

第 49 回変換群論シンポジウム

日程: 2023 年 12 月 1 日～2023 年 12 月 3 日

会場: 長崎商工会議所 3 階第 1 会議室

アブストラクト¹

12 月 1 日

- Spaces of non-resultant systems determined by a toric variety and their related topics
by 山口 耕平 (電気通信大学)

Let X be a non-singular simply connected m dimensional toric variety (over \mathbb{C}), and let Σ denote the fan in \mathbb{R}^m associated to X , such that the set of all one dimensional polyhedral cones in Σ is $\Sigma(1) = \{\rho_k : 1 \leq k \leq r\}$. In this situation, we write $X = X_{\Sigma}$, and we denote by $\mathbf{n}_k \in \mathbb{Z}^m$ the primitive generator of ρ_k for each $1 \leq k \leq r$.

Let $D = (d_1, \dots, d_r) \in \mathbb{N}^r$ be an r -tuple of positive integers. Then, if the set $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^r$ spans \mathbb{Z}^m over \mathbb{Z} (i.e. $\sum_{k=1}^r \mathbb{Z} \cdot \mathbf{n}_k = \mathbb{Z}^m$) and the equality $\sum_{k=1}^r d_k \mathbf{n}_k = \mathbf{0} \in \mathbb{Z}^m$ holds, one can define the space $\text{Hol}_D^*(S^2, X_{\Sigma})$ of all based rational curves $f : S^2 \rightarrow X_{\Sigma}$ of degree D ([3], [4], [7], [9]).

Moreover, for each $n \in \mathbb{N}$ and a field \mathbb{F} , one can also define the space $\text{Poly}_n^{D, \Sigma}(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}[z]^r$ of non-resultant systems of bounded multiplicity n determined by the toric variety X_{Σ} as a generalization of the space $\text{Hol}_D^*(S^2, X_{\Sigma})$, such that $\text{Poly}_n^{D, \Sigma}(\mathbb{F}) = \text{Hol}_D^*(S^2, X_{\Sigma})$ if $(n, \mathbb{F}) = (1, \mathbb{C})$.

In our earlier work [8] (c.f. [2], [6], [11], [12]) we determined explicitly the homotopy type of this space for the case $(X_{\Sigma}, \mathbb{F}) = (\mathbb{CP}^{m-1}, \mathbb{C})$ when $m \geq 2$.

In this talk we shall consider the space $\text{Poly}_n^{D, \Sigma}(\mathbb{F})$ for the general non-singular toric variety simply connected X_{Σ} when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, and study about the homotopy stability for this space.

REFERENCES

1. M. F. Atiyah and J. D. S. Jones, Topological aspects of Yang-Mills theory, Commun. Math. Phys. **59** (1978), 97–118.

¹アブストラクトは講演順に並んでいます。

2. F. R. Cohen, R. L. Cohen, B. M. Mann and R. J. Milgram, The topology of rational functions and divisors of surfaces, *Acta Math.* **166** (1991), 163–221.
3. D. A. Cox, The homogenous coordinate ring of a toric variety, *J. Algebraic Geometry* **4** (1995), 17–50.
4. D. A. Cox, The functor of a smooth toric variety, *Tohoku Math. J.* **47** (1995), 251–262.
5. D. A. Cox, J. B. Little and H. K. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Math. **124**, Amer. Math. Soc., 2011.
6. B. Farb and J. Wolfson, Topology and arithmetic of resultants, I: spaces of rational maps, *New York J. Math.* **22** (2016), 801–826.
7. M. A. Guest, The topology of the space of rational curves on a toric variety, *Acta Math.* **174** (1995), 119–145.
8. A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of resultants of bounded multiplicity, *Topology Appl.* **232** (2017), 112–139.
9. A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of rational curves on a toric variety, *Topology Appl.* **249** (2018), 19–42.
10. A. Kozłowski and K. Yamaguchi, Spaces of non-resultant systems of bounded multiplicity determined by a toric variety, *Topology Appl.* **337** (2023), Paper ID:108626.
11. G. B. Segal, The topology of spaces of rational functions, *Acta Math.* **143** (1979), 39–72.
12. V. A. Vassiliev, Complements of discriminants of smooth maps, *Topology and Applications*, Amer. Math. Soc., Translations of Math. Monographs **98**, 1992 (revised edition 1994).

• **On the graded quotients of the algebra of $SL(2)$ -characters of free groups**

by 加藤 瑤 (東京理科大学)

自由群 F_n の $SL(2)$ 指標は、古典的には自由群 F_n の Fricke 指標と呼ばれ、古くから研究されてきた。自由群 F_n の Fricke 指標全体が生成する、関数代数の部分代数を考える。この代数には自然に自由群の自己同型群 $\text{Aut}(F_n)$ が作用する。この作用については Horowitz, Mugnus による先駆的な研究があるほか、佐藤-畠中による Fricke 指標たちのなす代数から生じる Andreadakis-Johnson フィルトレーションの類似物に関する研究がある。しかしながら、この代数への $\text{Aut}(F_n)$ の作用は、古典的によく知られる $GL(n, \mathbb{Z})$ を経由する作用ではなく、作用そのものが非常に複雑なこともあり、ほとんど手が付けられていない状態であった。

本講演では、Brumfiel と Hilden の導入した代数を通して、Fricke 指標たちのなす代数への $\text{Aut}(F_n)$ 作用について再考することからはじめる。そして、先行研究において中心的な役割を果たしていた、ある極大イデアルの次数商の $\text{Aut}(F_n)$ 加群としての構造について得られた結果を紹介する。

• **On the Félix–Tanré rational model for a polyhedral product and its application to partial quotients**

by 栗林 勝彦 (信州大学)

In [F-T], Félix and Tanré has introduced a rational model for the polyhedral product of a tuple of spaces corresponding to arbitrary simplicial complex. By applying the model, it is proved that for a partial quotient N associated with a toric manifold M , the following conditions are equivalent: (i) $N = M$. (ii) The odd-degree rational cohomology of N is trivial. (iii) The torus bundle map from N to the Davis–Januszkiewicz space is formalizable. This work is based on arXiv:2310.09205.

REFERENCES

F-T. Y. Félix and D. Tanré, Rational homotopy of the polyhedral product functor, Proceedings of AMS, 137 (2009), 891-898.

- **\mathbb{Z}_2 -ホモロジー 5-球面上のコンパクト Lie 群の作用による不動点集合のオイラー標数の偶奇について**

by 田村 俊輔（津山工業高等専門学校）

1946 年の D. Montgomery–H. Samelson による論文でのコメント「コンパクト Lie 群が球面に不動点をもつよに作用するならば、別の不動点をもつだろう」を端緒として、様々な研究者によって球面上のちょうど 1 点の不動点をもつような作用 (以後, one-fixed-point action) が研究されてきた. 6 次元以上の球面に対しては有限群の one-fixed-point action が存在するという A. Bak–森本 雅治の結果の一方で, 古田 幹雄, S. DeMichelis, N. P. Buchdahl–S. Kwasik–R. Schultz らの仕事によると, 5 次元以下の球面には有限群の one-fixed-point action が存在しないことが判明した. 最近, ホモロジー 5-球面上の有限群の one-fixed-point action が存在しないという N. P. Buchdahl–S. Kwasik–R. Schultz の結果を, \mathbb{Z}_2 -ホモロジー 5-球面上のコンパクト Lie 群の作用で, その不動点集合のオイラー標数が奇数となるものは存在しないという結果に拡張することができた. 本講演では, この結果について関連する話題を交えながら講演を行いたい.

- **Stable rational homology of the IA-automorphism groups of free groups**
by 片田 舞（九州大学）

The rational homology of the IA-automorphism group IA_n of the free group F_n of rank n admits a $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ -representation structure. We study the quotient representation of the rational homology of IA_n that is obtained as the image of the map induced by the abelianization map of IA_n . We call it the Albanese homology

of IA_n . In this talk, we determine the third Albanese homology of IA_n in a stable range. Moreover, in higher degrees, we obtain a subquotient representation of the Albanese homology of IA_n in a stable range, which is conjecturally equal to the entire Albanese homology of IA_n . We also consider the Albanese homology of the Torelli groups of surfaces.

- **Vector fields on non-compact manifolds**
by 岸本 大祐 (九州大学)

Let M be a connected oriented manifold. If M is compact, then it is well known that there is a non-vanishing vector field on M if and only if the Euler class of M vanishes, and a more precise information of a vector field is described by the Poincaré-Hopf theorem. On the other hand, if M is non-compact and of bounded geometry, then Weinberger proved that there is a vector field with unit length and bounded derivative if and only if the Euler class of M in bounded cohomology vanishes. So one can ask whether there is a Poincaré-Hopf theorem for a non-compact manifold of bounded geometry. I will talk about a Poincaré-Hopf theorem for a non-compact manifold equipped with a cocompact and properly discontinuous action of a discrete group, which is a typical example of a non-compact manifold of bounded geometry.

This is a joint work with Tsuyoshi Kato (Kyoto) and Mitsunobu Tsutaya (Kyushu).

12月2日

- **ハイゼンベルク群と佐々木幾何学**
by 糟谷 久矢 (大阪大学)

ハイゼンベルク群は佐々木幾何学の平坦モデルを与えており、佐々木幾何学における基本的な対象である。本講演では、コンパクト佐々木多様体が局所的にハイゼンベルク群に変形されるための大域的な特徴付けを与える。(Indranil Biswas氏と共同研究)

- **Peterson 多様体とトーリック幾何**
by 阿部 拓 (岡山理科大学)

Peterson 多様体は Dale Peterson によって導入された代数多様体で、旗多様体の量子コホモロジー環を幾何学的に実現する多様体として知られている。Peterson 多様体のトポロジーに関する研究としては、原田-堀口-柁田によるコホモロジー環の表示が知られており、この表示により「Peterson 多様体のコホモロジー環が、あるトーリック軌道体のコホモロジー環と同型である」という事実が導かれる。この不思議な現象は（証明はできるものの）その幾何学的な理由は分かっていなかった。今回、曾昊智氏（华中科技大学）との共同研究により、Peterson 多様体の幾何がトーリック幾何と密接に関係していることが分かり、これにより上記の環同型を自然に導出できることが分かったので、その概略を説明したい。

- **Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes**
by 松下 尚弘（信州大学）

The van Kampen-Flores theorem states that the d -skeleton of a $(2d+2)$ -simplex does not embed into \mathbb{R}^{2d} . We prove the van Kampen-Flores theorem for triangulations of manifolds satisfying a certain condition on their Stiefel-Whitney classes. In particular, we show that the d -skeleton of a triangulation of a $(2d+1)$ -manifold with non-trivial total Stiefel-Whitney class does not embed into \mathbb{R}^{2d} .

This is a joint work with Daisuke Kishimoto.

- **Non-trivalent graph cocycles and Vassiliev invariants**
by 境 圭一（信州大学）

The Vassiliev invariants of (long) knots can be described in terms of configuration space integrals associated with trivalent graph cocycles (R. Bott–C. Taubes, T. Kohno, 1994). In this talk we review this description, and we also see that some Vassiliev invariants can be obtained from non-trivalent graph cocycles. Part of this talk is based on joint work with Saki Kanou.

- **シューベルト・カルキュラスと結晶基底**
by 藤田 直樹（熊本大学）

シューベルト・カルキュラスはシューベルト多様体の交叉の明示的な記述を目的とする研究分野であり、シューベルト多項式のような組合せ論的モデルによる

シューベルト類の具体的な実現が重要な役割を果たしている. A 型旗多様体の場合, シューベルト多項式に現れる単項式は簡約な (双対) Kogan 面という Gelfand-Tsetlin 多面体の特別な面に対応する. Kiritchenko-Smirnov-Timorin は A 型の旗多様体のコホモロジー環と Gelfand-Tsetlin 多面体の多面体代数が同型であることを用いて, A 型のシューベルト類を簡約な (双対) Kogan 面の和として記述した. 本講演では簡約な (双対) Kogan 面を表現論における結晶基底の理論と関連付ける. 応用としてシューベルト多項式に関するいくつかの組合せ論的概念に結晶基底を用いた解釈を与える.

- **An invariant for homology cylinders via skein algebras**
by 辻 俊輔 (電気通信大学)

スケイン代数を用いたホモロジーシリンダーの不変量が構成できたことを報告する. この不変量は、二つの特徴を持っている. 一つ目は、ホモロジーシリンダーの完備基本群への作用の量子化とみなせることである. もう一つはホモロジーシリンダーと Heegaard 分解を用いて得られる閉 3 次元多様体の量子不変量の情報を持っているという特徴である. 不変量になっていることは、この二つの特徴から従う、別の言い方をすると、この二つの特徴を持つ完備スケイン代数の元が一つ定まる.

- **Generic torus orbit closures in Schubert varieties**
by 栢田 幹也 (大阪公立大学)

Eunjeong Lee 氏と講演タイトルと同名の論文を数年前に書き、そこである予想をしました. それに関連する話をしたいと思います.

12月3日

- **コンパクトリー群の左不変でない複素構造と両側トーラス作用**
by 石田 裕昭 (大阪公立大学)

偶数次元コンパクトリー群には左不変な複素構造が存在することが 1950 年代に Wang, Samelson らによって独立に示されている. 一方で, 2007 年に Loeb, Manjarin, Nicolau らによって, 可換でない偶数次元コンパクトリー群には左不変でない複素構造が存在することが示された. 本講演では, トーラス作用に関するモーメント写像と葉層構造を用いて, 具体的に $SU(3)$ の左不変でない複素構造の

族が構成できることを述べる. 本講演内容は大阪大学の糟谷久矢氏との共同研究に基づく.

- **On the dimensions of fixed point sets of representation spaces by subgroups**

by 角 俊雄 (九州大学)

Let G be a finite group. We consider the dimension of V^H for a representation G -space and a subgroup H of G . Wasserman called G a Borsuk-Ulam group (BUG) if $\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$ for any isovariant G -map $f: V \rightarrow W$ between representation G -spaces, where a G -map f is isovariant if $G_x = G_{f(v)}$ for any point $v \in V$, and showed that every solvable group is a Borsuk-Ulam group. However it is unknown whether G is a BUG or not for many families of nonsolvable groups. In this talk, we would like to discuss $\dim V^H$ for irreducible representation G -spaces V and subgroups H of G , and how to apply the inequality as above.

- **Borsuk-Ulam 性をもつ表現について**

by 長崎 生光 (京都府立医科大学)

G が基本アーベル群 C_p^k またはトーラス群 T^k であるとき, (固定点自由な) 表現球面の間に G 写像 $f: S(V) \rightarrow S(W)$ があれば, $\dim V \leq \dim W$ (Borsuk-Ulam 型定理) が成り立つことはよく知られている. 昨年の講演ではこのような性質 (群の Borsuk-Ulam 性) をもつコンパクト・リー群は, C_p^k または T^k のみであることを報告した. その後 M. C. Crabb は具体的な G 写像を構成することでこの結果の別証を与えた. 本講演では, Crabb の与えた G 写像 (の一部) を紹介するとともに, 表現の Borsuk-Ulam 性を導入し, その性質と例について述べる.

世話人

佐藤 隆夫 (東京理科大学)

黒木 慎太郎 (岡山理科大学)