

20240302

重みつき無限グラフの倉持境界とモスコ収束

加須栄篤（金沢大）

【要旨】 重み付き無限連結グラフと、その上のディリクレ和が有限な関数からなるヒルベルト空間に付随した倉持コンパクト化を考える。このヒルベルト空間上のブーリンクーデニ条件を満たす閉形式で、ディリクレ閉拡大、ノイマン閉拡大、あるいはその中間にあるものを考察の対象とする。これらの閉形式は、部分グラフ上に同様の条件を満たす閉形式を誘導し、また倉持境界に広い意味でのディリクレ形式を誘導する。ただし倉持境界には調和測度による二乗可積分関数なるヒルベルト空間を考えている。この講演では、誘導形式を備えた部分有限グラフの列の(桑江 - 塩谷[2003]の意味による)モスコ収束に関する結果および関連した研究を紹介する。

I. 重み付き無限連結グラフ

II. コンパクト化とディリクレ形式

III. 倉持コンパクト化

IV. 誘導形式とモスコ収束

(V. 関連した最近の結果の紹介)

[I] 重み付き無限グラフ

$X = (X, E, c)$: 無限ネットワーク (重み付きグラフ)

$c : E \rightarrow (0, +\infty)$ (コンダクタンス),

$c_{xy} := c(\{x, y\}), \{x, y\} \in E$

連結+局所有限性 $N(x) = \{y \in X \mid x \sim y\}$ 、

$\#N(x) < +\infty$ ($x \in X$) ($\sum_{y \in X, y \sim x} c_{xy} < +\infty$)

$\ell(X) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R}\}$

$\ell_0(X) = \{u \in \ell(X) \mid \#\{x \in X \mid u(x) \neq 0\} < +\infty\}$

$$\mathcal{E}_X(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in X, x \sim y} c_{xy} (u(x) - u(y))^2$$

$L^{1,2}(X) := \{u \in \ell(X) \mid \mathcal{E}_X(u, u) < +\infty\}$

$L_0^{1,2}(X) := \overline{\ell_0(X)}$ (ノルム $\mathcal{E}_X(u, u) + u(o)^2$ に関する閉包)

【仮定】 $1 \notin L_0^{1,2}(X) (\Leftrightarrow (\text{最小}) \text{ グリーン関数 } G_0(x, y) \text{ が存在。})$

$$\mathcal{E}_X(G_0(x, *), u) = u(x), \quad \forall u \in L_0^{1,2}(X)$$

($1 \in L_0^{1,2}(X)$ とすると、 $L_0^{1,2}(X) = L^{1,2}(X)$ である。このような場合は考えない。)

► ブーリンク–デニ条件 (*) を満たす閉形式

$$\mathcal{E} : D[\mathcal{E}] \times D[\mathcal{E}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(i) \quad L_0^{1,2}(X) \subset D[\mathcal{E}] \subset L^{1,2}(X)$$

$$(ii) \quad \mathcal{E}(u, u) \geq \mathcal{E}_X(u, u), \quad u \in D[\mathcal{E}],$$

$$(iii) \quad \mathcal{E}(u, u) = \mathcal{E}^X(u, u), \quad u \in L_0^{1,2}(X)$$

$$(*) \quad u \in D[\mathcal{E}] \Rightarrow |u| \in D[\mathcal{E}], \quad \mathcal{E}(|u|, |u|) \leq \mathcal{E}(u, u).$$

$$0 \leq u \in D[\mathcal{E}] \Rightarrow u \wedge 1 \in D[\mathcal{E}], \quad \mathcal{E}(u \wedge 1, u \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u, u).$$

【記号】 $(\mathcal{E}^{(N)}, D[\mathcal{E}^{(N)}])$ 、 $(\mathcal{E}^{(D)}, D_0[\mathcal{E}^{(D)}])$

$$D[\mathcal{E}^{(N)}] = L^{1,2}(X), \quad \mathcal{E}^{(N)}(u, u) = \mathcal{E}_X(u, u);$$

$$D_0[\mathcal{E}^{(D)}] = L_0^{1,2}(X), \quad \mathcal{E}^{(D)}(v, v) = \mathcal{E}_X(v, v).$$

► $V : X \rightarrow [0, +\infty)$

$$D[\mathcal{E}_V] = \{u \in D[\mathcal{E}] \mid \sum_{x \in X} V(x) u(x)^2 < +\infty\},$$

$$\mathcal{E}_V(u, w) = \mathcal{E}(u, w) + \sum_{x \in X} V(x) u(x) w(x)$$

【記号】 $D_0[\mathcal{E}_{X;V}] = \overline{\ell_0(X)}$ ($\mathcal{E}_{X;V}$ 位相に関する閉包)

$$H_V D[\mathcal{E}_V] = \{h \in D[\mathcal{E}_V] \mid \Delta h - Vh = 0 \text{ in } X\}.$$

$$\Delta u(x) := \sum_{y \in X; y \sim x} c_{xy}(u(y) - u(x)), \quad x \in X$$

$$D[\mathcal{E}_V] = D_0[\mathcal{E}_{X;V}] + H_V D[\mathcal{E}_V]$$

[II] コンパクト化 とディリクレ形式

- Constantinesque and Cornea(1963), F.-Y. Maeda, (1968)

$$Q \subset \ell_b(X)$$

X の Q -コンパクト化 : コンパクトハウスドルフ空間 X_Q^*

X から X_Q^* の中への位相同型写像があつて、その像と X を同一視すると、 X は X_Q^* において開集合でかつ稠密となっている。さらに $\partial X_Q^* = X_Q^* \setminus X$ とおいて、

- (i) すべての $f \in Q$ は X_Q^* 上の連続関数として拡張する。
- (ii) Q は ∂X_Q^* の 2 点を分離する。

X を直積空間 $\prod_{f \in Q} [-\sup_X |f|, \sup_X |f|]$ へ次のように埋め込む : $x \in X$ に対して, $I_Q[x]$ は $I_Q[x](f) = f(x) \ (f \in Q)$ によって与えられる Π の元。 $X_Q^* = \overline{I_Q(X)}$ と定める。

補題 1. 以下の条件を満たす部分集合 $Q \subset D[\mathcal{E}_V] \cap \ell_b(X)$ が存在する。

(A-1) Q は $\ell_0(X)$ を含み、 $D[\mathcal{E}_V]$ において稠密である。

(A-2) Q 中の可算個の部分集合で、一様収束位相で Q で稠密なものが存在する。

【考察】

(1) (A-2) から X_Q^* は距離付可能である。

(2) $(\mathcal{E}_1 \rightarrow)Q_1, (\mathcal{E}_2 \rightarrow)Q_2, Q_1 \subset Q_2$ ならば、 $X_{Q_1}^*$ は $X_{Q_2}^*$ の商空間である。

▶ PWB法 (Perron, Wiener, Brelot) によって可解
 (resolutive) である ([C-C]): $\phi \in C(\partial M_Q^*) \rightarrow \mathcal{H}_V \phi \in \ell(X)$
 (X 上の V -調和関数, $\Delta \mathcal{H}_V \phi - V \mathcal{H}_V \phi = 0$)

▶ V -調和測度

点 $p \in X$ を固定すると、 ∂M_Q^* 上の V -調和測度 $\nu_{V;p}^{(Q)}$ が定まる。

$$\mathcal{H}_V \phi(p) = \int_{\partial M_Q^*} \phi \, d\nu_{V;p}^{(Q)}, \quad \forall \phi \in C(\partial M_Q^*).$$

以下 $o \in X$ を固定点として、 $\nu_{V;o}^{(Q)} = \nu_V^{(Q)}$ を考える。

- $A \subset \partial X_Q^*$ に対して, $0 \leq \text{Cap}(A) \leq \text{const} \cdot \nu_V^{(Q)}(A)$

命題 2 $\text{Cap}(A) = 0$ となる集合 $A \subset \partial X_Q^*$ を除いて
正則点である。すなわち 任意の $\phi \in C(\partial X_Q)$ に対
して、

$$\lim_{x \in X \rightarrow \xi} \mathcal{H}_V \phi(x) = \phi(\xi), \quad \xi \in \partial X_Q^* \setminus A$$

(Kellogg 性が成り立つ。)

命題3 連続線形写像 $\text{Tr} : D[\mathcal{E}_V] \rightarrow \ell^2(\partial M_Q^*, \nu_V^{(Q)})$ が存在して

(i) $\text{Tr}(u) = u|_{\partial M_Q^*} \ (u \in Q)$

(ii) $\phi \in \ell^2(\partial M_Q^*, \nu_V^{(Q)})$ に対して、

$$\phi \in \text{Tr}(D[\mathcal{E}_V]) \Leftrightarrow \mathcal{H}_V \phi \in H_V D[\mathcal{E}_V]$$

$u \in D[\mathcal{E}_V]$ に対して、 $\text{Tr}(u) = \phi$ とすると、

$$u = g + \mathcal{H}_V \phi \in D_0[\mathcal{E}_{X;V}] \oplus H_V D[\mathcal{E}_V]$$

(iii) $\text{Tr}(u) = 0 \Leftrightarrow u \in D_0[\mathcal{E}_{X;V}]$

(skip)

(iii) $\psi \in \ell^2(\partial M_Q^*, \nu_V^{(Q)})$ に対して、 $h = \mathcal{H}_V \psi$ とおいて、

$$\int_{\partial M_Q^*} \phi^2 d\nu = \left(\int_{\partial M_Q^*} \phi d\nu \right)^2 + \sum_{x \in X} G_X^V(o, x) \left(\sum_{y \in V(x)} c_{xy} (h(x) - h(y))^2 + V(x) h(x)^2 \right)$$

が成り立つ。

III. 倉持コンパクト化

▶ ∂X_Q^* 上の誘導形式

$$D[\mathrm{Tr}\mathcal{E}_V] := \{\mathrm{Tr}(u) \mid u \in D[\mathcal{E}_V]\}$$

$$\mathrm{Tr}\mathcal{E}(\phi, \psi) := \mathcal{E}_V(\mathcal{H}_V\phi, \mathcal{H}_V\psi), \quad (\phi, \psi \in D[\mathrm{Tr}\mathcal{E}_V])$$

命題 4 $(\mathrm{Tr}\mathcal{E}_V, D[\mathrm{Tr}\mathcal{E}_V])$ は $\ell^2(\partial X_Q^*, \nu_V^{(Q)})$ 上の”正則”ディリクレ形式

正確には2つの場合に分けて考える。

(i) $1 \in D[\mathcal{E}_V]$ ママ

(ii) $1 \notin D[\mathcal{E}_V]$, $\mathrm{Tr}\mathcal{E}_V \not\equiv 0$ この時には $\partial X_Q^\dagger = \partial X_Q^* \setminus \{s\}$ - ある1点 s を取り除く必要あり - 例 V -density points の存在 -

【考察】 先に述べた**【補題 1】**の条件を満たす別の関数族 Q' を考えると、正則ディリクレ空間 $(\text{Tr}\mathcal{E}_V, D[\text{Tr}\mathcal{E}_V]) \subset \ell^2(\partial M_{Q'}^*, \nu_V^{(Q')})$ は $(\text{Tr}\mathcal{E}_V, D(\text{Tr}\mathcal{E}_V)) \subset \ell^2(\partial X_Q^*, \nu_V^{(Q)})$ と“正則ディリクレ空間として同形である”ことが分かり、同様に正則ディリクレ空間 $(X_{Q'}^*, D[\mathcal{E}_V] \cap \ell^2(X_{Q'}^*, \mu))$ は $(X_Q^*, D[\mathcal{E}_V] \cap \ell^2(X_Q^*, \mu))$ “正則ディリクレ空間として同形である”ことが分かる。容量ゼロの集合を除いて同相で、ディリクレ空間として同一視できることが知られている。ここで $\mu : X \rightarrow (0, +\infty)$ は X 上の測度を表す。

【定義】 $\mathcal{E}^{(N)}$ に対して補題 1 に現れる族 $Q_K \subset D[\mathcal{E}^{(N)}] \cap \ell_b(X)$ を一つ選んで得られるコンパクト化を倉持コンパクト化と呼び、 X_K^* と表す。

【考察】 $\mathcal{E}_V$ に対して Q -コンパクト化 X_Q^* を考え、 $\tilde{Q} = Q \cup Q_K$ とおくと、 $X_{\tilde{Q}}^*$ は M_K^* と同一視でき、さらに X_Q^* は $X_{\tilde{Q}}^*$ の商空間である。このような意味で X_K^* が “一番大きい” と考えられる。ディリクレ空間 $(\text{Tr}\mathcal{E}_V, D[\text{Tr}\mathcal{E}_V])$ は $\ell^2(\partial X_K^*, \nu_V^{(K)})$ 上の広い意味でのディリクレ空間と考えられる。

$$\Pi_{f \in Q \cup Q_K} \left[-\sup_X |f|, \sup_X |f| \right] \rightarrow \Pi_{g \in Q} \left[-\sup_X |g|, \sup_X |g| \right]$$

$$X_{Q \cup Q_K}^* \rightarrow X_Q^*$$

【考察】 $(q, D[q])$ を $\ell^2(\partial X_K^*, \nu_V^{(K)})$ 上の (広い意味での) ディリクレ形式とすれば、

$$\mathcal{E}(u, u) := \mathcal{E}_{X;V}(u, u) + q(\text{Tr}(u), \text{Tr}(u))$$

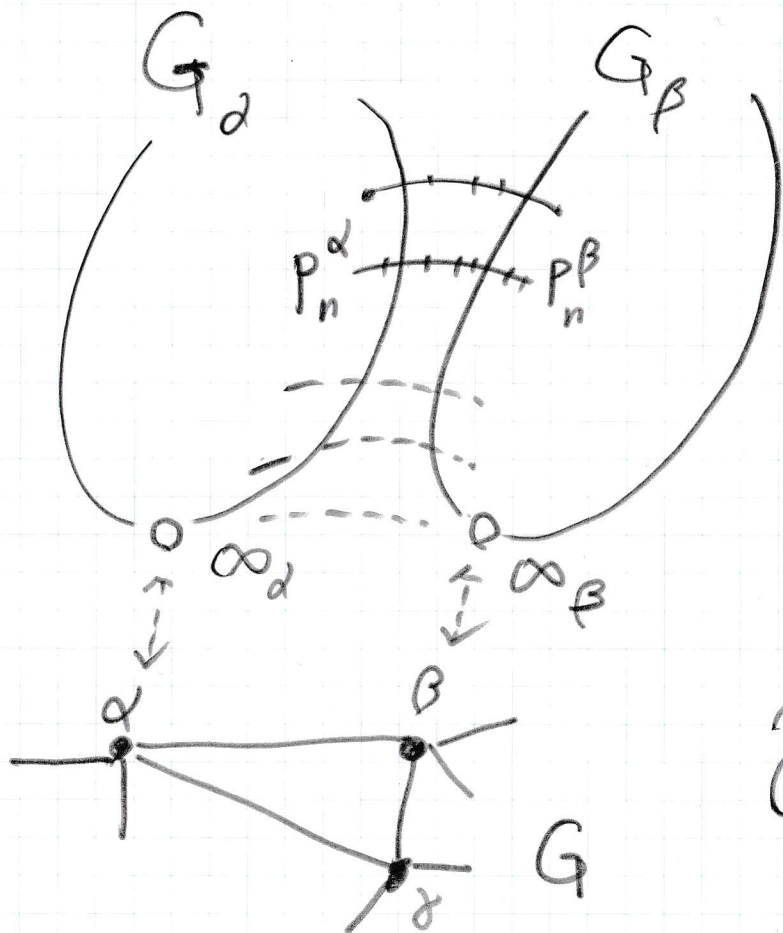
$$D[\mathcal{E}] := \{u \in L^{1,2}(M, \mu) \mid \text{Tr}(u) \in D[q]\}$$

【例】 $\sigma : \partial X_K^* \rightarrow (0, +\infty]$, $O = \{\xi \in \partial X_K^* \mid \sigma(\xi) < +\infty\}$

$$q(\phi, \psi) = \int_O \phi \psi \sigma d\nu$$

$G \ni \alpha \mapsto G_\alpha$: 連結無限 $q^n \searrow 7$,

$$\alpha \sim \beta \quad \partial(G_\alpha)_K^* = \{\infty_\alpha\} \quad (D[\varepsilon_G] = D_0[\varepsilon_G] + \mathbb{R})$$



$$p_n^\alpha \cdots p_n^\beta \quad \mathbb{E}_\alpha \searrow L(n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L(n)} = 1$$

$$\cup(G_\alpha \cup \{p_n^\alpha \cdots p_n^\beta\}) = \tilde{G}$$

$\partial \tilde{G}_K^*$ の "調和部分" = $\{\infty_\alpha \mid \alpha \in G\}$
(調和測度の台)

► 境界値問題

倉持コンパクト化 $X_K^* = (X, \partial X_K^*)$ を考える。

$(\text{Tr}^{(K)}\mathcal{E}_V, D[\text{Tr}^{(K)}\mathcal{E}_V])$ は $\ell^2(\partial X_K^*, \nu_V^{(K)})$ 上の広義ディリクレ空間となる。 $\Gamma(\mathcal{E}_V) = \overline{D[\text{Tr}\mathcal{E}_V]}$ とおく。

$\mathcal{B}_{\mathcal{E}_V} : D[\mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}] \rightarrow \Gamma[\mathcal{E}_V]$ をこの形式に付随する生成作用素とする。

$$\text{Tr}\mathcal{E}_V(\phi, \psi) = (\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}(\psi))_{\ell^2} \quad (\phi \in \Gamma[\mathcal{E}_V], \psi \in D[\mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}])$$

$$\mathcal{E}_V(u, h) = \int_{\partial X_K^*} \text{Tr}(u) \mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}(\text{Tr}(h)) d\nu_V^{(K)},$$

命題5 (i) $V \equiv 0, 1 \in D[\mathcal{E}], \mathcal{E}(1, 1) = 0$ の場合
 $\int_{\partial M_K^*} \phi \, d\nu^{(K)} = 0$ を満たす $\phi \in \Gamma(\mathcal{E})$ に対して次の境界値問題の解 $h \in D[\mathcal{E}]$ がただ一つ存在する。

$$\begin{cases} \Delta h &= 0 & \text{in } X, \\ \int \text{Tr}(h) \, d\nu^{(K)} &= 0, \\ \mathcal{B}_{\mathcal{E}}(\text{Tr}(h)) &= \phi & \text{on } \Gamma(\mathcal{E}). \end{cases}$$

(skip)

(ii) $1 \in D[\mathcal{E}_V]$ and $\mathcal{E}_V(1, 1) > 0$, or $1 \notin D[\mathcal{E}_V]$. このとき任意の $\phi \in \Gamma(\mathcal{E}_V)$ に対して, 次の境界値問題の解 h がただ一つ存在する。

$$\begin{cases} \Delta h - Vh &= 0 & \text{in } M, \\ \mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}(\text{Tr}h) &= \phi & \text{on } \Gamma(\mathcal{E}_V). \end{cases}$$

【例】 $\mathcal{O}$ を ∂X_K^* の開集合とし、 σ を容量ゼロの集合にチャージしない $\mathcal{O}$ 上のラドン測度とする。

$$D[\mathcal{E}] := \{u \in D[\mathcal{E}^{(N)}] \mid \text{Tr}(u) = 0 \text{ q.e. on } \partial X_K^* \setminus \mathcal{O}, \\ \int_{\mathcal{O}} (\text{Tr} u)^2 d\sigma < +\infty\}$$

$$\mathcal{E}(u, u) = \mathcal{E}_X(u, u) + \int_{\mathcal{O}} (\text{Tr} u)^2 d\sigma$$

W. Arendt and M. Warma, Dirichlet and Neumann boundary conditions: What is in between? J. Evol. Equ. 3, 2003

M. Keller, D. Lenz, M. Schmidt, M. Schwarz, and M.
Wirth, Boundary representations of intermediate forms
between a regular Dirichlet form and its active main part,
arXiv:2301.01035v1, 3 Jan 2023
... others

$$D[\mathcal{E}] \cap \ell^2(X, \mu) \subset \ell^2(X, \mu)$$

$$e^{-t\Delta^{(D)}} f \leq e^{-t\Delta^{\mathcal{E}}} f \leq e^{-t\Delta^{(N)}} f$$

$$(f \geq 0, \ t > 0)$$

IV 誘導形式とモスコ収束

(X, E, c) , $V \geq 0$, $(\mathcal{E}_V, D[\mathcal{E}_V])$, 有限部分集合 $K \subset X$

$$D[\mathcal{E}_V; K] := \{u \in D[\mathcal{E}_V] \mid u(x) = 0 (\forall x \in K)\}$$

$$D[\mathcal{E}_V; K]^\perp := \{v \in D[\mathcal{E}_V] \mid \mathcal{E}_V(v, u) = 0, \forall u \in D[\mathcal{E}_V; K]\}$$

$\mathcal{E}_V$ -直交分解:

$$D[\mathcal{E}_V] = D[\mathcal{E}_V; K] + D[\mathcal{E}_V; K]^\perp$$

$u \in \ell(K)$ を K の外で 0 とおいて $\ell_0(X)$ の元とみなし分解。

$$u = g + e_K^{(\mathcal{E}_V)}(u)$$

なお、 $e_K^{(\mathcal{E}_V)}(u)$ は、 $X \setminus K$ において V -調和関数である。

命題 6

(i) 有限部分集合 $K \subset L$ 、 $u \in \ell(K)$

$$e_L^{(\mathcal{E}_V)}(e_K^{(\mathcal{E}_V)}(u)|_L) = e_K^{(\mathcal{E}_V)}(u)$$

(ii) $\phi = \text{Tr}(e_K^{(\mathcal{E}_V)}(u))$ において、 $\phi \in D[\mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}]$ で

$$\beta_{\mathcal{E}_V}(\phi) = 0$$

(iii) $f \in D[\mathcal{E}_V]$ は、 $X \setminus K$ において V -調和関数で、さらに $\phi = \text{Tr}(f)$ が $\phi \in D[\mathcal{B}_{\mathcal{E}_V}]$ かつ $\beta_{\mathcal{E}_V}(\phi) = 0$ を満たすとする。このとき、 $f = e_K^{(\mathcal{E}_V)}(f)$ である。

【例】 $(D[\mathcal{E}_V], \mathcal{E}_V)$ がヒルベルト空間の場合： $a \in X$,
 $\mathcal{E}_V(g^{(\mathcal{E}_V)}(a, *), u) = u(a) \ (\forall u \in D[\mathcal{E}_V])$

$$g^{(\mathcal{E}_V)}(a, *) \in D[\mathcal{E}_V; \{a\}]^\perp$$

► 有限部分集合上の 2 次形式, $K \subset X$

$$\mathcal{E}_{V|K}^*(u, v) = \mathcal{E}_V(e_K^{(\mathcal{E}_V)}(u), e_K^{(\mathcal{E}_V)}(v)), u, v \in \ell(K)$$

を、 K 上の誘導形式とよぶ。

► モスコ収束

X 上の正值関数 $\mu : V \rightarrow (0, \infty)$ が与えられ、これによって X 上の測度が与えられているとする。

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(x), \quad A \subset X$$

$$\ell^2(X, \mu) = \{u \in \ell(X) \mid \sum_{x \in X} u(x)^2 \mu(x)\}$$

次に、連結部分グラフの増大列 $\{\Omega_n\}$ で、 $X = \bigcup_n \Omega_n$
($E = \bigcup E(\Omega_n)$) を満たすものを考える。

【記号】 $\Omega \subset X, \partial\Omega := \{x \in \Omega \mid x \sim y, \exists y \in X \setminus \Omega\}$

定理 7 以下の3つのヒルベルト空間とその上の
ディリクレ形式の列は収束する。

$$(I) \quad \ell_0^2(\Omega_n, \mu) = \{u \in \ell(\Omega_n) \mid u(x) = 0, x \in \partial\Omega_n\}$$
$$(\mathcal{E}_{X;V|_{\Omega_n}}, \ell_0^2(\Omega_n, \mu)) \rightarrow (\mathcal{E}_{X;V}, D_0[\mathcal{E}_{X;V}^{(D)}] \cap \ell^2(X, \mu))$$

(単調収束)

$$(II) \quad (\mathcal{E}_{V|_{\Omega_n}}^*, \ell^2(\Omega_n, \mu)) \rightarrow (\mathcal{E}_V, D[\mathcal{E}_V]) \cap \ell^2(X, \mu)$$

(単調収束)

(skip) 補足

$$u \in \ell^2(\Omega_n, \mu) \rightarrow e_{\Omega_n}(u)|_{\Omega_{n+1}} \in \ell^2(\Omega_{n+1}, \mu)$$

$$\mathcal{E}_{V|\Omega_n}^*(u, u) = \mathcal{E}_{V|\Omega_{n+1}}^*(e_{\Omega_n}(u), e_{\Omega_n}(u))$$

$$\lambda_k(\mathcal{E}_{V|\Omega_n}^*) \geq \lambda_k(\mathcal{E}_{V;\Omega_{n+1}}^*) \searrow \lambda_k(\mathcal{E}_V^*; X) \geq 0$$

$$w \in D[\mathcal{E}_V] \cap \ell^2(X, \mu) \rightarrow w|_{\Omega_n} \in \ell^2(\Omega_n, \mu),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{V|\Omega_n}^*(w|_{\Omega_n}, w|_{\Omega_n}) = \mathcal{E}_V(w, w)$$

$$\begin{aligned}
& \text{(III)} \quad (\mathcal{E}_V^*|_{\partial\Omega_n}, \ell^2(\partial\Omega_n, \nu_V)) \\
& \rightarrow (\text{Tr}\mathcal{E}_V, D[\text{Tr}(\mathcal{E}_V)])(\subset \ell^2(\partial X_K^*, \nu_V^{(K)})) \quad (\text{モスコ収束})
\end{aligned}$$

ヒルベルト空間 $H_n = \ell^2(\partial\Omega_n, \nu_V)$ の $H = \ell^2(\partial X_K^*, \nu_V^{(K)})$ へ

“収束” $S_n : H \rightarrow H_n$

$$\|u\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u)\|_{H_n}, \quad u \in H$$

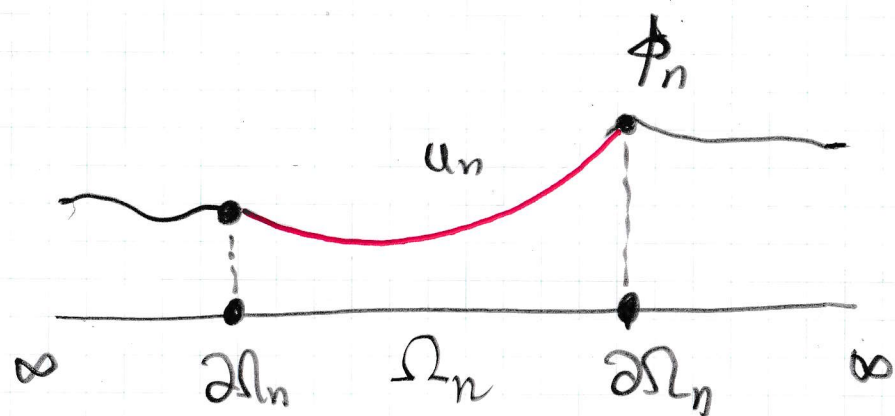
$$(a) \quad S_n(\phi) = \mathcal{H}_V \phi|_{\partial\Omega_n}$$

(b) コンパクト距離空間 X_K^* において、 $\partial\Omega_n$ は ∂X_K^* に

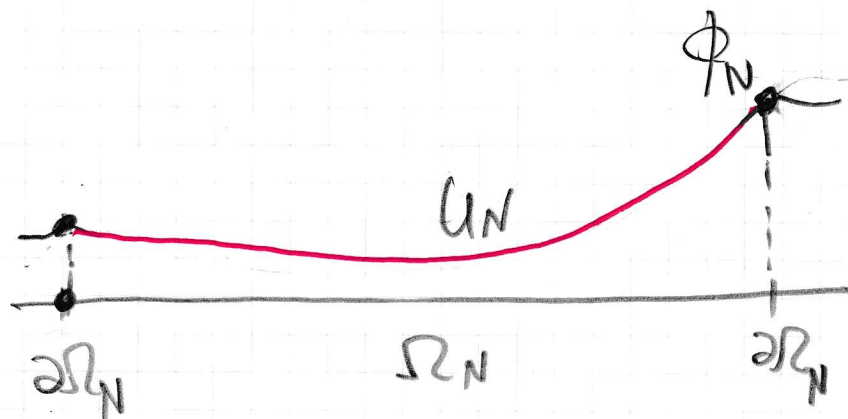
Hausdorff 収束, $\tau_n : \partial\Omega_n \rightarrow \partial X_K^*$ st

$$\text{dis}(x, \tau_n(x)) \leq \varepsilon_n \quad \forall x \in \partial\Omega_n$$

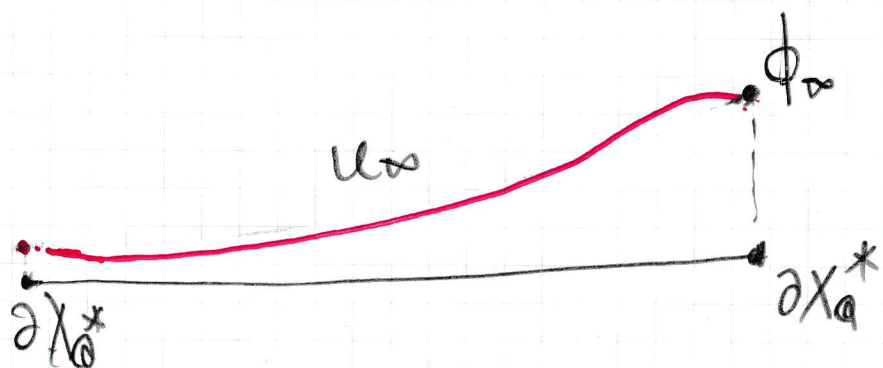
$$S_n(\phi) = \phi \circ \tau_n$$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$$u_\infty \in H_V D[\mathcal{E}_V]$$

$$\text{Tr } \mathcal{E}_V(\phi_\infty, \phi_\infty) = \mathcal{E}_V(u_\infty, u_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_V^*|_{\partial\Omega_n}(\phi_n, \phi_n)$$

(IV) ($o \in \Omega_0$) $\phi \in \ell^2(\partial\Omega_n, \nu_V), \mathcal{H}_V\phi \in \ell^2(\Omega_n \setminus \partial\Omega_n)$

$$\mathcal{F}_{V|\partial\Omega_n}(\phi, \phi) = \mathcal{E}_{\Omega_n \setminus \partial\Omega_n}^{(X)}(\mathcal{H}_V\phi, \mathcal{H}_V\phi)$$

($\sum_{\Omega_n} V(x)\phi(x)^2$ なし)

$$D[\mathrm{Tr}\mathcal{F}_V] = \{\phi = \mathrm{Tr}h \in \ell^2(\partial X_K^*, \nu_V) \\ | h \in D[\mathcal{E}^{(N)}], \Delta h - Vh = 0 \text{ in } X\},$$

$$\mathcal{F}_V(\phi, \phi) = \mathcal{E}^{(X)}(h, h), \quad h \in D[\mathcal{F}_V], \quad \mathrm{Tr}h = \phi.$$

$$(\mathcal{F}_{V|\partial\Omega_n}, \ell^2(\partial\Omega_n, \nu_V)) \rightarrow (\mathcal{F}_V, D[\mathcal{F}_V])(\subset \ell^2(\partial X_K^*, \nu_V^{(K)}))$$

(モスコ収束)

ヒルベルト空間とその列 H, H_n , そして 線形写像 $S_n : H \rightarrow H_n$ が与えられ、

$$\|u\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u)\|_{H_n}, \quad u \in H$$

【モスコ収束】 H_n 上の（２次対称非負値）閉形式の列 $\{\mathcal{F}_n\}$ と H 上の閉形式 $\mathcal{F}$ に対して以下の２つの条件 (M1), (M2) が成り立つとき、 $\mathcal{F}_n$ は $\mathcal{F}$ に Mosco 収束するという。

(M1) 関数列 $\{\phi_n \in H_n\}$ が関数 $\phi \in H$ に弱収束するならば、

$$\mathcal{F}(\phi, \phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(\phi_n, \phi_n) (\leq +\infty)$$

(M2) 任意の $\phi \in H$ に対して、 ϕ に強収束する列 $\{\phi_n \in H_n\}$ が存在し、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(\phi_n, \phi_n) \leq \mathcal{F}(\phi, \phi) (\leq +\infty)$$

【漸近コンパクト】 $\{\mathcal{F}_n\}$ は漸近的にコンパクトであるとは、
 $\sup_n \left(\mathcal{F}_n(\phi_n, \phi_n) + \|\phi_n\|_{H_n}^2 \right) < +\infty$ ならば列 $\{\phi_n \in H_n\}$ はある $\phi \in H$ に強収束する部分列を含む。

【Mosko, Kuwae-Shioya の定理】 モスコ収束 $\Leftrightarrow$

- H_n 上の閉形式 $\mathcal{F}_n$ から得られる自己共役非負作用素 A_n から生成される強連続縮小半群 e^{-tA_n} が H 上の (広い意味での) Dirichlet 形式 $\mathcal{F}$ に対応する自己共役非負作用素 A の強連続縮小半群 e^{-tA} に強収束する：
- レゾルベント作用素 R_α^n , レゾルベント作用素 R_α , ETC.
- モスコ収束が漸近コンパクト性を満たすならば、強連続縮小半群 e^{-tA} やレゾルベント作用素 R_α はコンパクト作用素になる。

► 漸近コンパクト性のための十分条件

(I) の場合 $D_0[\mathcal{E}_V^{(D)}] \cap \ell^2(X, \mu) \subset \ell^2(X, \mu)$ は、コンパクト埋め込み。

(II) の場合 $D[\mathcal{E}_V] \cap \ell^2(X, \mu) \subset \ell^2(X, \mu)$ は、コンパクト埋め込み。

(III) の場合 $\lim_{x \in X \rightarrow \partial X_K^*} G_X^V(o, x) = 0$ (参考：境界点の正則性)

ご清聴ありがとうございました。