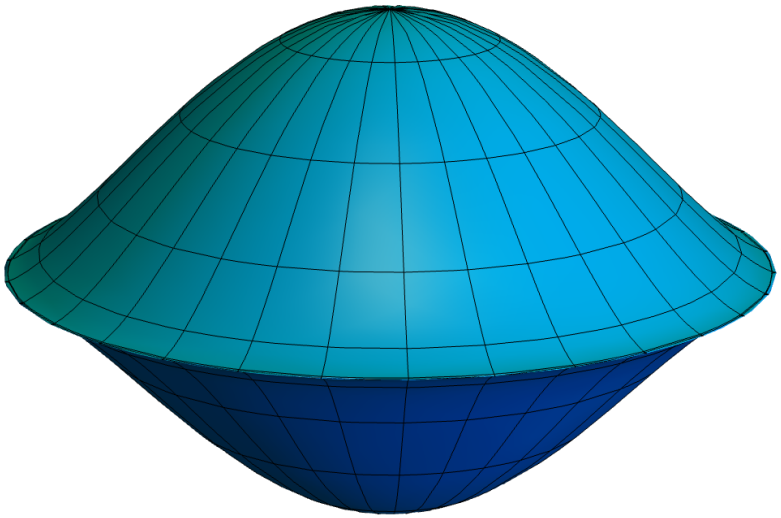
フロンタル $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ 次の条件を満たすならば,
f を**許容的なフロンタル**と呼ぶ.

- すべての特異点が **非退化**.
- Σ_f 内の超曲面 $\mathcal{H}$ が存在して $C_f \subseteq \mathcal{H}$ が成り立つ.

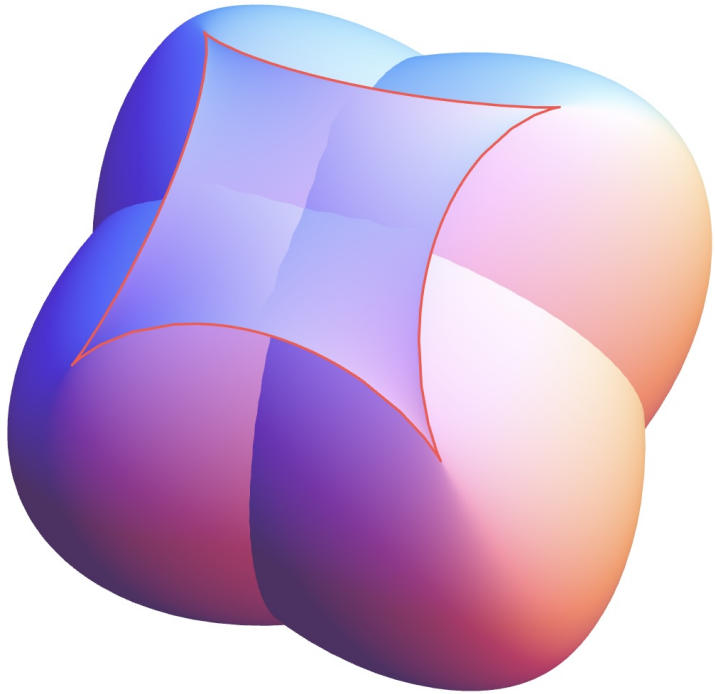
✓ 高々A_k 型特異点をもつフロンタルは**許容的**である.

✓ 第一種特異点のみをもつフロンタルは**許容的**である.

許容的なフロンタル



$C_f = \emptyset$



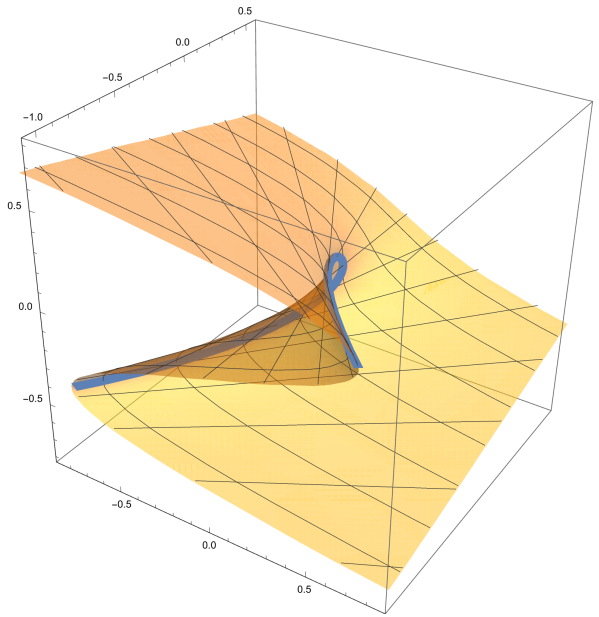
C_f が離散的

例 1 ($\boldsymbol{R}^4$ 内の A_3 型特異点)

$f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ を以下で定められる写像とする.

$$f(t,x,y) = (4t^5 + t^2x + 2t^3y^2, 5t^4 + 2tx + 3t^2y, x, y).$$

- $\Sigma_f = \{(t,x,y) \in \boldsymbol{R}^3 \mid 10t^3 + x + 3ty = 0\}$: f の**特異点集合**.
- $C_f = \{(t, 20t^3, -10t^2) \in \boldsymbol{R}^3 \mid t \in \boldsymbol{R}\}$: **第二種特異点**の集合.
- $C_f = \mathcal{H}$ が Σ_f 内の正則曲線であるので, f は**許容的**である.



特異点集合 Σ_f (黄色い曲面) と C_f (青い曲線).

Lipschitz-Killing 曲率

- $\langle , \rangle$ を $\boldsymbol{R}^{n+r}$ の標準的な内積,
- $\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$ を $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^{n+r}$ のノルムとする.

generalized Gauss map Π に対し,

$$P : B \to M, \quad B := \bigcup_{p \in M} \{\boldsymbol{u} \in \Pi^{\perp}(p) \mid \|\boldsymbol{u}\| = 1\},$$

を f の**単位法束**と呼ぶ.

Lipschitz-Killing 曲率

$(p, \xi) \in B \quad (p \in M \setminus \Sigma_f)$ において
Lipschitz-Killing 曲率 $G(p, \xi)$ を $G(p, \xi) := \det A_\xi$ で定める.
ただし A_ξ は $\xi \in \Pi^{\perp}(p)$ に関する型作用素とする.

✓ **Lipschitz-Killing 曲率** は一般の次元及び余次元における
ガウス曲率の一般化である.

Lipschitz-Killing 曲率

- $\nu : B \to S^{n+r-1};\ (p,\xi) \mapsto \xi$ を **標準的な Gauss 写像**と呼ぶ.

$d\mu_{S^{n+r-1}}$ を S^{n+r-1} の体積要素とし, $d\mu_B$ を B の体積要素とする.
この時 $d\mu_{S^{n+r-1}}$ の ν の引き戻しについて以下が成り立つ.

$$\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}} = (-1)^n G(p,\xi)\, d\mu_B \qquad (p \in M \setminus \Sigma_f).$$

✓ G は**正則点集合**上でのみ定義可能だが，$G\, d\mu_B$ は**特異点集合**を越えて B 全体に定義することができる.

命題

$|G(p,\xi)|\, d\mu_B$ は B 上の連続な $(n+r-1)$ 次微分形式となる.

絶対全曲率

$f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を**許容的なフロンタル**とする.

命題

$\bar{f} = f|_{\Sigma_f}$ を f の Σ_f への制限とする.
この時 $\bar{f} : \Sigma_f \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ はフロンタルとなる.

- $\bar{B}$ を $\bar{f}$ の単位法束, $\bar{G}$ を $\bar{f}$ の Lipschitz-Killing 曲率とする.

定義

M を向き付けられた n 次元閉多様体とする.
余向き付け可能かつ許容的なフロンタル $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ に対し,
絶対全曲率 $\tau(M,f)$ を以下で定める.

$$\tau(M,f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G(p,\xi)|\, d\mu_B + \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{\bar{B}} |\bar{G}(q,\eta)|\, d\mu_{\bar{B}}.$$

絶対全曲率

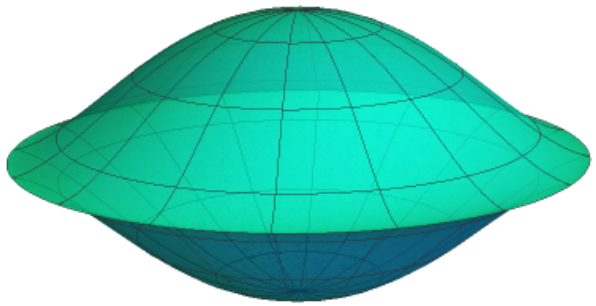
- もし正則点集合上の絶対全曲率のみを考えた場合，
  非自明な下限が存在しない．

例 2

$a > 0$ に対し，$f_a : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を以下で定める．

$$f_a(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n, a(x_{n+1})^3).$$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(S^n)} \int_B |G(p,\xi)|\, d\mu_B < \frac{12a\,\mathrm{vol}(S^{n-1})}{\mathrm{vol}(S^n)}.$$



主定理 A

主定理 A

- M . . . 向き付け可能な n 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ . . . 余向き付け可能かつ **許容的なフロンタル**

この時,

$$\tau(M,f) \geq \sum_{q=0}^{n} b_q$$

が成り立つ．ただし， b_q は M の q 次の Betti 数である.
さらに,

- $\tau(M,f) < 3 \implies M$ は S^n と位相同型,
- $\tau(M,f) = 2 \implies f(M)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれる.

主定理 A の証明

- 単位ベクトル $\boldsymbol{u} \in S^{n+r-1}$ に対し，
  高さ関数 $h_{\boldsymbol{u}} : M \to \boldsymbol{R}$ を $h_{\boldsymbol{u}}(p) := \langle f(p), \boldsymbol{u} \rangle$ で定める．

命題

許容的なフロンタル $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ に対し，S^{n+r-1} の部分集合

$$Q = \{\boldsymbol{u} \in S^{n+r-1} \mid h_{\boldsymbol{u}} \text{ は Morse 関数でない } \}.$$

は測度 0 となる．

- $\#\mathrm{crit}(M, h_{\boldsymbol{u}})$ は $h_{\boldsymbol{u}}$ の臨界点の数を表すとする．

許容的なフロンタルに対し次の等式が成り立つ．

$$\tau(M,f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{S^{n+r-1} \setminus Q} \#\mathrm{crit}(M, h_{\boldsymbol{u}})\, d\mu_{S^{n+r-1}}.$$

主定理 A の証明

- Morse の不等式より，$\forall \boldsymbol{u} \in S^{n+r-1} \setminus Q$ に対して

$$\#\operatorname{crit}(M, h_{\boldsymbol{u}}) \geq \sum_{q=0}^{n} b_q$$

が成り立つ.

- 両辺を $S^{n+r-1} \setminus Q$ 上で積分することで次を得る.

$$\tau(M,f) = \frac{1}{\operatorname{vol}(S^{n+r-1})} \int_{S^{n+r-1}\setminus Q} \#\operatorname{crit}(M, h_{\boldsymbol{u}})\, d\mu_{S^{n+r-1}} \geq \sum_{q=0}^{n} b_q.$$

主定理 A の証明

$\tau(M,f) < 3 \implies M \cong S^n$ の証明

- もし $\tau(M,f) < 3$ ならば,
  $\{\boldsymbol{u} \in S^{n+r-1} \mid \#\,\mathrm{crit}(M, h_{\boldsymbol{u}}) = 2\}$ は空でない.
- よって, Reeb の定理より $M \cong S^n$ が成り立つ.

$\tau(M,f) = 2 \implies (f(M) \subset (n+1)$ 次元平面) の証明

- もし $f(M)$ が任意の $(n+r-1)$ 次元アファイン部分空間に
  含まれない $(\Rightarrow)\ \tau(M,f) > 2$ が成り立ち, 矛盾である.
- $(\Rightarrow) f(M)$ は $(n+r-1)$ 次元アファイン部分空間にに含まれる.
- 帰納的に繰り返すことにより,
  $f(M)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれる.

主定理 B

- M . . . 向き付け可能な n 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ . . . 余向き付け可能なフロンタル.

また,

$$\Sigma_f\,(\neq \emptyset) \text{ は } \textbf{第一種特異点} \text{のみからなる}$$

と仮定する.
この時, $\tau(M,f) = 2 \iff$

- M と Σ_f はそれぞれ S^n と S^{n-1} に位相同型,
- $f(M)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれる**閉凸体**,
- 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ は $f(M)$ の境界と一致する.

主定理 B の証明

- すべての特異点が第一種特異点ならば，$\bar{f} = f|_{\Sigma_f}$ は **はめ込み** となる．
- この時，$\int_{\bar{B}} |\bar{G}|\, d\mu_{\bar{B}} \,/\, \mathrm{vol}(S^{n+r-1}) \geq 2$

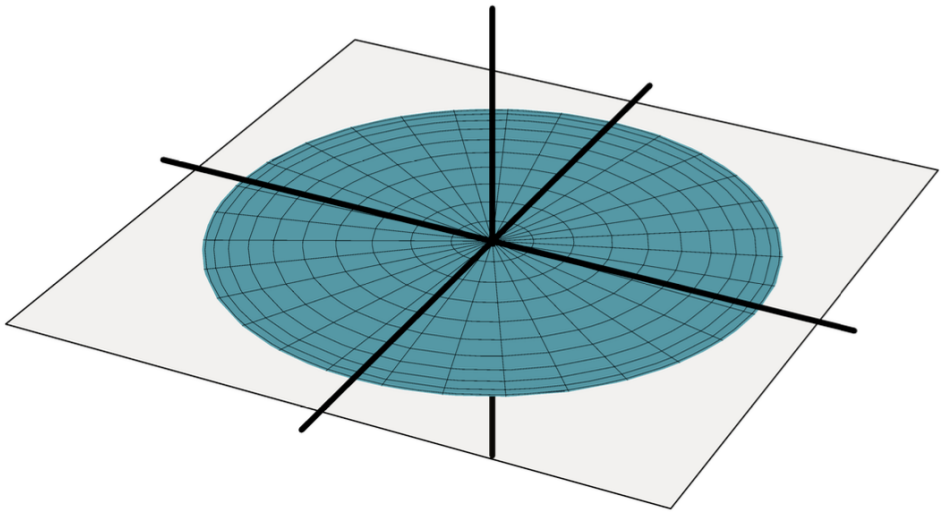
$$\tau(M,f) = 2 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \displaystyle\int_B |G|\, d\mu_B = 0, \\ \dfrac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \displaystyle\int_{\bar{B}} |\bar{G}|\, d\mu_{\bar{B}} = 2. \end{cases}$$

- Chern–Lashof の定理より $f(\Sigma_f)$ は n **次元平面** $\mathcal{P}$ 内の**凸超曲面**となる．
- 加えて，$f(M \setminus \Sigma_f)$ は $\mathcal{P}$ における $f(\Sigma_f)$ の内部に一致する．

例 3

$f : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}; (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, 0)$

- $\Sigma_f = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$
- すべての特異点が 第一種特異点である.
- $\tau(S^n, f) = 2$



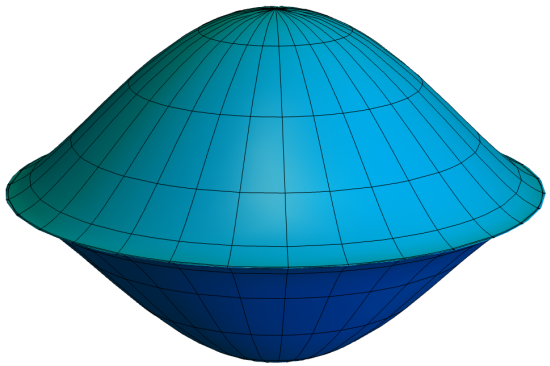
f の $n = 2$ の場合の像

2次元の場合

- $n=2$ の場合，f が**許容的なフロンタル** $\Longleftrightarrow$
  - すべての特異点が**非退化特異点**
  - C_f が Σ_f 内の離散集合
- $n=2$ かつ $r=1$ の場合，$\tau(M,f)$ は以下で表される．

$$\tau(M,f)=\frac{1}{2\pi}\int_M |K|\,dA+\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_f}|\kappa|\,ds$$

K . . . ガウス曲率，κ . . . 空間曲線の $f|_{\Sigma_f}$ の 曲率関数．



2 次元の場合

定理 (Kossowski–Scherfner (2005))

- M . . . 向き付け可能な 2 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^3$ . . . 余向き付け可能な波面

また,

- 特異点をすべて 非退化
- 第二種特異点の集合が Σ_f 内の離散集合

とする.
この時

$$\frac{1}{2\pi}\int_M |K|\, dA + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_f} |\kappa|\, ds \geq 2 + 2g(M)$$

が成り立つ. ただし $g(M)$ は M の種数である.

✓ 波面 = フロンタルのルジャンドル持ち上げ

系 C

- M . . . 向き付け可能な 2 次元閉多様体
- $f : M \to \boldsymbol{R}^3$ . . . 余向き付け可能な**フロンタル**

また,

- 特異点をすべて **非退化**
- **第二種特異点**の集合が Σ_f 内の離散集合

とする.
この時

$$\frac{1}{2\pi}\int_M |K|\,dA + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_f} |\kappa|\,ds \geq 2 + 2g(M)$$

が成り立つ. ただし $g(M)$ は M の種数である.
さらに，すべての特異点が第一種特異点 かつ $\tau(M,f) = 2$ ならば $f(M)$ は 2 次元アファイン部分空間内の閉凸体となる.

1 次元の場合

系 D

すべての特異点が**非退化**であるような
余向き付け可能な閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^{1+r}$ に対し,

$$\tau(S^1, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{S^1} |\kappa| \, ds + \#\Sigma_\gamma \geq 2$$

が成り立つ．さらに，Σ_γ が空でないならば
$\tau(S^1, \gamma) = 2 \iff \gamma$ は線分かつ $\#\Sigma_f = 2$.

- $\Sigma_f = \emptyset$ (γ は 正則曲線)
  $\Rightarrow \int_{S^1} |\kappa| \, ds \geq 2\pi$ が成り立つ (**Fenchel の定理**).
- $\Sigma_f \neq \emptyset \Rightarrow \#\Sigma_f \geq 2$ (**余向き付け可能性**より)
  --→ **系 D の不等式は自明**

Q. γ が**余向き付け不可能**な場合はどうなるのか？

Part II.

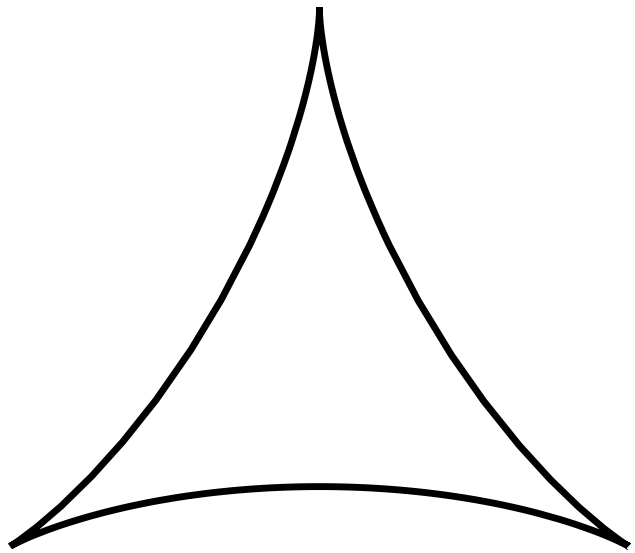
『余向き付け不可能な曲線の全曲率』

- A. Honda, C. Tanaka and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, Adv. Geom. **25** (2025), 93–104.

主定理 E (Honda–Tanaka–Yamauchi [2])

余向き付け不可能な閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n$ の全曲率は π 以上であり，等号成立条件は γ が次の条件を満たすことである．

- γ は平面内のフロンタル，
- γ が L-convex，
- γ の回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$．



全曲率 π の閉フロンタル

ここからは 1 次元の場合について考える.

- $M = S^1, \quad (S^1 = \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z})$
- $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n \cdots$ **閉フロンタル**
  $\iff \gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n \cdots$ 2π **周期**のフロンタル

フロンタルの定義より,
ある **単位接ベクトル場** $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{R} \to S^{n-1}$ が存在して,

$$\gamma'(t) \parallel \boldsymbol{e}(t) \quad (t \in \boldsymbol{R})$$

が成り立つ.

- 閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n$ が **余向き付け可能**
  $\iff \exists\, 2\pi$ **周期** の単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e} : S^1 \to S^{n-1}$
- 閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n$ が **余向き付け不可能**
  $\iff \exists\, \boldsymbol{e} : \boldsymbol{R} \to S^{n-1}$ が存在して $e(t + 2\pi) = -e(t) \quad (\forall t \in \boldsymbol{R})$

定義

$\boldsymbol{R}^n$ 内のフロンタル γ に対して
曲率関数 κ を正則点集合上で以下で定める.

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2 - \langle\gamma', \gamma''\rangle^2}}{\|\gamma'\|^3}$$

- $\kappa(t)\|\gamma'(t)\| = \|\boldsymbol{e}'(t)\|$
- $\kappa\, ds = \kappa(t)\|\gamma'(t)\|\, dt$ は S^1 上の連続な 1 次微分形式となる.

閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n$ に対し, γ の**全曲率** を以下で定める.

$$T(\gamma) := \int_{S^1} \kappa(t)\|\gamma'(t)\|\, dt.$$

なお,

$$\tau(S^1, \gamma) = \frac{1}{\pi} T(\gamma) + \#\Sigma_\gamma$$

が成り立つが, ここでは $T(\gamma)$ を中心に扱う.

- 単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ は S^{n-1} 上の曲線となる.

$\mathcal{L}(\boldsymbol{e})$ を曲線 $\boldsymbol{e} : [0, 2\pi] \to S^{n-1}$ の**長さ**とする.
この時 $\mathcal{L}(\boldsymbol{e})$ は **全曲率** $T(\gamma)$ と一致する，すなわち,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{e}) = T(\gamma).$$

- もし γ が **余向き付け不可能**ならば,
  曲線 $\boldsymbol{e}$ は S^{n-1} の任意の超大球面と共通部分をもつ.

補題 (Rutishauser–Samelson (1948))

L を S^{n-1} 上の C^1 級の閉曲線 C の長さとする.
もし $C \cap g \neq \emptyset$ が S^{n-1} の任意の**超大球面** g に対して成り立つならば,
次が成り立つ.

$L > 2\pi$ または ($L = 2\pi$ かつ C は二つの大円の半円弧からなる．)

- Rutishauser–Samelson の補題より，$T(\gamma) = \mathcal{L} \geq \pi$.
- もし $T(\gamma) = \pi$ ならば，γ は **平面上のフロンタル**.

余向き付け不可能な $\boldsymbol{R}^2$ 上の閉フロンタル γ に対し，
$T(\gamma) = \pi$ はいつ成り立つか？
⇢ γ の 回転数 と L-convexity が鍵

- **余向き付け不可能な $\boldsymbol{R}^2$ 上の閉フロンタル γ に対し，**
  角度関数 θ を次のように定める．

$$\boldsymbol{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

- $\boldsymbol{e}(2\pi) = -\boldsymbol{e}(0)$
  $\Rightarrow$ ある $m \in \boldsymbol{Z}$ が存在して次が成り立つ．

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = (2m+1)\pi = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

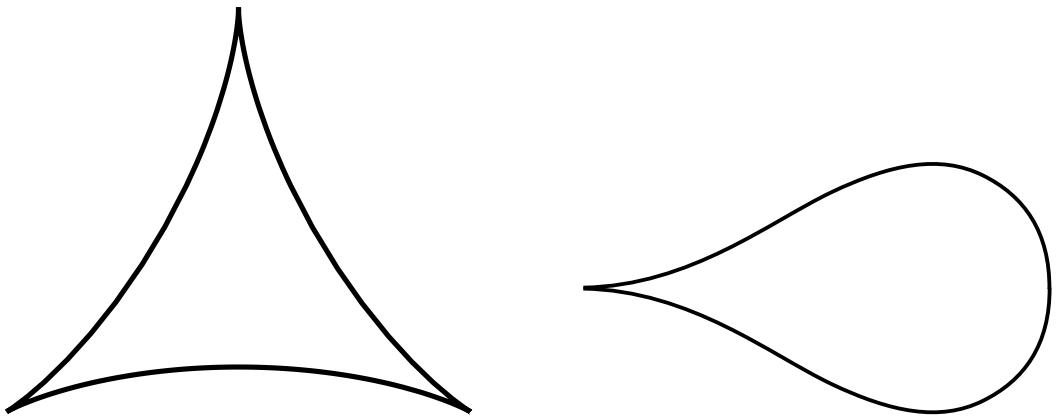
定義

γ の**回転数** i_γ を $i_\gamma := m + \dfrac{1}{2}$ によって定義する．

定義

$\boldsymbol{R}^2$ 内のフロンタル γ が L-convex $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\ell(t)$ が常に非負または非正，ただし $\ell(t) := \det(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}')$.

- $\ell(t) = \tilde{\kappa}(t)\|\gamma'(t)\|$ が成り立つ．ただし
  $\tilde{\kappa}(t) := \det(\gamma'(t), \gamma''(t))/\|\gamma'(t)\|^3$ は符号付き曲率関数.
- 特に，$\tilde{\kappa}(t)$ が符号を変えない $\Longleftrightarrow$ γ は L-convex.

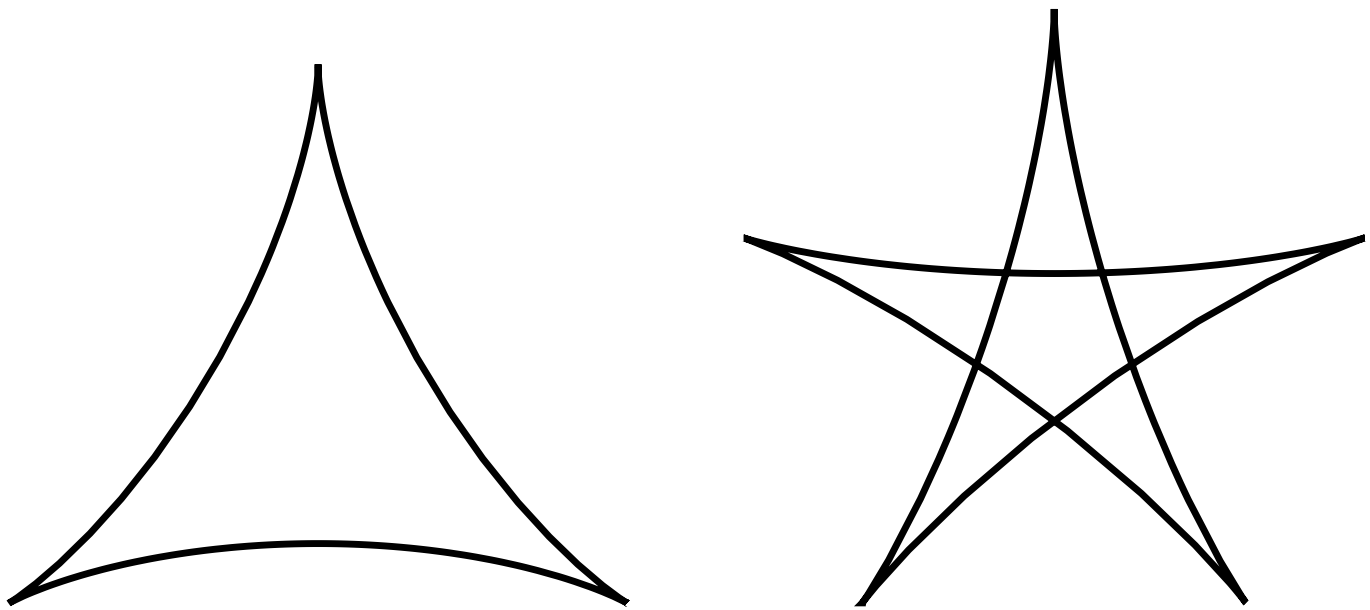


L-convex　　L-convex でない

主定理 E (Honda–Tanaka–Yamauchi [2])

余向き付け不可能な閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n$ の全曲率は π 以上であり，等号成立条件は γ が次の条件を満たすことである．

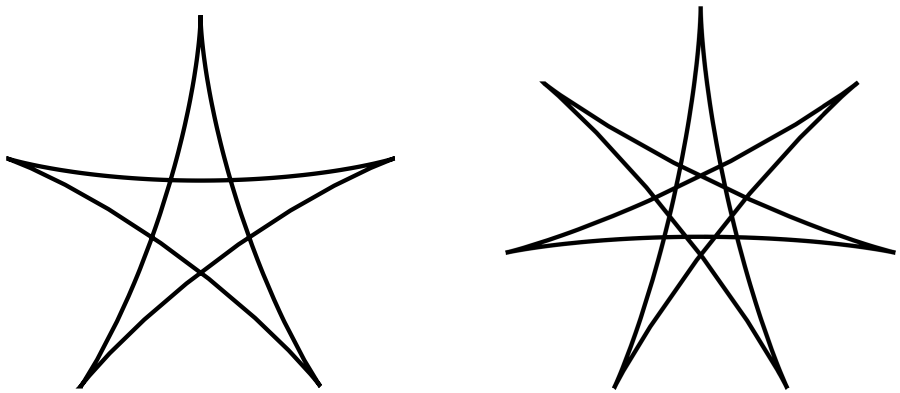
- γ は平面内のフロンタル，
- γ が L-convex，
- γ の回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$.



Fenchel の定理

$\boldsymbol{R}^n$ 内の正則閉曲線 γ に対し $T(\gamma) \geq 2\pi$ が成り立つ.
等号成立条件は γ が卵形線 (単純閉凸曲線) となることである.

- しかし，余向き付け不可能な場合では $T(\gamma) = \pi$ かつ **単純でない**閉曲線が存在する.



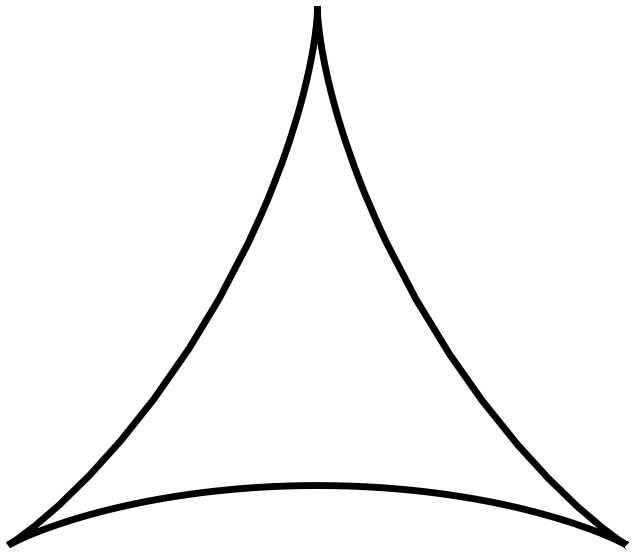
Q. $T(\gamma) = \pi$ **が成り立つ余向き付け不可能な閉フロンタル** γ **は いつ単純閉曲線になるのか？**

主定理 F (Honda–Tanaka–Yamauchi [2])

γ を **余向き付け不可能**な閉フロンタルとし，$T(\gamma) = \pi$ かつすべての特異点がカスプだと仮定する．また，N_γ をカスプの数とする．この時，次が成り立つ．

(1) N_γ は 3 以上の**奇数**となる．

(2) $N_\gamma = 3 \iff \gamma$ が単純閉曲線．

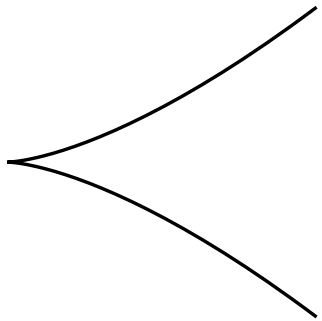


$N_\gamma = 3$ のフロンタル

定義

$\gamma(t) : I \to \boldsymbol{R}^2$ ... なめらかな曲線
特異点 $t = c$ が **カスプ**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ ある座標変換 $s = \psi(t)$ と $\boldsymbol{R}^2$ の局所微分同相写像 Ψ が存在して次を満たす.

$$\psi(c) = 0, \quad \Psi(\gamma(c)) = \boldsymbol{0}, \quad \Psi \circ \gamma \circ \psi^{-1}(s) = (s^2, s^3)$$



もし閉フロンタル γ の特異点がすべてカスプならば

γ が **余向き付け不可能** $\iff$ N_γ は **奇数**.

主定理Fの証明

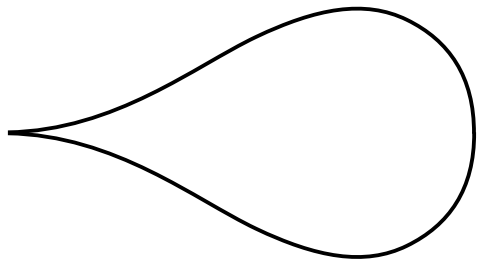
補題 a (cf. Alencar–Santos–Silva Neto (2022))

$\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{R}^2$ をフロンタルとする.

$$\gamma(0) = \gamma(1)$$

かつ $\gamma|_{(0,1)}$ が正則となるとする.
この時, $T(\gamma) > \pi$ が成り立つ.

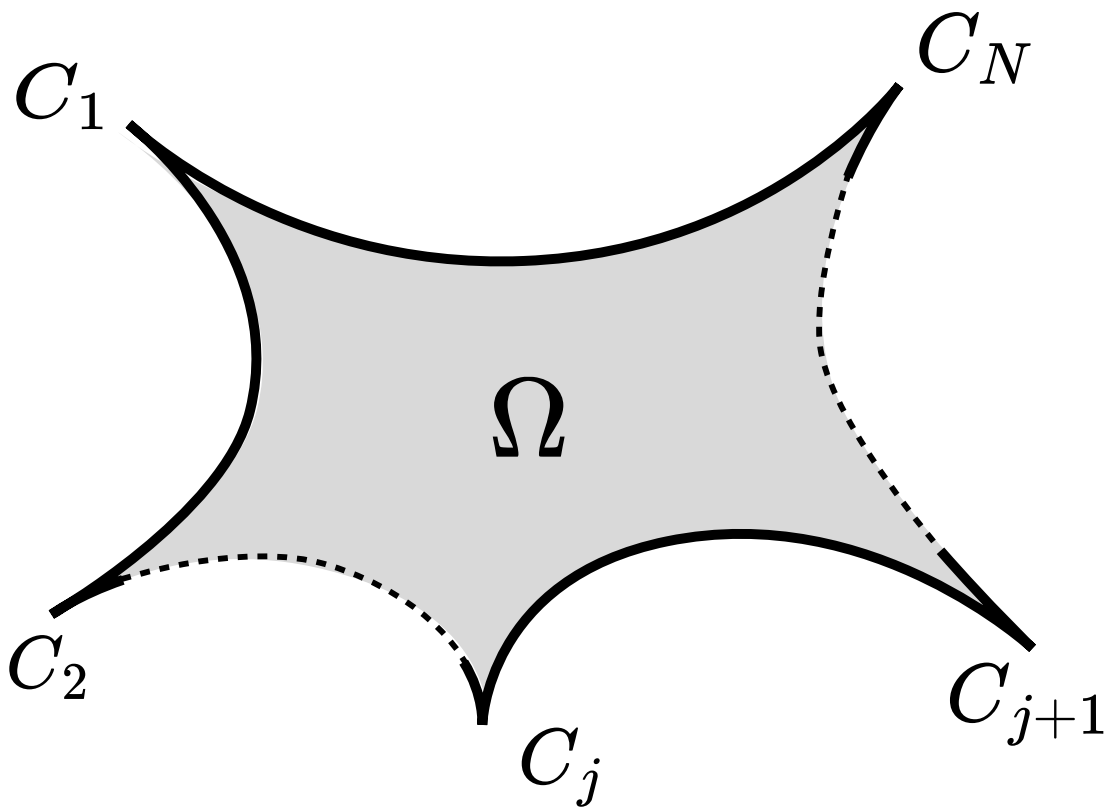
- 主定理 F-(1) は 補題 a から成り立つ.
  - もし特異点がすべてカスプならば, N_γ は奇数.
  - もし $N_\gamma = 1$ なら, 補題 a より $T(\gamma) > \pi$ が成り立ち, 矛盾.
  - よって, N_γ は 3 以上の奇数.



主定理Fの証明

γ が **単純閉曲線** $\Rightarrow N_\gamma = 3$

- Ω を γ が囲う領域とする.



- Gauss–Bonnet の定理より，$\partial\Omega = \gamma$ のカスプの数は 3 となる
  $\Rightarrow N_\gamma = 3$.

主定理Fの証明

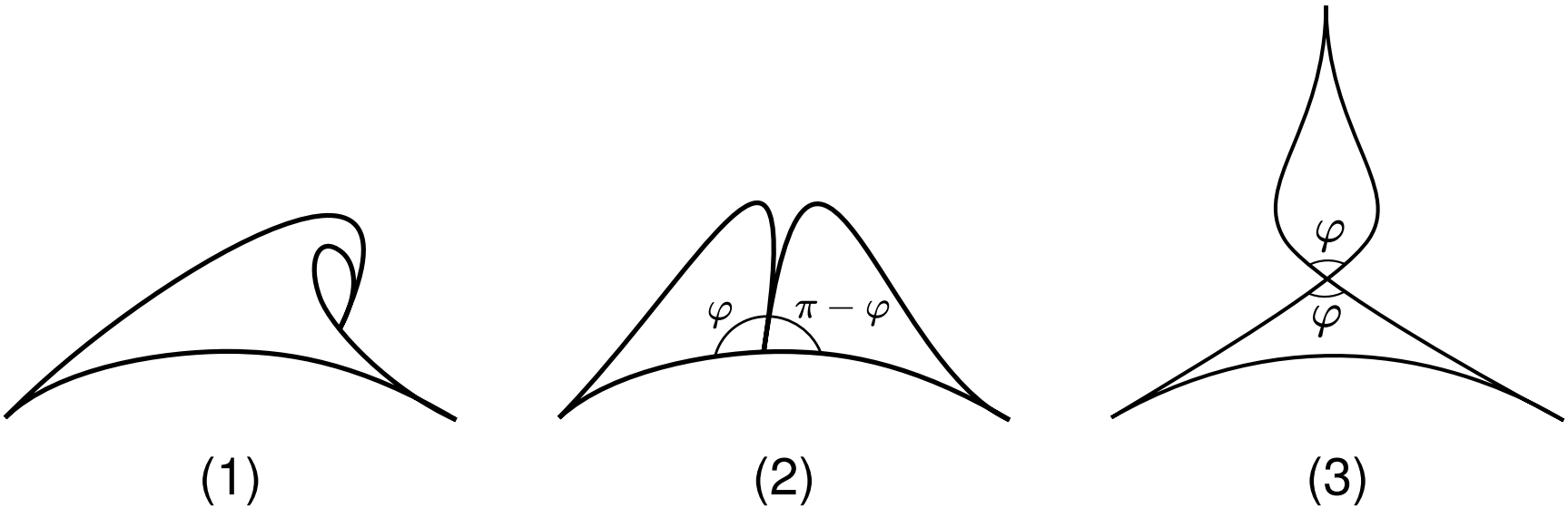
$N_\gamma = 3 \Rightarrow \gamma$ が **単純閉曲線**

- $N_\gamma = 3$ & γ が 単純閉曲線でない $\Longrightarrow T(\gamma) > \pi$ を示せばよい.
  - γ が $t = 0, c_1, c_2 (0 < c_1 < c_2 < 2\pi)$ にカスプをもち,
  - $\exists p, q \in [0, 2\pi)$ が

$$\gamma(p) = \gamma(q), \qquad p < q$$

を満たすとする.

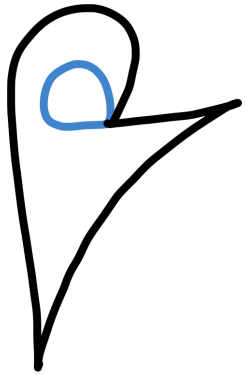
この時, γ は次の三つの場合に分かれる：



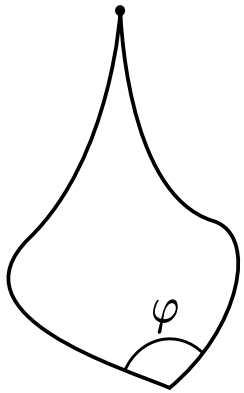
(1) (2) (3)

主定理Fの証明

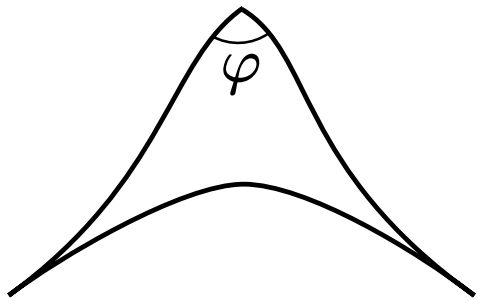
(1) の場合，補題 a の仮定を満たす部分が存在するので， $T(\gamma) > \pi$.



続いて，次の二つの閉曲線の全曲率を調べる.



カスプが一つの曲線



カスプが二つの曲線

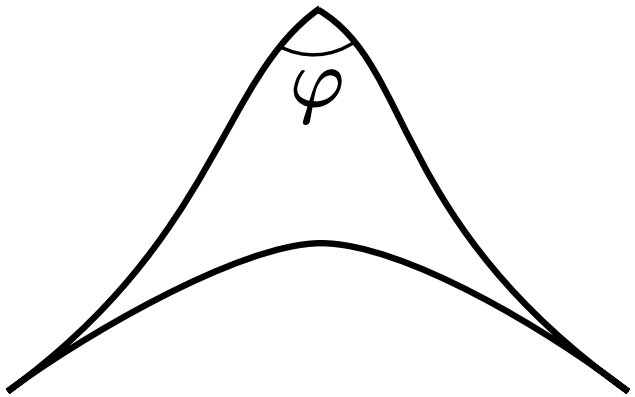
主定理Fの証明

補題 b

フロンタル $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{R}^2$ が次の条件を満たすとする.

- $\gamma(0) = \gamma(1)$,
- $c_1, c_2 \in (0,1)$ $(c_1 < c_2)$ がカスプ,
- $(0,c_1) \cup (c_1,c_2) \cup (c_2,1)$ が正則点集合

$\varphi \in [0,\pi]$ を γ の端点の角度とする.
この時, $\boxed{T(\gamma) \geq \pi - \varphi}$ が成り立つ.



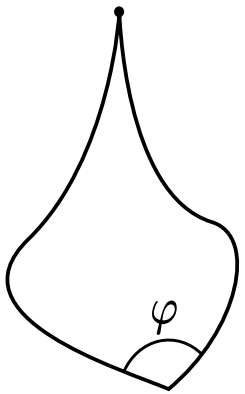
主定理Fの証明

補題 c

フロンタル $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{R}^2$ が次の条件を満たすとする.

- $\gamma(0) = \gamma(1)$,
- $c \in (0,1)$ がカスプ,
- $(0,c) \cup (c,1)$ が正則点集合

$\varphi \in [0,\pi]$ を γ の端点の角度とする.
この時, $\boxed{T(\gamma) > \varphi}$ が成り立つ.



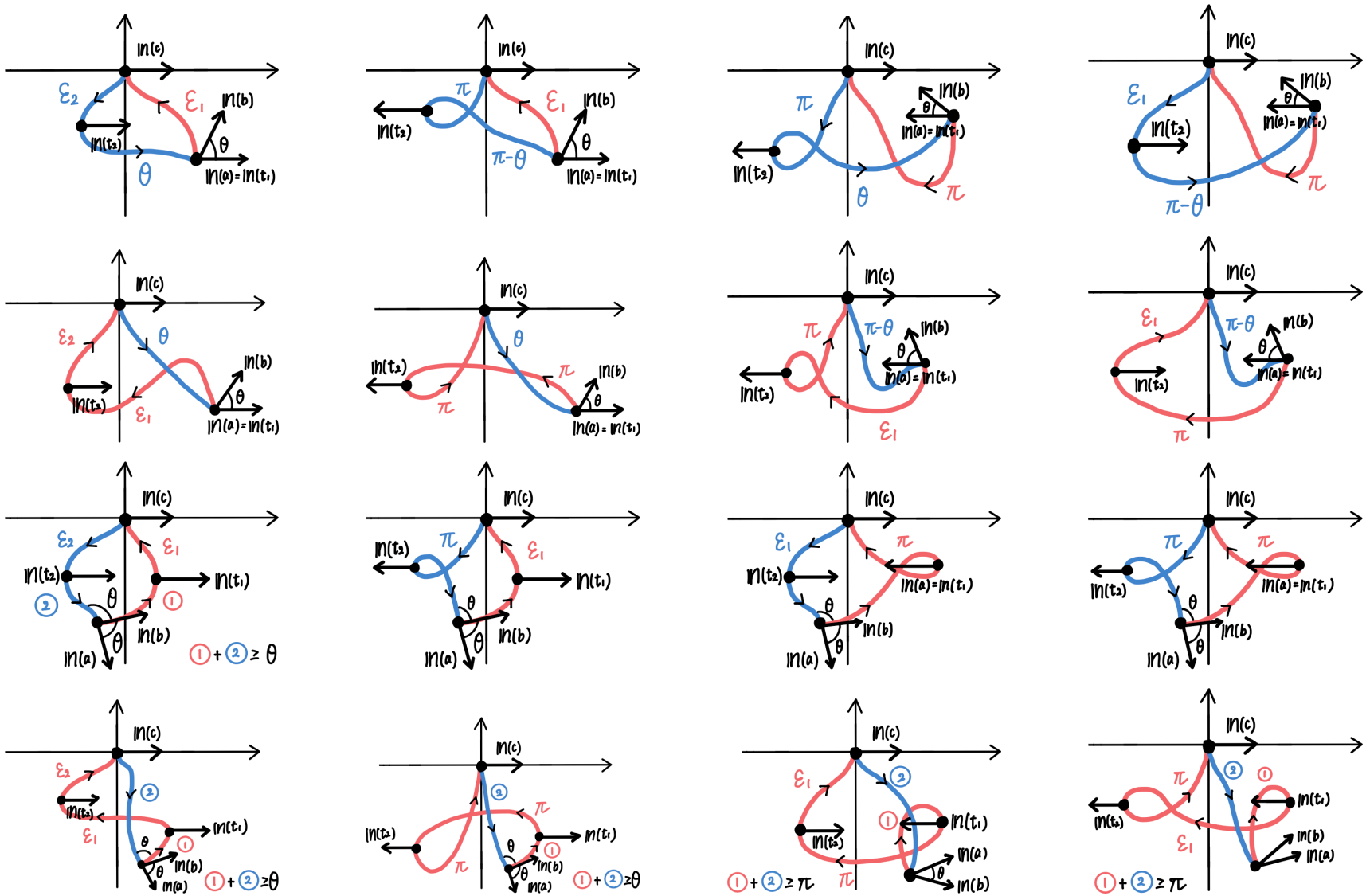
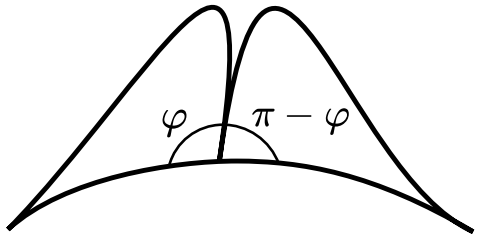


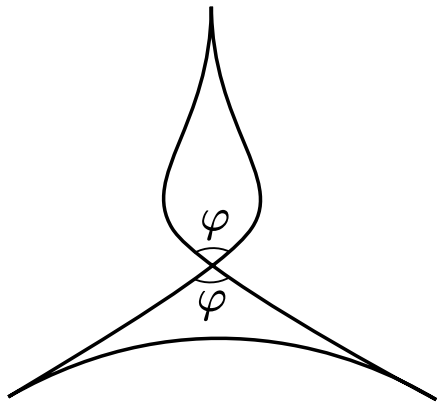
Figure: 補題 c の仮定を満たす曲線は 16 の場合に分けられる.

主定理Fの証明

補題 c より，(2) の場合では $T(\gamma) > \varphi + (\pi - \varphi) = \pi$ が成り立つ．



補題 b と 補題 c より，
(3) の場合では $T(\gamma) > \varphi + (\pi - \varphi) = \pi$ が成り立つ．



よって，γ が単純閉曲線ならば，$N_\gamma = 3$ である．

まとめ

PART I

- **Thm A.** 許容的なフロンタル $f : M \to \boldsymbol{R}^{n+r}$
  - $\tau(M,f) \geq \sum_{q=0}^{n} b_q, \quad \tau(M,f) = 2 \implies f(M) \subset (n+1)$ 次元平面.
- **Thm B.** すべての特異点が 第一種特異点である場合
  - $\tau(M,f) = 2$
    $\Leftrightarrow (M \cong S^n,\ \Sigma_f \cong S^{n-1},\ f(\Sigma_f) = \partial f(M),$
    $f(M)$ が n 次元平面内の**閉凸体**)

PART II

- **Thm E. 余向き付け不可能**な閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^n$
  - $T(\gamma) \geq \pi, \quad T(\gamma) = \pi \Leftrightarrow (\ \gamma \subset$ 平面, $\quad$ L-convex, $\quad i_\gamma = \pm\frac{1}{2}\ ).$
- **Thm F.** $T(\gamma) = \pi$ かつ すべてカスプならば,
  - カスプの数 N_γ は 3 以上の奇数
  - $N_\gamma = 3 \Leftrightarrow \gamma$ が 単純閉曲線

ご清聴ありがとうございました

Y. Yamauchi
The total absolute curvature of submanifolds with singularities,
preprint (arXiv:2412.19147).

A. Honda, C. Tanaka and Y. Yamauchi,
The total absolute curvature of closed curves with singularities,
Adv. Geom. **25** (2025), 93–104.