2010年度

線型代数学A, B要約

京都大学 大学院理学研究科 数学教室

特定助教 (グローバル COE)：佐藤 隆夫

はじめに

この要約は，全学共通科目である，線型代数学 A（再履修）及び，線型代数学 B（再履修）の講義で使用する参考書です．講義内容の外，必要に応じて適宜加筆してあります．また，この科目は原則として，工学部学生を対象としているため，理論よりは**具体的な計算や応用例**を中心に解説してあります．

授業では，およそ前半の 1 時間前後を講義に充て，残りの時間でその日に行った内容を確認するための簡単な計算問題を行います．この演習問題は成績には加味しませんが，期末試験ではこの類題を出題しますので各自復習を怠らないようにしてください．また，各回の演習問題及びその略解を KULASIS において毎週公開し，学内の端末からダウンロード出来るようにしますので是非活用してください．

授業中に行う演習は具体的な問題が実際に解けるようになることが第一の目標のため，問題を行っている際には周りの人と相談しながらやっても構いません．また，適当に机間巡視しますので，その時に質問してくれても構わないです．何でも気軽に聞いてください．

一方，演習で行った答案は回収し，TA（数学が専門の大学院生）の方に確認してもらいます．特に採点はしませんが，論述がおかしいところや，論証不十分な部分については適宜修正してもらうようにします．答案は返却しますので，各自復習しておくようにしてください．

成績は期末試験（持ち込み不可.）で付けます．レポートなどは一切行いません．採点は 120 点満点で付け，60 点以上で合格を出します．**普段の演習問題が完璧にできれば単位を落とすようなことはまずない**と思います．

解らないことは恥ずかしいことではありません．演習で解けなかった問題でも，諦めずに何度も繰り返し考え抜くことによって，数学的な感覚のみならず，粘り強い集中力や論証力も自然と身に付いてくると思います．分からないことがあれば何でも遠慮なく質問して下さい．

皆さんが本要約を活用することにより，線型代数学への理解が少しでも深まり，より身近なものに感じられるようになれば大変嬉しく思います．

後期科目：線型代数学 A（再履修）

以下は，後期に開講される「線型代数学 A（再履修）」の講義内容です．第 1 回目には複素数と複素平面について基本的なことを確認します．これらが必要となる部分は取り立てて多くはないですが，固有値及び固有空間の部分で複素数の知識が多少必要になること，及び，複素平面に関しては，高等学校のカリキュラムから削減されているので一度確認も兼ねてやっておいたほうが良いことなどから，1 時間分充当することにしました．

1. 複素数と複素平面
2. 数ベクトル空間（ベクトルの一次独立性）
3. 数ベクトル空間（基底と次元）

4. 写像と線形写像
5. 線型写像の像と核
6. 行列
7. 線型写像の行列表示
8. 行列の基本変形と階数
9. 逆行列
10. 連立一次方程式（斉一次方程式の基本解）
11. 連立一次方程式（一般の連立方程式の解法）
12. 行列式その 1
13. 行列式その 2

前期科目：線型代数学 B（再履修）

以下は，前期に開講される「線型代数学 B（再履修）」の講義内容です．前半は，復習も兼ねて線型代数学 A の内容を行います．特に，ベクトルの一次独立性と連立一次方程式の部分は重点的に時間を配分します．

1. 複素数と複素平面
2. 数ベクトル空間（ベクトルの一次独立性）
3. 数ベクトル空間（基底と次元）
4. 線型写像の像と核
5. 連立一次方程式（連立斉一次方程式の基本解）
6. 連立一次方程式（一般の連立方程式の解法）
7. 部分空間の基底と次元
8. 計量ベクトル空間（内積，正規直交基底）
9. Schmidt の直交化法，直交行列
10. 直交補空間と直交射影
11. 行列式の復習
12. 固有値と固有ベクトル
13. 行列の対角化

14. 正規行列の対角化

答案作成についての覚書

以下，数学の答案の作成について，注意してほしい事項を列挙します．是非参考にしてください．

注意 1 問題では，何が問われているかをまず確認すること．

しばしば，問題で問われていること以外の答えが書かれた答案が散見される．典型的な例としては，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求めよ，という問題において，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は答えの 1 つになるが，たまに，

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in K \right\}$$

と，解全体の集合を答えに書いている答案がある．厳密に言えば，これは不正解となるので注意されたい．

注意 2 答えだけの答案．

ごく稀に，答えだけが明記されている答案がある．例えば，$\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に Schmidt の直交化法を適用して，$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を求めよ，という問題において，

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とだけ書かれている答案．

確かに，本人は計算用紙などで Schmidt の直交化法を用いて計算した（と思われる）のだろうが，採点者からするとこれは確認のしようがないので大きな減点対象となる．たとえ，計算間違いなどで答えが不正解であっても，**論述がきちんとなされていていれば途中点で加点する**ということは往々にしてあり得ることであるが，答えだけしか書いておらず，しかもその答えが間違っていれば確実に不正解となるので注意してほしい．

注意 3 数式だけの答案．

さすがに，答えだけの答案というのは少ないにしても，式変形だけが明記されていている答案はしばしば見受けることがある．確かに，計算に慣れた人であれば，式を見ただけで何をしようとしているか何となく分かるが，**論理を重んじる数学の答案**としてはやはり不十分である．必ず，**日本語で，論理的に何をしたいのかを説明する文章**を付け加えてほしい．(別に英語でも構わないが，その場合は全ての解答を英語に統一すること.）そのために，解答例を付した例題をよく参照して頂きたい．

注意 4 論証になっていない答案.

答案の中には，明らかに矛盾する論理で攻めているものや，そもそも意味がよくわからない論理がしばしば存在する．このような答案は，例え解答者のやりたいことが推測できたとしても，減点もしくは不正解にすることもあるので注意して欲しい．

数学は誰が採点しても正解となるような答案が書ける学問である．不十分な論理では採点者によって評価が異なることもあり得るので，出来る限り採点者を納得させられるような論理を用いて答案を作成してほしい．最低限，**何が答案の結論なのかは明示してほしい**．

注意 5 解になっていない.

線型代数では，逆行列や連立一次方程式など多くの計算問題が出題される．論述はしっかりできているが，答えが間違っているという答案も良く見受けられる．ちょっとした計算ミスから，見当違いの計算になってしまっている例まで様々だが，計算問題の多くは検算が可能であるので，解答を書き終えた後は**必ず検算を忘れないようにしてほしい**．少し検算していればあとプラス 20 点，40 点はできるのに，と採点者も歯がゆい気持ちになることがある．

Contents

1 複素平面

1.1 複素数と複素平面

<u>**本講の目標**</u>

- 線型代数を学習する準備として，複素数の性質について簡単な**復習**を行う．以下の概念は，線型代数学以外の多くの科目においても重宝されるのでしっかり把握しておくことが望まれる．
- **複素平面**なる概念を導入し，複素数全体は**実平面と同一視できる**ことを確認する．
- 複素数の偏角，及び**極座標表示**を理解する．

以下，$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ，実数全体の集合，及び複素数全体の集合とする．$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とするとき，

$$z = a + bi, \quad a, b \text{ は実数}$$

と書ける数を**複素数**という．複素数 $z = a + bi$ に対して，a，b をそれぞれ，z の**実部**，及び**虚部**といい，

$$\mathrm{Re}(z) = a, \quad \mathrm{Im}(z) = b$$

と表す．**虚部は** bi **ではない**ことに注意する．以下は複素数が持つ基本的な性質である．

複素数の相等

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ かつ } b = d.$$

四則演算

$$\begin{aligned}
(a + bi) \pm (c + di) &= (a \pm c) + (b \pm d)i \\
(a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\
\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \qquad (c, d) \neq (0, 0).
\end{aligned}$$

これらは，i を文字のように扱って計算し，i^2 が出てくる度に -1 に置き換えることによって得られる．

複素数 $z = a + bi$ に対して，

$$a - bi$$

を z の**共役**な複素数（単に，z の共役ともいう．）いい，$\overline{z}$ で表す．複素数 z, w に関して以下が成り立つ．

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

例 1.1 一般に 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \text{ は実数}, \ a \neq 0$$

は，判別式 $D = b^2 - 4ac$ が負のとき，2 つの虚数解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

を持つ．これらは互いに共役である．

複素数 $z = a + bi$ に対して，$z\overline{z} = a^2 + b^2$ は 0 以上の実数である．そこで，

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

で定義される実数 $|z|$ を z の**絶対値**という．ここで，

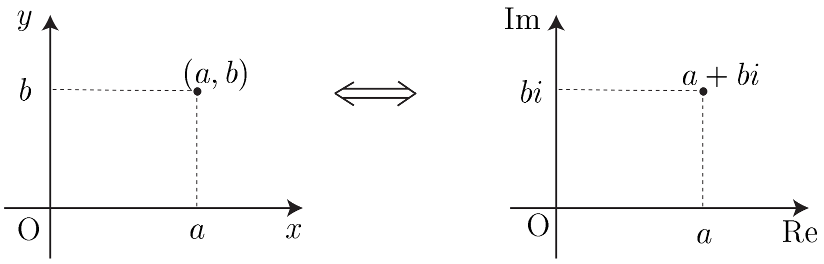
$$z\overline{z} = |z|^2$$

であり，一般には，$|z|^2 \neq z^2$ であることに注意する．また，$z \neq 0$ のとき，$|z| \geq 0$ であり，

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

である．

次に，複素数を視覚的に捉えることを考えよう．座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (a, b) に複素数 $a + bi$ を対応させることによって，平面上の点全体と複素数全体は 1 対 1 に対応する．この対応によって平面を複素数全体とみなしたものを**複素平面**という．複素平面の横軸，縦軸をそれぞれ**実軸**，及び**虚軸**という．



座標平面　　　　複素平面

複素平面において，原点 O から z までの長さが z の絶対値に他ならない．また，$z \neq 0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O}z}$ が実軸の正の方向から角 θ の位置にあるとする．このとき，θ を z の**偏角**といい，

$$\theta = \arg z$$

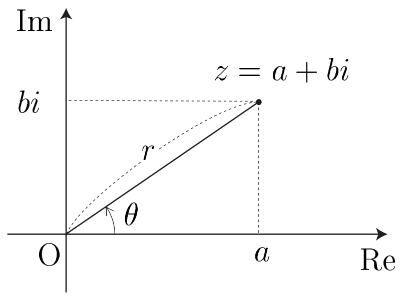
と表す．角 θ は 2π の整数倍を除いて一意的に定まる．今，$r = |z|$ とおくと，

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

が成り立ち，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と書ける．このような表し方を z の**極座標表示**または**極形式**という．



複素数の極座標表示を用いると，複素数の乗法（除法）を**視覚的に**捉えることができる．複素数 z, w の極座標表示をそれぞれ，

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad w = r'(\cos\beta + i\sin\beta)$$

とすると，三角関数の加法定理より

$$zw = rr'(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

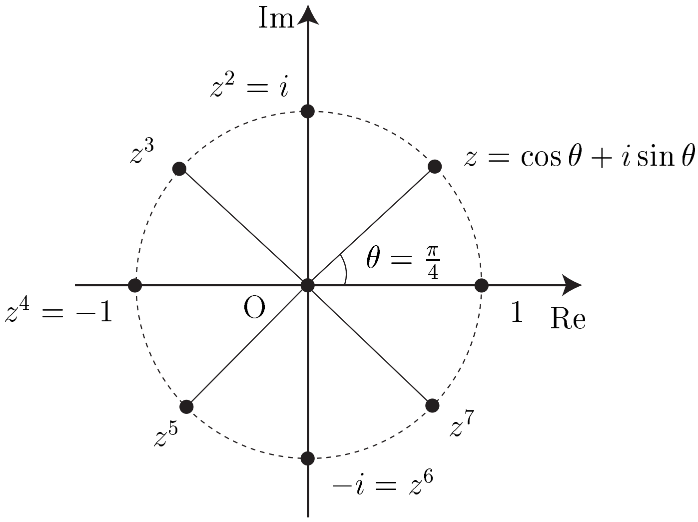
となる．即ち，zw の位置ベクトルは z の位置ベクトルを $|w|$ 倍に拡大（または縮小）したものを，原点 O のまわりに角 $\arg(w)$ だけ回転させたものである．

以下の公式は有名である．

定理 1.2 (ド・モアブルの公式)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \text{ は整数}$$

これは，数学的帰納法によっても証明できるが，複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ を掛けることが，原点 O の周りの角 θ 回転に対応していることを考えると理解が早い．以下の図は，$\theta = \pi/4$ のときの様子である．



円の方程式

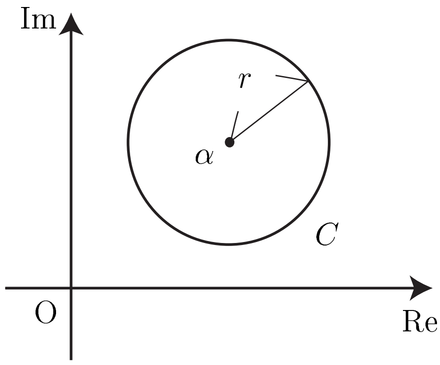
$\alpha \in \mathbb{C}$ とし，$r > 0$ を正の実数とする．複素平面上で,

$$|z - \alpha| = r$$

を満たすような複素数 z の集合を

$$C = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = r \,\}$$

とおく．すると，C は α から距離が r の複素数全体の集合であり，これは複素平面上における，α を中心とする半径 r の円を表している．



垂直二等分線の方程式

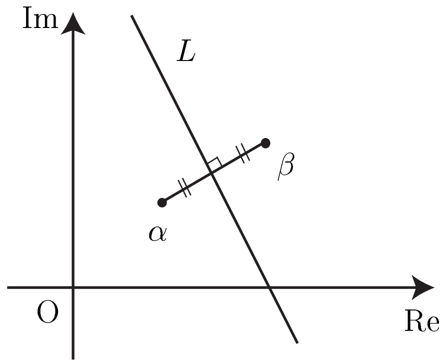
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$ とする．複素平面上で,

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$

を満たすような複素数 z の集合を

$$L = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| = |z-\beta| \,\}$$

とおく．すると，L は α から距離と，β からの距離が等しいようなの複素数全体の集合であり，これは複素平面上における，α と β を結ぶ線分の垂直二等分線を表している．



1.2 演習問題

問題 1.1 任意の複素数 z, w に対して，以下が成り立つことを示せ．

(1) $|zw| = |z|\,|w|$

(2) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

問題 1.2 $n \geq 1$ に対して，1 の n 乗根，即ち，$z^n = 1$ を満たす複素数を全て求めよ．

問題 1.3 $z^3 = i$ を満たす複素数を全て求め，それらを複素平面上に図示せよ．

問題 1.4 次の複素数を複素平面上に図示せよ．

$$1+\sqrt{3}i, \quad -i, \quad 1$$

問題 1.5 複素平面上で，任意の z に対して，以下の各点はそれぞれ，z をどのように移動させて得られるものか述べよ．

$$\bar{z}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}}z, \quad (-1+\sqrt{3}i)z$$

問題 1.6 複素平面上で，$|z-1| = 2|z+1|$ を満たす複素数 z 全体はどんな図形を表すか．

2　数ベクトル空間

本講の目標

- **和**と**スカラー倍**の構造を持つ，数ベクトル空間を理解する．
- 数ベクトル空間における**一次独立**と**一次従属**の概念を理解する．
- 数ベクトル空間の**基底**と**次元**を理解する．
- 数ベクトル空間の一般化として，**抽象ベクトル空間**なるものが定義されることを概観する．

2.1　ベクトルの一次独立性

自然数 $n \geq 1$ に対して，n 個の複素数を縦一列に並べたもの

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を n **次元数ベクトル**，または単に**ベクトル**という．$a_1, \ldots, a_n$ を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい，a_i を $\boldsymbol{a}$ の**第** i **成分**という．以下，ベクトルは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のように太文字で表すことにする．

n 次元数ベクトル全体の集合を

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

と表す．$\mathbb{C}^n$ には，**加法（和）**と**スカラー倍**が次のようにして自然に定義される．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

また，

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

とおく．$\mathbf{0}$ を**零ベクトル**という．各ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ である．$\mathbb{C}^n$ は以下の性質（ベクトル空間の公理）を満たす.

1．結合法則 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

2．和の可換性 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

3．零元の存在 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

4．マイナス元の存在 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

5． $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

6． $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

7． $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

8． $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

このように，単に数ベクトルの集合としてではなく，和とスカラー倍の構造も合わせて考えた $\mathbb{C}^n$ のことを，n **次元複素ベクトル空間**という．また，n 次元数ベクトルで成分が全て実数のものを**実** n **次元数ベクトル**といい，それらの全体を

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と表し，n **次元実ベクトル空間**という．一般に，$\mathbb{C}^n$ 及び $\mathbb{R}^n$ をまとめて**数ベクトル空間**と呼ぶ.

$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ に対して，数ベクトル空間 K^n の部分集合 W が

(i) $\mathbf{0} \in W$

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$

(iii) $\boldsymbol{a} \in W, c \in K \Longrightarrow c\boldsymbol{a} \in W$

をみたすとき，W は K^n の**部分空間**であるという.

例 2.1 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，

$$W_1 = \{\mathbf{0}\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であるが,

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 1 \right\}$$

は部分空間ではない.

以下特に断らない限り，簡単のため本講では，**単にベクトル空間と言えば，実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$，またはその部分空間を表す**ことにする．以下で述べられる性質は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の場合に対しても同様に成り立つので各自確認されたい.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルの組とする．実数の組 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ に対して，ベクトル

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ たちの**一次結合**という.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ たちの一次結合が $\boldsymbol{0}$ になるのは，全ての c_i たちが 0 の場合に限るとき，即ち,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

ならば

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

となるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は**一次独立**であるという.

また，$\mathbb{R}^n$ のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 一次独立でないとき，**一次従属**であるという．即ち，少なくとも 1 つが 0 でないような実数の組 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ に対して,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ場合である.

一次独立，一次従属の幾何学的な意味

平面 $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ を例にとって考えてみよう．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次従属であるとすると，少なくとも一方は 0 でないような実数の組 c_1, c_2 が存在して,

$$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

とかける．$c_1 \neq 0$ と仮定しよう．この場合,

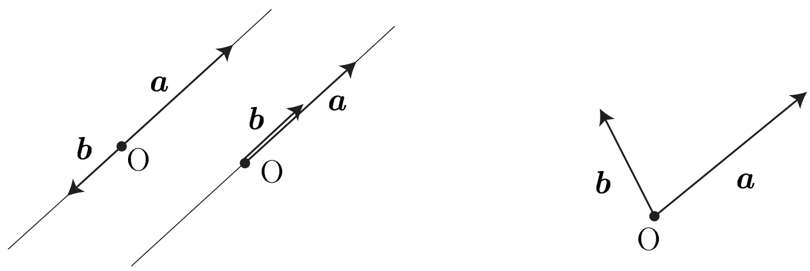
$$\boldsymbol{a} = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{b}$$

と書ける．即ち，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は同一直線上にあることがわかる．$c_2 \neq 0$ の場合も同様である．逆に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が同一直線上にあれば，ある実数 k に対して，

$$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$$

と書けるので，$\boldsymbol{a} + (-k)\boldsymbol{b} = 0$ となり，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次従属となる．したがって，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立であることと $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が同一直線上にないことは同値である．以上をまとめると次のようになる．

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ \text{が一次従属} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\ \text{と}\ \boldsymbol{b}\ \text{が同一直線上にある．}$$
$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ \text{が一次独立} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\ \text{と}\ \boldsymbol{b}\ \text{が同一直線上にない．}$$



一次従属　　　　一次独立

同様にして，$\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \text{が一次従属} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \text{が同一平面上にある．}$$
$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \text{が一次独立} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \text{が同一平面上にない．}$$

であることも示される．

例題 2.2 $\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表わされることを示せ．

解答　(1) 実数の組 c_1, c_2 に対して，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ が成り立つことと，連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases}$$

が成り立つことは同値である．すると，この連立一次方程式は自明な解 $c_1 = c_2 = 0$ しか持たないので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立である．

(2)

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とおく．(1) と同様にして，実数の組 c_1, c_2 に対して，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}$ が成り立つことと，連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = b_1 \\ 2c_1 + 4c_2 = b_2 \end{cases}$$

が成り立つことは同値である．この連立方程式は

$$c_1 = \frac{-4b_1 + 3b_2}{2}, \quad c_2 = \frac{2b_1 - b_2}{2}$$

となり解をもつ．ゆえに題意が示された．□

一次独立性と連立一次方程式

上の例題からも分かるように，与えられたベクトルの組の一次独立であるかどうかということを，連立一次方程式の言葉を用いて述べることも出来る．

一般に，連立一次方程式（m 変数についての n 個の連立一次方程式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & 0 \\ \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

について，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (0, 0, \ldots, 0)$$

はいつも解になる．これを**自明な解**という．一方，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を K^n の $(m+1)$ 個のベクトルとみなす．すると，連立方程式 (1) は

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

と同値になる．

注意 2.3 連立方程式 (1) が自明でない解を持つとき，ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ は一次従属であり，(1) が**自明な解しか持たない**とき，$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ は**一次独立**である．

一般に，次のことが知られている．

定理 2.4 連立方程式 (1) は，$m > n$ のとき自明でない解を持つ．

証明 n についての帰納法による．$n = 1$ のとき，方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0$$

について，

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{cases} (1, 0, \dots, 0), & a_{11} = 0 \text{ のとき} \\ (-a_{12}, a_{11}, 0, \dots, 0), & a_{11} \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

は自明でない解である．

次に，$n = 2$ の場合を示してみよう．$m \geq 3$ に対して，連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & 0 \quad \cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & 0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

を考える．$a_{11} = a_{21} = 0$ のときは

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = (1, 0, \dots, 0)$$

が自明でない解である．$a_{11} \neq 0$ または $a_{21} \neq 0$ のとき，必要であれば方程式の順序を入れ換えて $a_{11} \neq 0$ としてよい．このとき，

$$①' = ① \times a_{11}^{-1}, \quad ②' = ② - ①' \times a_{21}$$

を考えることにより，

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1m}x_m = & 0 \quad \cdots ①' \\ \qquad\; a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2m}x_m = & 0 \quad \cdots ②' \end{cases}$$

を得る．ここで，

$$a'_{1i} = a_{1i}a_{11}^{-1}, \quad a'_{2i} = a_{2i} - a'_{1i}a_{21}, \quad (2 \leq i \leq m)$$

である．また，明らかに

$$① \text{ かつ } ② \iff ①' \text{ かつ } ②'$$

である．

さて，$n=1$ の場合より，(($x_2,\dots,x_m$) の方程式を考えると)，

$$a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2m}x_m=0$$

は自明でない解 $(\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ を持つ．そこで，

$$\alpha_1=-(a'_{22}\alpha_2+\cdots+a'_{2m}\alpha_m)$$

とおくと，$(x_1,x_2,\dots,x_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ は ①$'$, ②$'$ を満たすので，①, ② も満たす．即ち，これは連立方程式 ①, ② の自明でない解である．

一般に，上述の議論と同様の方法により，$n\geq 1$ の場合を仮定して $n+1$ の場合が示される．□

この定理の系として以下のことが得られる．

系 2.5 $\mathbb{R}^n$ の m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ は，$m>n$ のとき一次従属である．

これより，$\mathbb{R}^n$ のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ が一次独立であれば，$m\leq n$ であることが分かる．

2.2 数ベクトルの基底と次元

ベクトル空間 V のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が次の 2 つの条件:

(i) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は一次独立である．

(ii) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は V を生成する．即ち，任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in V$ に対して，ある実数の組 $c_1,c_2,\dots,c_n$ が存在して，

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n$$

と書ける．

をみたすとき，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は V の**基底**であるという．

例 2.6 $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^n$ の基底になる．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という．また，各 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル**という．

注意 2.7 一般に，$\mathbb{R}^n$ 及び，その部分空間に対して，有限個のベクトルからなる基底が取れるが，その取り方は無数にある．

ここで，$\mathbb{R}^2$ の場合について考えてみよう．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の一次独立な 2 つのベクトルとする．すると，これらは $\mathbb{R}^2$ の基底になる．実際，$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，系 2.5 により，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$ は一次従属である．即ち，$(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \neq (0, 0, 0)$ である，$(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ が存在して，

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となる．もし，$\beta = 0$ とすると，$(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ かつ

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

となり，これは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が一次独立であることに矛盾．従って $\beta \neq 0$．よって，

$$\boldsymbol{b} = (-\beta^{-1}\alpha_1)\boldsymbol{a}_1 + (-\beta^{-1}\alpha_2)\boldsymbol{a}_2$$

と書ける．今，$\boldsymbol{b}$ は任意のベクトルであったから，これは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成していることを示している．即ち，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．

全く同様の議論により，次が得られる．

定理 2.8 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の一次独立なベクトルのとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．

$\boxed{\text{ポイント}}$ $\mathbb{R}^n$ で一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を見つければ，いつでもそれらが $\mathbb{R}^n$ の基底になる．

例題 2.9 $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

解答 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトルを考えているので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを示せばよい．(定理 2.8) 即ち，連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_1 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

が自明な解しか持たないことを示せばよいが，これは明らかである．従って，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．□

前述のように，ベクトル空間 V に n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ からなる基底が存在するとき，任意の $(n+1)$ 個以上のベクトルの組は一次従属である．従って，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ も V の基底であるとすると，$m \leq n$．さらに，$(m+1)$ 個以上のベクトルの組は一次従属となるので，$n \leq m$ でなければならない．従って，$m = n$ である．即ち，

定理 2.10 V をベクトル空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 及び，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ をともに V の基底とする．このとき，$m = n$ である．

一方で，定理 2.8 より，任意の n 個の一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ は V の基底になる．従って，次のことが分かる．

$\boxed{\text{ポイント}}$ 一般に，ベクトル空間の基底の取り方は無数にあるが，**基底を構成するベクトルの数は一定**である．

ベクトル空間 V に対して，V の基底に含まれるベクトルの数を V の**次元**といい，$\dim(V)$ と表す．

例 2.11 $\mathbb{R}^n$ の次元は n である．

ベクトル空間の次元に関して，次は最も基本的な定理である．

定理 2.12 ベクトル空間 V とその部分空間 U に対して，$\dim(U) \leq \dim(V)$ が成り立つ．さらに，

$$\dim(U) = \dim(V) \Longleftrightarrow U = V$$

が成り立つ．

補題 2.13 V をベクトル空間，$\boldsymbol{a} \in V$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{a} \text{ が一次独立 } \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

証明 ($\Longrightarrow$) 対偶を考える．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とすると，$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるので，$\boldsymbol{a}$ は一次従属である．
($\Longleftarrow$) 対偶を考える．$\boldsymbol{a}$ が一次従属であれば，ある $c \in \mathbb{R}$ であって，$c \neq 0$ かつ，$c\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるものが存在する．そこで，この式の両辺に c^{-1} を掛ければ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を得る．□

例題 2.14 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0 \right\}$$

において，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は基底になることを示せ．

解答 まず，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ ゆえ，前補題より $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は一次独立．一方，任意の $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ に対して，$y = -x$ より，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．即ち，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は W を生成している．従って，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は W の基底である．□

2.3 抽象ベクトル空間

本小節では，数ベクトル空間の自然な一般化である抽象ベクトル空間について解説する．余裕のない方はとりあえず飛ばして読んでも殆んど差し支えない．

集合 V に対して，以下の演算が定義されているものとする．

I. (加法) 任意の V の 2 つの元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，ある元 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ が一つ決まる．

II. (スカラー倍) 任意の $\mathbb{R}$ の元 $\alpha \in \mathbb{R}$ と，任意の V の元 $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，ある元 $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ が一つ決まる．

さらに，V が以下の条件（ベクトル空間の公理）を満たすとき，V を $\mathbb{R}$ **上のベクトル空間**という．

1. 結合法則 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

2. 交換法則 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

3. 零元の存在 ある元 $\mathbf{0} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

4. マイナス元の存在 各 $a \in V$ に対して，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ となる元 $\boldsymbol{a}' \in V$ が存在する．

5. $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

6. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

7. $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a}), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

8. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

一般に，ベクトル空間 V の元のことを**ベクトル**といい，K の元を**スカラー**という．上の公理において，$\mathbf{0}$ を**零ベクトル**という．また，$\boldsymbol{a}'$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ と書く．

例 2.15 これまでに扱った，数ベクトル空間

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

は，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．数ベクトル空間でないような一般のベクトル空間を**抽象ベクトル空間**という．

以下のような事実は，数ベクトル空間においては当たり前のように扱っているが，一般の抽象ベクトル空間においては**ベクトル空間の公理から導かれる**ものである．ベクトル空間の公理に慣れるためにも各自確認してほしい．

定理 2.16 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とするとき，以下のことが成り立つ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とするとき，

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \text{ ならば } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とするとき，

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \text{ ならば } \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$

(3) 各 $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，

$$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \quad (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$$

証明 (1) 次の式変形から得られる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \mathbf{0} + \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= -\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = (-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \mathbf{0} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \mathbf{0}$ ゆえ，(1) の結果から $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ を得る．
(3) $0 \in R$ に対して，$0 = 0 + 0$ が成り立つ．従って，

$$0\boldsymbol{a} = (0 + 0)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a}$$

であるから，(2) より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を得る．また，$1 + (-1) = 0$ より，

$$1\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a}$$

となる．ベクトル空間の公理より，$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ であり，上の結果から $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である．即ち，

$$\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

となる．よって，再びベクトル空間の公理から，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ を得る．□

さて，一般のベクトル空間に対しても，数ベクトル空間の場合と全く同様に，ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，**一次結合**，**一次独立**，**一次従属**なる概念が定義される．各自確認されたい．

ベクトル空間 V の部分集合 $\mathfrak{U}$（**無限集合であっても良い**.）が次の 2 つの条件:

(i) $\mathfrak{U}$ に属する相異なる有限個のベクトルは一次独立である．

(ii) V に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in K^n$ は，$\mathfrak{U}$ に属する有限個のベクトルたちの一次結合として表わされる．

をみたすとき，$\mathfrak{U}$ は V の**基底**であるという．数ベクトル空間の場合と異なる点は，基底 $\mathfrak{U}$ が無限集合の場合もある点である．しかしながら，以下，**特に断らない限り**，**ベクトル空間と言えば次のような性質を満たす場合のみを考える**ことにする．

$(*)$「ある自然数 N が存在して，任意のベクトルの列 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ は一次従属となる.」

一般に，この条件は

$(**)$「有限個のベクトルからなる基底が存在する」

と同値であることに注意しておく．

基底が無限集合になるような例で重要なものをいくつか挙げておこう．

例 2.17 $\mathbb{R}$ とは無関係の文字 x（$\mathbb{R}$ 上の**不定元**と呼ばれる.）をとる．このとき，形式的な式

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

を $\mathbb{R}$ 上の**多項式**という.（これは，飽くまで形式的な式であり，ここでは $\mathbb{R}$ 上の函数とはみなさない.）

$$g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

を $\mathbb{R}$ 上の多項式とするとき，

$$f = g \in \mathbb{R}[x] \Longleftrightarrow n = m \text{ かつ } a_i = b_i,\ 0 \leq i \leq n$$

である．

さて，$\mathbb{R}$ 上の多項式全体の集合を $\mathbb{R}[x]$ とき，$\mathbb{R}[x]$ に和を，$f, g \in \mathbb{R}[x]$ に対して

$$f + g = (a_N + b_N)x^N + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

で定める．ここで，$N = \max\{n, m\}$ であり，$n = N$ のとき，

$$b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_N = 0$$

とみなす．$N = m$ の場合も同様である．一方，$\mathbb{R}[x]$ にスカラー倍を

$$\alpha f = (\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$$

で定める．すると，これらの演算により，$\mathbb{R}[x]$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．また，$\mathbb{R}[x]$ の定義から

$$\mathcal{U} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

は $\mathbb{R}[x]$ の基底であることが分かる．

次に，$\mathbb{R}$ 上の函数たちのなすベクトル空間について考えてみよう．

例 2.18 (函数空間) 実数 $\mathbb{R}$ 上の函数 $f(x)$ 全体のなす集合を C とおく．C 上に和とスカラー倍を，任意の $f, g \in C$ 及び，$\alpha \in C$ に対して，

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定める．このとき，C は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．

実際，任意の $f = f(x), g = g(x), h = h(x) \in C$ 及び，実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}$ における交換法則から，

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

が成り立つ．ゆえに，C における交換法則

$$f + g = g + f$$

が成り立つ．同様に，C における結合法則

$$(f+g)+h=f+(g+h)$$

も, $\mathbb{R}$ における結合法則から導かれる．和に関する零は $\mathbf{0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, つまり全ての $x\in\mathbb{R}$ に対して $0\in\mathbb{R}$ を対応させる函数が C の零である．$f\in C$ に対するマイナス元は, $(-f)(x):=-f(x)$ で定義される函数 $-f$ である．また $a,b\in\mathbb{R}$ に対して,

$$a(f+g)=af+ag,\ (a+b)f=af+ag$$

といった分配法則についても，$\mathbb{R}$ の分配法則から導かれる．さらに,

$$(ab)f=a(bf),\ 1f=f$$

といった性質も同様に示される．よって，C はベクトル空間の公理を満たすので，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．

さて，$\mathbb{R}$ 上の多項式

$$f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[x]$$

を $\mathbb{R}$ 上の函数とみなすことによって，$f\in C$ と思える.（このような f を $\mathbb{R}$ 上の多項式函数ともいう.）2 つの多項式

$$f=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\quad g=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\in C$$

に対して,

$$f=g\in C\iff n=m\ \text{かつ}\ a_i=b_i,\ 0\le i\le n$$

が成り立つ．実際，$f=g$ とすると，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x)=g(x)$ が成り立つ．そこで，$x=0$ を代入して $a_0=b_0$ を得る．

一般に，多項式 f を $\mathbb{R}$ 上の函数とみなしたとき，f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり，微分して得られる導函数 $f'(x)$ も多項式となり，従って $\mathbb{R}$ 上の函数と思える．明らかに，$f=g$ のとき，$f'=g'$ であるから，$x=0$ を代入して，$a_1=b_1$ を得る．以下この操作を繰り返すと，各 $n\ge 1$ に対して，$f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)$ より，$n!a_n=n!b_n$ を得る.（ここで，$f^{(n)}$ は f の n 階導函数を表す.）従って，$a_n=b_n$ となる．

以上の議論より，$\mathbb{R}$ 上の 2 つの多項式 f, g に対して，$\mathbb{R}[x]$ の元と見る場合でも C の元と見る場合でも，係数が全て等しいときに限り $f=g$ であることが分かる．しかしなが

ら，$\mathbb{R}$ **上の多項式を** $\mathbb{R}[x]$ **の元と見るか** C **の元と見るかということは全く異なる**概念であるので注意されたい．

さて，任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，多項式の組 $1, x, \ldots, x^n$ は C において一次独立であることを示そう．そこで，

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 1 = \mathbf{0}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

とする．ここで，$\mathbf{0}$ は函数としての零であり，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbf{0}(x) = 0$ となる定数函数である．上式左辺の多項式を $f \in C$ とおく．このとき，各 $0 \leq i \leq n$ に対して，$f^{(i)}(0) = \mathbf{0}(0)$ を考えて，$a_i = 0$ を得る．即ち，$1, x, \ldots, x^n$ は C において一次独立である．

今，$n \geq 1$ は任意であったから，C には有限個のベクトルからなる基底は存在しないことがわかる．

2.4 演習問題

問題 2.1 $\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立であることを示せ．

(2) 実数 c_1, c_2 を用いて，$\boldsymbol{a}_3$ を

$$\boldsymbol{a}_3 = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2$$

の形に表せ．

問題 2.2 $\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2$$

の形に表せ．

問題 2.3 $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合で表せ.

問題 2.4 $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合で表せ.

3　写像と線型写像

<u>本講の目標</u>

- 写像の定義を理解する．
- 写像の**全射性**，及び**単射性**について理解する．
- **線型写像**の定義と性質を理解する．
- 線型写像の**像**と**核**が部分空間になること，及び**次元公式**を理解する．

3.1　写像とその性質

二つの集合 S と S' があって，集合 S の各要素 x に，集合 S' のある要素 x' が一つ対応しているとき，この対応を S から S' への**写像**といい，$f : S \to S'$ などと表す．

例題 3.1 以下の各対応について，それらが写像になっているかどうか，理由をつけて答えよ．

(1) 実数 x に対して，$y^3 = x$ となる実数 y を対応させる対応．

(2) 正の実数 x に対して，$y^2 = x$ となる実数 y を対応させる対応．

解答　(1) 任意の実数 x に対して，$y^3 = x$ となる実数 $y = \sqrt[3]{x}$ が一意的に存在する．従って，これは写像である．
(2) x を任意の正の実数とする．$x = 0$ のとき，$y^2 = x$ となる実数 y は 0 のみである．一方，$x > 0$ とすると，$y^2 = x$ となる実数 y は $\pm\sqrt{x}$ で，$\sqrt{x} \neq -\sqrt{x}$ であるから，x に対して y が一意的に定まらない．ゆえに，この対応は写像ではない．$\square$

写像 $f : S \to S'$ によって，$x \in S$ に対応する S' の元を，f による x の**像**といい，$f(x)$ と表す．$f(x)$ たちの全体を

$$f(S) = \{f(x) \,|\, x \in S\}$$

と書いて，f の**像**という．

例 3.2 実数全体 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$f(x) = x^2$ で定める．このとき，f の像は負でない実数全体である．即ち，

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\}$$

となる．

写像 $f : S \to S'$ に対して，S の異なる 2 つの元が S' の異なる 2 つの元に対応しているとき，f は**単射**であるという．対偶を考えることにより，

$$f \text{ が単射} \iff f(x) = f(y) \text{ ならば } x = y$$

であることが分かる．即ち，異なる 2 点が同じ点に写るようなことがないとき，f は単射であるという．

写像 $f : S \to S'$ に対して，すべての S' の元 x' が S のある元 x の像になっているとき，f は**全射**である，または**上への写像**であるという．

写像 $f : S \to S'$ が全射かつ単射のとき，**全単射**という．このとき，S の各元と S' の各元は過不足なくちょうど一対一に対応する．従って，S' の各元 x' に対して，$x' = f(x)$ となるような S の元 x が一意的に決まる．これにより，S' から S への写像 $f^{-1} : S' \to S$ が定まる．この f^{-1} を f の**逆写像**という．

例題 3.3 a を実数とするとき，写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax$ は全射か単射か理由をつけて答えよ．

解答 (1) $a \neq 0$ のとき．まず，単射性について考えよう．$x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) = f(y)$ と仮定する．すると，$ax = ay$ となるが，$a \neq 0$ ゆえ，両辺に a^{-1} を掛けると，$x = y$ となる．従って，f は単射．次に全射性について考えよう．任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$y = a^{-1}x \in \mathbb{R}$ なる元を考えると，$f(y) = x$ となる．ゆえに，f は全射となる．よって，f は全単射である．ちなみに，逆写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，$g(x) = a^{-1}x$ である．
(2) $a = 0$ のとき．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) = 0$ となるので，明らかに全射でも単射でもない．$\square$

例 3.4 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，偶数全体の集合を $2\mathbb{Z}$ とおく．このとき，写像 $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ を

$$f(n) = 2n$$

で定義すると，f は全単射になる．

実際，任意の $m \in 2\mathbb{Z}$ に対して，m は偶数ゆえ，ある整数 $m' \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m = 2m'$ と書ける．このとき，$m = f(m')$ であるから，f は全射である．一方，$n, m \in \mathbb{Z}$ に対して，$f(n) = f(m)$ と仮定する．すると，$2n = 2m$ となるので，$n = m$ を得る．即ち，f は単射である．従って，f は全単射である．

注意 3.5 上の例を見ても分かるように，整数全体と偶数全体とは 1 対 1 に対応することが分かる．同様に，整数全体は奇数全体とも 1 対 1 に対応する．さらには，有理数全体とも 1 対 1 に対応することが知られている．

注意 3.6 有理数係数の多項式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$$

の根，即ち，$f(z) = 0$ を満たすような複素数 z を $\mathbb{Q}$ 上の**代数的数**という．例えば，1, $1/2$, $\sqrt{3}$, $1+\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ などは全て代数的数である．一方で，円周率 π やネイピアの自然対数の底 e などは代数的数ではない．

$\mathbb{Q}$ 上の代数的数全体を $\overline{\mathbb{Q}}$ とおく．$\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の**代数閉包**という．$\overline{\mathbb{Q}}$ は，$\mathbb{C}$ の和と積により体になることが知られており，集合として $\mathbb{Z}$ と 1 対 1 に対応することが知られている．

2 つの写像 $f : S \to S'$，$g : S' \to S''$ に対して，$x'' = g(f(x))$ で定まる写像を f と g の**合成写像**といい，$g \circ f : S \to S''$ と表す．即ち，

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

である．

例題 3.7 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をそれぞれ以下で定義する．

$$f\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}, \quad g\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = 2x + y$$

このとき，これらの合成 $g \circ f$ を求めよ．

解答 定義に従って計算すれば良い．

$$g \circ f\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = g\Big(\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}\Big) = 2(x+y) + (x-y) = 3x + y$$

となる．□

集合 S の元 x に x を対応させることで定まる，S から S 自身への写像を S 上の**恒等写像**といい，$\mathrm{id}_S : S \to S$ または，$1_S : S \to S$ と表す．明らかに，恒等写像は全単射であり，$1_S^{-1} = 1_S$ となる．以下の定理は，よく用いられる．

定理 3.8 2 つの写像 $f : S \to S'$，$g : S' \to S''$ に対して，

(1) $g \circ f : S \to S''$ が単射であれば，f は単射．

(2) $g \circ f : S \to S''$ が全射であれば，g は全射.

この定理の系として次が得られる.

系 3.9 2 つの写像 $f : S \to S'$，$g : S' \to S$ に対して，$g \circ f = 1_S$ かつ，$f \circ g = 1_{S'}$ であれば f は全単射で，$g = f^{-1}$ である.

3.2 線型写像（一次写像）

次に，ベクトル空間の間の写像を考えよう．ベクトル空間は単なる集合ではなく，和とスカラー倍が定義された集合であった．従って，それらの間の写像を考えるときは，これらの演算と両立するような,「特別な」写像を考えることが重要になる.

V，V' をベクトル空間とする．V から V' への写像 $f : V \to V'$ が 2 つの条件

(i) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ.

(ii) 任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 及び，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

を満たすとき，f を**線型写像**または，**一次写像**という．特に，V から自分自身への線型写像 $f : V \to V$ を V 上の**線型変換**または，**一次変換**という.

例題 3.10 以下の写像は線型写像かどうか，理由をつけて答えよ.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ f(x) = 2x$.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ g(x) = x + 1$.

解答 (1) f が線型写像であること，即ち，和とスカラー倍を保つことを示そう．和については，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

となるので良い．スカラー倍についても，任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha f(x)$$

となるので明らか．従って，f は線型写像である．
(2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$g(x+y) = (x+y)+1 = x+y+1$$

となるが，これは一般に，$g(x)+g(y)$ と等しくない．実際，

$$g(0)+g(1) = 1+2 = 3 \neq 2 = g(0+1)$$

である．ゆえに，g は線型写像ではない．□

線型写像が単射かどうかを判定するために，以下の補題は有用である．

補題 3.11 $f : V \to V'$ を線型写像とする．このとき，

$$f \text{ が単射} \iff f(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ ならば } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

線型写像 $f : V \to V'$ が全単射であるとき，f は V から V' への**同型写像**という．また，このとき，V と V' は（ベクトル空間として）**同型**であるといい，$V \cong V'$ と表す．

3.3 線型写像の像と核

本小節では，線型写像を理解する上で重要な，像と核の概念について学ぶ．まず，線型写像の最も基本的な性質について確認しておこう．

補題 3.12 $f : V \to W$ を線型写像とするとき，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

証明 実際，

$$f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0})$$

であるから，直ちに求める結果を得る．□

さて，線型写像 $f : V \to W$ に対して，

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \in W \mid \boldsymbol{x} \in V\} \subset W$$

を f の**像**という．また，

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \subset V$$

を f の**核**という．

例 3.13 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線型写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y$$

で定める．すると，f の像は $\mathbb{R}$ である．実際，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x + 0 = x$$

である．一方，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$$

とすると，定義より，$x + y = 0$．即ち，$y = -x$ である．よって，

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

となることが分かる．

重要な事実として，線型写像 f の像と核はそれぞれ部分空間になる．即ち，以下のことが成り立つ．

定理 3.14 線型写像 $f: V \to W$ に対して，

(1) $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間である．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である．

証明　どちらも，部分空間となることを定義に従って示していけばよい．
(1) まず，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathrm{Im}(f)$ である．次に，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ に対して，ある $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in V$ が存在して，

$$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{y}')$$

となる．このとき，f が線型写像であることに注意して，

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}') + f(\boldsymbol{y}') = f(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}') \in \mathrm{Im}(f)$$

となる．さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f)$，及び $a \in R$ に対して，

$$a\boldsymbol{x} = af(\boldsymbol{x}') = f(a\boldsymbol{x}') \in \mathrm{Im}(f)$$

となる．従って，$\mathrm{Im}(f)$ は和とスカラー倍で閉じているので，W の部分空間である．
(2) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より，$\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．また，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

であるから，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(f)$ となる．一方，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$，及び $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(a\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となるので，$a\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．従って，$\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である．□

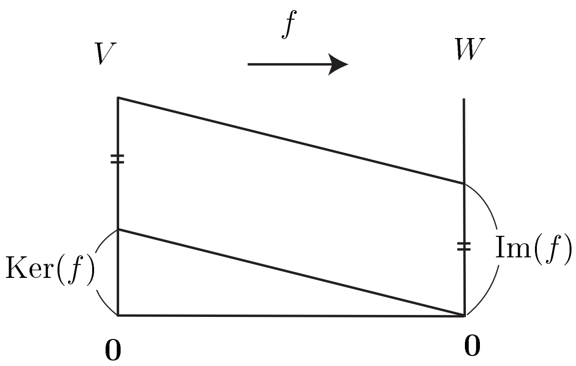
線型写像の次元に関して次の定理は最も基本的なものである．

定理 3.15 (次元公式) 線型写像 $f : V \to W$ に対して，

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

が成り立つ．

この定理の主張をイメージで表すと下図のようになる．



例 3.16 例 *3.13* で考えた，線型写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*;*

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y$$

に対して，$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ ゆえ，$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ である．従って，

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$$

となる．このことは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が $\mathrm{Ker}(f)$ の基底になることからも分かる．

3.4 演習問題

問題 3.1 以下の写像は線型写像かどうか，理由をつけて答えよ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y$$

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$$g(x) = x^2$$

問題 3.2 線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + y + z$$
で定める．

(1) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$（即ち，$f$ は全射）を示せ．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ．(ヒント：$x + y + z = 0$ のとき，
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
となることに注意せよ.)

4 行列

<u>本講の目標</u>

- 行列の和，積を理解し，その扱いに慣れる．
- 行列の積は一般に**非可換**であることを確認する．
- 線型写像の**行列表示**を理解し，基底を一つずつ選ぶことによって，線型写像と行列が 1 対 1 に対応することを理解する．

4.1 行列の定義と性質

下のように，実数を縦に m 個ずつ，横に n 個ずつ並べたものを (m,n) **実行列**という．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

各 $1 \leq i \leq m$ に対して，

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

を行列 A の**第 i 行**という．また，各 $1 \leq j \leq n$ に対して，

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

を行列 A の**第 j 列**という．さらに，第 i 行，第 j 列の要素 a_{ij} を行列 A の (i,j) **成分**という．上記の行列は $A = (a_{ij})$ と略記することがある．

一般に，(n,n) 行列は n **次正方行列**と呼ばれる．n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において，対角線上に並ぶ成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を**対角成分**という．また，対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を**対角行列**という．また，すべての成分が 0 である行列を**零行列**といい O と表す．

$(n,1)$ 行列は n **次元列ベクトル**，$(1,n)$ 行列は n **次元行ベクトル**と呼ばれる．(m,n) 実行列全体の集合を $M(m,n,\mathbb{R})$ と表し，特に，n 次実正方行列全体の集合 $M(n,n,\mathbb{R})$ は，$M_n(\mathbb{R})$ と略記されることがある．

さて，集合 $M(m,n,\mathbb{R})$ に和とスカラー倍を次のようにして定義する．

I. 和 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in M(m,n,K)$ に対して，

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

II. スカラー倍 $\alpha\in K$, $A=(a_{ij})\in M(m,n,K)$ に対して，

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

すると，$M(m,n,\mathbb{R})$ は上記の和とスカラー倍に関してベクトル空間になる．

(i,j) 成分だけが 1 で他の成分がすべて 0 であるような行列を**行列単位**といい，E_{ij} と表す．すると，任意の行列 $A=(a_{ij})\in M(m,n,\mathbb{R})$ は，行列単位の一次結合として以下のように一意的に表わされる．

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

即ち，$M(m,n,\mathbb{R})$ **は行列単位たちを基底とするベクトル空間**となる．従って，

$$\dim M(m,n,\mathbb{R})=mn$$

が成り立つ．

次に，行列の積について考えよう．(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ と，(n,l) 行列 $B=(b_{jk})$ に対して，A と B の積

$$AB=(c_{ik})$$

を

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

によって定義する．従って，AB は (m,l) 行列となる．

注意 4.1 行列 A と行列 B の積が定義されるのは，A **の列数と** B **の行数が等しいとき**に限ることに注意されたい．

行列の積については以下の性質がある．

1. 結合法則 $(AB)C=A(BC)$

2. 分配法則 $A(B+C)=AB+AC$

3．分配法則 $(A+B)C = AC + BC$

4． $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B), \quad \alpha \in K$

実数や複素数の積の場合と著しく異なる行列の積の性質として，一般には

$$AB = BA$$

は**成り立たない**．例えば，$(2,2)$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$AB = O, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

ここで，n 次正方行列の場合について考えよう．この場合，任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して A と B の積 $AB \in M_n(\mathbb{R})$ が定義される．特に，行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 及び，$k > 1$ に対して，A の k 個の積 $AA \cdots A$ を A^k と表す．また，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

によって定義される行列を**単位行列**といい，E_n もしくは単に E と表す．単位行列は次の性質を持つ．任意の (m,n) 行列 A に対して

$$E_m A = A E_n = A.$$

4.2 線型写像の行列表示

まず，線型写像の重要な例として，行列が定める線型写像というものを考えよう．(m,n) 型の実行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を考え，写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を，

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

によって定義する．すると f_A は線型写像になる．

逆に，任意の線型写像はある行列を用いて上のような形に書けることを示そう．まず，V, W をベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とし，固定しておく．

$$\dim(V) = n, \quad \dim(W) = m$$

である．線型写像 $f : V \to W$ に対して，$f(\boldsymbol{v_1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W のベクトルであるから，W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の一次結合として一意的に

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v_1}) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{12}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{1m}\boldsymbol{w}_m \\ f(\boldsymbol{v_2}) &= a_{21}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{2m}\boldsymbol{w}_m \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ f(\boldsymbol{v_n}) &= a_{n1}\boldsymbol{w}_1 + a_{n2}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{w}_m \end{aligned}$$

と書ける．このとき，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

とおく.（**行と列の関係に注意!**）すると，

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

となる.

$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとし，成分ベクトルを $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする．即ち，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となっている．同様に，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ の成分ベクトルを $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ とすると，

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) \\ &= (f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となることが分かる．この行列 A を線型写像 f の**行列表示**という．(行列表示は，V と W の**基底の取り方に依る**ことに注意する．)

$\boxed{\text{ポイント}}$　線型写像 $f : V \to W$ から上の方法で (m, n) 行列 A を構成する操作と，(m, n) 行列 A から線型写像 $f_A : V \to W$ を構成する操作は互いに逆の操作であり，従って，**線型写像 $f : V \to W$ と (m, n) 行列とは一対一に対応する**．

$\boxed{\text{ポイント}}$　V, W をベクトル空間とし，$f : V \to W$ を線型写像，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．すると，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)$$

である．即ち，**線型写像は基底の行き先を指定することで完全に決定される**．従って，2 つの線型写像 $f : V \to W$，$g : V \to W$ に対して，基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の像が一致すれば，写像として f と g は一致である．即ち，

$$f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i), \quad 1 \le i \le n \quad \Longleftrightarrow \quad f = g$$

となる．

例 4.2 V を任意のベクトル空間とし，$\boldsymbol{a}_n, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を V の n 個のベクトルとする．この時，線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to V$ が

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

で定義される．さらに，線型写像は基底の像で一意的に決まるので，f は $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$, $(1 \le i \le n)$ となるただ一つの線型写像である．

例題 4.3 線型写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + 2x_2$$

で定義する．このとき，$\mathbb{R}^2$ 及び，$\mathbb{R}$ の標準基底に関して f を行列表示せよ．

解答 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とし，$\boldsymbol{e}'_1$ を $\mathbb{R}$ の標準基底とすれば,

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 = \boldsymbol{e}'_1$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 = 2\boldsymbol{e}'_1$$

となるので，f の行列表示は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

4.3 演習問題

問題 4.1 以下の行列の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$

問題 4.2 実ベクトル空間の間の写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1 - x_2$$

を考える．

(1) f は線型写像であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 及び，$\mathbb{R}$ の標準基底に関して，f を行列表示せよ．

問題 4.3 実ベクトル空間の間の写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + 2x_2$$

を考える．

(1) f は線型写像であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 及び，$\mathbb{R}$ の標準基底に関して，f を行列表示せよ．

5 行列の基本変形

本講の目標

- 行列の**基本変形**を理解し，行列の**階数**を求める．
- 行列の基本変形を利用して，与えられた行列が正則かどうかを判定し，正則であればその**逆行列**を具体的に計算する．

5.1 行列の基本変形と階数

本講では，与えられた行列をより簡単な行列に変形することを考える．本講で学ぶ，行列の基本変形は，後に**逆行列を求める**とき，**連立一次方程式を解く**過程，及び**行列式を求める**際に，非常に重宝されるので完璧に理解することが望まれる．

一般に，行列について以下の 3 種類の変形を**行（列）基本変形**という．

(I) $c \in \mathbb{R}$ に対して，第 j 行（第 i 列）を c 倍したものを第 i 行（第 j 列）に加える．

(II) 第 i 行（列）と第 j 行（列）を入れ換える．

(III) $0 \neq c \in K$ に対して，第 i 行（列）を c 倍する．

これらの操作を行列の積を用いて表すと次のようになる．まず，以下の 3 種類の正方行列を**基本行列**という．

$$P(i,j;c) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E & O & \cdots & \cdots & O \\ O & 1 & & c & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & E \end{pmatrix} \end{array} = E + cE_{ij}, \quad i \neq j$$

$$Q(i,j) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E & O & \cdots & \cdots & O \\ O & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & E & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & E \end{pmatrix} \end{array}, \quad i \neq j$$

$$
R(i;c) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \quad\ i \\ \begin{pmatrix} E & O & \cdots & O \\ O & c & & \vdots \\ \vdots & & E & O \\ O & & & E \end{pmatrix} \end{array}
$$

補題 5.1 行（列）基本変形 (I), (II), (III) はそれぞれ，m 次（n 次）の基本行列 $P(i,j;c)$, $Q(i,j)$, $R(i;c)$ を左（右）から掛けることと同値である．

各自，具体的な計算例を通して確認してほしい．

次に，基本変形を利用して行列の簡単にすることを考えよう．まず，行番号が増えるにつれて，左側に並ぶ 0 の数が増えていくような行列を**階段行列**という．即ち，

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & * & * \\
\vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * \\
O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O
\end{pmatrix} \end{array} \tag{2}
$$

なる行列である．ここで，

$$
j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r} \neq 0
$$

である．このとき，任意の (m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ は，行基本変形のみを行うことによって，階段行列に変形できる．その手順は以下の通りである．

手順 1 A の第 1 列の成分 $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ の中に 0 でないものがあるとき，その 1 つをとる．例えば，$a_{i1} \neq 0$ とする．このとき，A の第 1 行と第 i 行を入れ換える．この操作を考えることによって，初めから $a_{11} \neq 0$ であるとしてよい．

手順 2 各 $2 \leq i \leq m$ に対して，

$$
\text{第}\, i\, \text{行} + \text{第}\, 1\, \text{行} \times \frac{-a_{i1}}{a_{11}}
$$

という行基本変形を行うことにより，

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
0 & * & \cdots & * \\
\vdots & * & \cdots & * \\
0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
$$

の形に変形される．

手順 3 第 1 列の成分がすべて 0 である場合は，何も施さず，

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

のままにしておく．

手順 4 次に，上の行列 $*$ の部分に同様の操作を施す．この操作を繰り返すことによって，最終的に階段行列に到達できる．

さらに，以下のような基本変形を行うことで，もっと簡単な行列に変形できる．

手順 5 階段行列 (2) に対して，さらに行基本変形を続けることにより，第 j_r列 $= \boldsymbol{e_r}, \ldots,$ 第 j_1列 $= \boldsymbol{e_1}$ となるように出来る．実際，第 r 行を $a_{rj_r}^{-1}$ 倍すると，(r, j_r) 成分を 1 にすることが出来る．さらに，$1 \leq i \leq r-1$ について，第 i 行に第 r 行の $-a_{ij_r}$ 倍を加えることで，第 j_r列 $= \boldsymbol{e_r}$．以下，この操作を 第 j_{r-1}列, $\ldots$, 第 j_1列 と繰り返せばよい．

手順 6 手順 5 で得られた行列に対して，列基本変形（列の入れ換え）を施すことにより，

$$\begin{pmatrix} E_r & A' \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形に変形できる．ここで，$A' = (a'_{ij})$ とおく．

手順 7 最後に，$r \leq k \leq n$ について，第 k 列に第 1 列の $-a'_{1k}$ 倍，第 2 列の $-a'_{2k}$ 倍，$\ldots$, 第 r 列の $-a'_{rk}$ 倍を加えると，

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形に変形できる．

これより，次の定理を得る．

定理 5.2 任意の (m, n) 行列 A に対して，しかるべき基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

なる形に変形できる．

$\boxed{\text{ポイント}}$ 一般に，任意の (m,n) 行列 A に対して，A に**ある基本変形**を施して，

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となったとする．一方，A に**別の基本変形**を施して

$$\begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となったとすると，$r = r'$ が成り立つ．即ち，A に基本変形を施して定理 5.2 の形にするとき，**対角成分に並ぶ 1 の数 $(= r)$ は基本変形の仕方に依らない**．より強く，次の事実が成り立つことが知られている．

A が定める線型写像を $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ とするとき，

$$\dim(\mathrm{Im}(f_A)) = r.$$

(m,n) 行列 A に対して，上のようにして一意的に定まる自然数 r を A の**階数**といい，$\mathrm{rank}\, A$ と表す．

注意 5.3 ここで，次元公式について考えてみよう．線型写像 $f : V \to W$ に対して，

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

を次元公式といった．

今，$V = \mathbb{R}^n$，$W = \mathbb{R}^m$ としよう．また，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の標準基底に関する行列表示を

$$A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とする．即ち，$f = f_A$ である．すると，この場合，明らかに

$$\dim(\mathrm{Im}(f_A)) = r, \quad \mathrm{Ker}(f_A) = \langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$$

であるから，次元公式が正しいことが分かる．

行列 A が一般の場合，行列の基本変形を考えることにより，ある m 次正則行列 P と，ある n 次正則行列 Q が存在して，

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = A'$$

となる．（上述の議論参照.）すると，$f_P \circ f_A \circ f_Q = f_{A'}$ であり，f_P，f_Q は同型写像であるから，$f = f_{A'}$ の場合に帰着でき，常に次元公式が正しいことが分かる．

例題 5.4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ.

解答　**Step 1**. まず $(1,1)$ 成分が 0 なので, 行の入れ替えから始める. たとえば 2 行目と 1 行目を入れ替えて,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

としよう. $(1,1)$ 成分を 1 にするために, 1 行目を 2 で割って,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

を得る.

Step 2. 1 列目の $2, 3$ 行目成分を 0 にする. 2 行目はすでにそうなっているので, 3 列目から 1 列目を引くことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を得る.

Step 3. 次に $(2,2)$ 成分をみると，すでに 1 であるからこのままでよい. $(3,2)$ 成分を 0 にするためには, 3 行目から 2 行目をひいて,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る. よって階数は $\mathrm{rank}(A) = 2$ となる. □

5.2　逆行列

n 次正方行列 A に対して,

$$AX = XA = E_n \tag{3}$$

となる n 次正方行列 X が存在するとき，X を A の**逆行列**といい，A^{-1} と表す. また，逆行列が存在する行列 A を**正則行列**という.

例 5.5 行列の基本変形で用いた基本行列は正則行列で，逆行列も基本行列になる．例えば，

$$P(1,2;c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対しては，

$$P(1,2;c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P(1,2;-c)$$

である．他も同様である．

注意 5.6 一般に，**すべての正方行列が正則とは限らない**．即ち，すべての行列が逆行列を持つとは限らない．実際，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が正則だとすると，ある 2 次正方行列

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が存在して，$AB = E_2$ となる．このとき，

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるが，これは単位行列ではない．よって矛盾である．

注意 5.7 一方，n 次正方行列 A に逆行列が**存在すればそれは一意的**である．実際，X, $X' \in M_n(\mathbb{R})$ を (3) を満たす行列とするとき，

$$X = XE_n = X(AX') = (XA)X' = E_nX' = X'$$

となる．

逆行列の満たす最も基本的な性質として次のものがある．

定理 5.8 A, B を n 次正則行列とする．このとき，AB も正則行列であって，

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ．

注意 5.9 A, B を n 次正則行列とする．このとき，

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \iff AB = BA$$

である．また，

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

となる．

一般に，A を n 次正方行列で $\operatorname{rank} A = n$ なるものとすると，**行による基本変形のみ**で A を E_n の形に変形することが出来る．即ち，ある n 次正則行列 P が存在して，$PA = E_n$ となる．このとき，

$$A = E_n A = (P^{-1}P)A = P^{-1}(PA) = P^{-1}E_n = P^{-1}$$

となる．従って，

$$AP = P^{-1}P = E_n$$

であり，A は正則行列である．一般には，これの逆も成り立つ．即ち，

定理 5.10 A を n 次正方行列とするとき，

$$\operatorname{rank} A = n \iff A \text{ が正則行列}$$

が成り立つ．

次に，与えられた n 次正方行列 A が正則かどうかを判定し，正則であればその逆行列を具体的に計算する方法を述べる．それには以下の手順に従えば良い．

手順 1 A と n 次単位行列 E_n を並べてできる，$(n, 2n)$ 行列 (A, E_n) を考える．

手順 2 (A, E_n) に**行基本変形のみを施して**，(E_n, P) なる形に変形する．(行列の言葉でいえば，P を $PA = E_n$ となる基本行列の積とするとき，P を左から (A, E_n) に掛けていることに対応している．実際，

$$P(A, E_n) = (PA, E_n) = (E_n, P)$$

である.）この段階において，もし (E_n, P) なる形に変形できなければ，A は正則ではない．(この場合は $\operatorname{rank} A < n$ となる.)

手順 3 このとき，$P = A^{-1}$ である．即ち，P が求める A の逆行列である．

例題 5.11 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が正則かどうかを調べ，正則なら逆行列を求めよ．

解答　Step 1. まず，$(3,6)$ 行列

$$(A,E_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

を考える．

Step 2. 次に行基本変形を行って，A の部分を簡単にしていく．まず，第 1 行と第 3 行を入れ換えて，第 1 行の -1 倍を第 2 行，第 3 行にそれぞれ加えると，

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&2&-2&0&1&-1\\0&1&0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

となる．そこで，第 2 行と第 3 行を入れ換えて，第 2 行の -2 倍を第 3 行に加えると，

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&-2&-2&1&1\end{pmatrix}$$

となる．第 3 行を -2 で割って，第 3 行の -1 倍を第 1 行に加えると，

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1/2&3/2\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&-1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

となる．従って，A は正則で，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1/2&3/2\\1&0&-1\\1&-1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

を得る．□

5.3　演習問題

問題 5.1 以下の行列に対して，行列の基本変形を用いて

$$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$

なる形に変形し，階数を求めよ．また基本変形を用いる際に，どのような操作を用いたか明記せよ．(例えば，

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\textit{2}\text{ 行に }\textit{1}\text{ 行の }-3\text{ 倍を加える}}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$$

という具合に.)

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&-1\\-1&0&3\end{pmatrix}$$

問題 5.2 以下の正則行列について，行列の基本変形を用いて逆行列を求めよ．また，基本変形を用いる際には，どのような操作を用いたか明記せよ．(例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{2}\,\text{行に}\,\textit{1}\,\text{行の}\,-3\,\text{倍を加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

という具合に.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6　行列式

本講の目標

- **行列式**の定義を理解し，与えられた行列の行列式を計算する．

6.1　行列式の定義と性質

n 次正方行列 $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に対して，以下の 3 条件を満たす，a_{ij} たちの式 $|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ を A の**行列式**といい，$\det A$, $|A|$ などと表す．

(1) 線型性 $|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ は，各列に関して線型的である．

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_i', \ldots, \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i', \ldots, \boldsymbol{a}_n|$$
$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, c\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = c|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$$

(2) 交代性 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じものがあれば $|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = 0$．即ち，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$, $(i \neq j)$ のとき，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = 0$$

(3) 正規化 単位行列 $E_n = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ に対しては，

$$|\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n| = 1$$

注意 6.1 一般に，上の 3 条件を満たす式 $|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ は一意的に存在することが知られている．より正確には，(1) 及び (2) を満たす式 $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は，$c = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ とするとき，

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = c|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$$

と一意的に表わされる．

上の注意から，行列式の最も重要な性質である，以下の定理が導かれる．

定理 6.2 A，B を n 次正方行列とするとき，

$$|AB| = |A|\,|B|$$

が成り立つ．

証明 $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ とおくと，

$$AB = (A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n).$$

そこで，

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = |A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n|$$

とおくと，$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ は行列式の条件 **(1)**, **(2)** を満たす．従って，注意 6.1 より，

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)|B| = |A|\,|B|$$

となる．□

この定理より，次の重要な事実が得られる．

定理 6.3 A を n 次正方行列とする．このとき，

$$A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

が成り立つ．

A が正則行列のとき，A の余因子行列と呼ばれるものを用いて，具体的に A の逆行列 A^{-1} を記述することもできる．定理 6.11 参照.

ここで，行列式が満たす基本的な性質についてまとめておこう．

$\boxed{\text{行列式の性質 }\textbf{(4)}}$ 条件 **(1)** より，ある i について $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ であれば，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = 0$$

である．実際，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_n| &= |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &\overset{(1)}{=} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \end{aligned}$$

より，$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = 0$ が得られる．

$\boxed{\text{行列式の性質 }\textbf{(5)}}$ 条件 **(1)** の下に，**(2)** は，

(2)' $|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ の 2 つの列 $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_j$, $(i \neq j)$ を入れ換えると符号が換わる．即ち，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = -|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|.$$

と同値である．実際，

$$
\begin{aligned}
0 &= |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&\overset{(1)}{=} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&\qquad + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&\overset{(2)}{=} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|
\end{aligned}
$$

となる．

$\boxed{\text{行列式の性質 (6)}}$ $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の第 i 列に，第 j 列 $(i \neq j)$ の定数倍を加えても行列式の値は変わらない．実際，

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&\qquad \overset{(1)}{=} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + c|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&\qquad \overset{(2)}{=} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n|
\end{aligned}
$$

以上の性質から次の補題を得る．

補題 6.4 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次従属であれば，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = 0$$

となる．

ここで，2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の行列式を計算してみよう．すると，

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{(6)}{=} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{21}a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{(3),(5)}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

より，

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

を得る．

全く同様にして，3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

に対して,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

を得る．これを，**サラスの公式**という．

行列式が満たす重要な性質として次のものがある．

定理 6.5 n 次正方行列 A に対して,

$$|{}^tA| = |A|$$

が成り立つ.

この定理より，行列式に関して，列に関して成り立つ性質は全て，行についても成り立つことが分かる．以下，これをまとめておく．

定理 6.6 $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする.

(i) 行列式は，行に関して線型的である．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ii) A の二つの行が等しければ，$|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(iii) A の一つの行の成分がすべて 0 であれば $|A| = 0$.

(iv) A の二つの行を入れ換えると行列式は -1 倍になる．即ち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

(v) A の一つの行を c 倍して，他の行に加えても行列式の値は変わらない．即ち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & \cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

(vi) A の行ベクトルたちが一次従属であれば $|A| = 0$.

次に，実際に行列式を計算する際に有用な，余因子展開について復習しよう．n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ から，その第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる，$(n-1)$ 次の正方行列を $A_{\langle ij \rangle}$ とかく．即ち，

$$A_{\langle ij \rangle} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

である．さらに，

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{\langle ij \rangle}|$$

とおき，A の (i,j) **余因子**という．このとき，次が成り立つ．

定理 6.7 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，

(i) $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|, \qquad 1 \le i \le n$

(ii) $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = |A|, \qquad 1 \le j \le n$

が成り立つ.

この定理の (i) を**第 i 行による余因子展開**といい，(ii) を**第 j 列による余因子展開**という．まず，以下の主張が直ちに従う.

例題 6.8 n 次上三角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して，

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

が成り立つ.

より一般には，次が言える.

定理 6.9 A が m 次正方行列，B が n 次正方行列，C を (m, n) 行列とするとき，

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

が成り立つ.

余因子展開は，行列式の計算上有用だが，実際の計算においては直接適用させるのではなく，以下のような操作を用いて行列を簡単なものに変形させておいてから用いるのが有効である.

$\boxed{\text{ポイント}}$ 行列式を計算するときのコツ.

余因子展開を用いて行列式を計算しようとするとき，余因子展開の性質から，どの行またはどの列に関して展開を行っても行列式を計算できる．従って，計算量を少なくするには，なるべく**成分に 0 が多い行または列**に適用させるのがよい．また，成分に 0 を持つような行（または列）がないときは，行列の基本変形（特に定理 6.6 の (i) と (iii)）を用いて**どれかの行（または列）を一つの成分が 1 で残りが 0 となるように変形してしまう**と，その後の計算が楽である.

与えられた行列の形によっては，特殊な工夫をすると素早く計算できたりすることもあるので，上記の操作がすべての場合において計算を簡略するための最善の方法というわけではないが，大抵の場合においては有効である.

例題 6.10 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算せよ．

解答 A に以下のような行基本変形

(1) 2 行目に 1 行目を足す．

(2) 3 行目に 1 行目の -2 倍を足す．

(3) 3 行目に 2 行目の 1 倍を足す．

を行った行列を A' とすると，

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．従って，$|A| = |A'| = 8$ を得る．□

余因子行列を用いた逆行列の記述

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，(i, j) 成分が A の (j, i) 余因子 A_{ji} となる行列

$$\widetilde{A} = (A_{ji})$$

を A の**余因子行列**という．このとき，以下の定理が成り立つ．

定理 6.11 n 次正方行列 A に対して，

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n$$

が成り立つ．特に，$|A| \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

となる．

この定理は，飽くまで理論的なもので実際の計算には不向きである．

6.2 置換を用いた行列式の定義

前節では，ある性質を満たすような行列の成分たちの式として行列式を定義した．しかしながら，そのような式が本当に存在することを確かめるには，具体的に構成するしかない．この小節では，行列式の性質 (1), (2), (3) を満たすような式が存在することを，置換を用いて証明する．この小節の内容は，いささか高度であるので，余裕のない方は飛ばして読んでも殆んど差し支えない．

n 個の文字 $1, 2, \ldots, n$ の集合を

$$X = \{1, 2, \ldots, n\}$$

とおく．写像 $\sigma : X \to X$ が

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすとき，即ち，σ が全単射のとき，σ を X の**置換**という．X の置換とは，X の文字の並べ替えを表す写像である．明らかに，X の置換は全部で $n!$ 個ある．σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

とも表わされる.（これは**行列ではない**ことに注意されたい.）また，動かさない文字は省略してもよい．

例 6.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

X の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_n$ で表す．任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して，合成写像

$$\sigma \circ \tau : X \to X$$

はまた X の置換である．$\sigma \circ \tau$ は，X を τ に従って並べ替えたものを σ に従って並べ替える写像である．そこで，これを σ と τ の**積**といい，$\sigma\tau$ と表す．

次に，置換の符号について考えよう．まず，n 個の変数 $X_1, \ldots, X_n$, $(n \geq 2)$ に対して，それらの多項式

$$D = D(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$$

を，$X_1, \ldots, X_n$ の**差積**という．置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma D = D(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})$$

とおく．一般に，σD は，$X_1, \dots, X_n$ のうち，異なる 2 つの変数の差全体の積になっているから，符号の違いを無視すれば，σD は D に等しい．即ち，

$$\sigma D = \pm D$$

となる．そこで，$\sigma D = D$ のとき，σ を**偶置換**といい，$\sigma D = -D$ のとき，σ を**奇置換**という．さらに，写像 $\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma\text{が偶置換} \\ -1, & \sigma\text{が奇置換} \end{cases}$$

で定める．この sgn を**符号函数**または，単に**符号**という．定義から明らかに，

$$\sigma D = \mathrm{sgn}(\sigma) D$$

が成り立つ．また，符号が満たす重要な性質として以下のものがある．

定理 6.13 (1) $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \mathrm{sgn}(\tau)$$

(2) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

さて，$X = \{1, 2, \dots, n\}$ の中の相異なる m 個の文字 $a_1, \dots, a_m$ に対して，

$$\sigma(b) = \begin{cases} a_{i+1}, & b = a_i,\ 1 \leq i < m, \\ a_1, & b = a_m, \\ b, & b \neq a_i,\ 1 \leq i \leq m, \end{cases}$$

なる置換 σ が定義される．これを，$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ と表す．この型の置換を，長さが m の**巡回置換**という．特に，長さが 2 の巡回置換を**互換**という．即ち，互換とはある 2 つの文字（i と j とする.）を入れ替えて，それ以外は動かさないような X の置換

$$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$$

のことである．

置換の符号を調べる際には以下の定理が有用である．

定理 6.14 $\mathfrak{S}_n$ において，

(1) 互換は奇置換である．

(2) 任意の置換は互換の積として表わされる．

系 6.15 $\mathfrak{S}_n$ の元 σ に対して，σ が偶数個の互換の積で書ければ偶置換であり，奇数個の互換の積で書ければ奇置換である．

注意 6.16 一般に，任意の置換は有限個の互換の積で書かれる．しかしながら，与えられた置換を互換の積で書く方法は一般に一通りではない．例えば次のような例がある．

$$(1,3,2)=(1,2)(1,3)=(1,3)(2,3)$$

である．

ここで，巡回置換の符号について考えよう．

補題 6.17 $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathfrak{S}_n$ を長さが m の巡回置換とする．このとき，

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^{m-1}$$

が成り立つ．

証明 σ は互換の積として，

$$\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_m)=(a_1,a_2)(a_2,a_3)\cdots(a_{m-1},a_m)$$

と表される．よって，補題が成り立つ．□

以上の準備の下，行列式を定義しよう．n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

を A の**行列式**といい，$\det(A)$, $|A|$ などと表す．ここで，和は X の置換すべてを渡るものとする．

すると，このように定義された行列式が，6.1 節で考えた，行列式の性質 (1), (2), (3) を満たすことが示される．また，行列式をこのように定義すると，

$$|{}^tA|=|A|$$

となることが比較的簡単に分かる．

6.3 演習問題

問題 6.1 サラスの公式を用いて以下の実係数 3 次行列の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで，a, b, c, d は実数である．

問題 6.2 余因子展開を用いて以下の行列の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 23 & 5 & 8 \\ 71 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 17 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -13 & -2 & -17 \\ 7 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

問題 6.3 以下の行列の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

7 連立一次方程式

本講の目標

- 連立斉一次方程式の**基本解**を求める．
- 連立斉一次方程式の基本解を利用して，一般の連立一次方程式の**一般解**を求める．
- 連立一次方程式の解法を，ベクトル空間や部分空間の**基底を求める**問題に応用する．

7.1 連立斉一次方程式の解法

本講では，実数係数の連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 & \cdots ① \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 & \cdots ② \\ \qquad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 & \cdots ⓜ \end{cases} \tag{4}$$

を解くことを考えよう．このような形の連立一次方程式を**連立斉一次方程式**という．

今，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

とおくと，連立一次方程式 (4) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

と表わされる．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合を

$$W(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とおくと，$W(A) = \mathrm{Ker}(f_A)$ であり，$W(A)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる．そこで，これを $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**解空間**という．解空間の 1 組の基底を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という．(基本解は無数にあることに注意せよ.）また，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は常に $A\boldsymbol{x} = 0$ の解であり，**自明な解**という．

以下の定理は，解空間の次元を計算する上で非常に重要である．

定理 7.1

$$\dim W(A) = \dim(\mathrm{Ker}(f_A)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f_A)) = n - \mathrm{rank}A$$

次に，方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を具体的に解くこと，即ち，基本解を求めることを考えよう．まず，(4) について次の変形をしても解の集合は変わらないことに注意する．

(I) ⓚ を ⓚ $+ \alpha$ⓛ, $(k \neq l)$ で置き換える．

(II) 式の順序を変える．

(III) ⓚ の両辺を $\alpha \neq 0$ 倍する．

（中学校で習った連立方程式の解法を思い出してほしい.）すると，これらの変形はそれぞれ，行列 $(A, \mathbf{0})$ に

(I)' (k 行) が，(k 行) $+\alpha$ (l 行) になる．

(II)' 行の順序を変える．

(III)' k 行を $\alpha \neq 0$ 倍する．

という行基本変形を施すことに対応している．

そこで，行基本変形により A が階段行列 $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{array}\right) \end{array}$$

の形に変形されたとする．このとき，さらに行基本変形を行い，j_r 列，j_{r-1} 列，$\ldots$, j_1 列をそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \ldots, \boldsymbol{e}_1$ に変形したものを A' とする．ここで，各 $\boldsymbol{e}_i$ たちは $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトルを表す.

Case 1 $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$ となる場合．このとき A' は

$$\begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$

なる形をしている．そこで，$(n, n-r)$ 行列

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$$

を考えると，
$$\begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix} = O$$
であり，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix} = n-r$ なので，$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ の $n-r$ 個の列ベクトルが $W(A)$ の基底になることが分かる．よって，これが求める基本解である．

Case 2　一般の場合．$j_1, \ldots, j_r$ の残りの列番号を小さい方から順に $k_1, \ldots, k_{n-r}$ とし，n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_{n-r}})$ を考える．すると，
$$A'P = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$
である．このとき，
$$\boldsymbol{x} \in W(A'P) \iff (A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff A'(P\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \iff P\boldsymbol{x} \in W(A')$$
である．そこで，この場合はまず，Case 1 の方法で $(A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求め，それらを $\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n-r}$ をとするとき，$P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$ が求める $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解である．

以上により，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ が求まった．従って，その一般解は
$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}, \quad c_1, \ldots, c_{n-r} \in \mathbb{R}$$
で与えられる．

例題 7.2 実係数連立斉一次方程式
$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & = 0 \end{cases}$$
の基本解を求めよ．

解答
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
とする．A に行基本変形を施すと，
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
となる．従って，$r = 1$, $A'' = -1$ となっている．よって，
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -A'' \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
が求める基本解である．□

例題 7.3 実係数連立斉一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

の基本解を求めよ．

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．A に行基本変形を施すと，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．従って，$r = 1$, $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ となっている．よって，

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める基本解である．□

注意 7.4 行列 A に対して，$\mathrm{Ker}(A)$ の基底を求めることと，連立方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求めることは本質的に同じことである．

注意 7.5 基本解とは解空間の基底の一組のことで，一つの解という意味ではない．**解空間の次元が 1 次元である場合**には，基本解を与えることと非自明な解を一つ与えることは本質的に同値であるが，これはあくまでも特殊な場合であることに注意されたい．

注意 7.6 基本解を求める際に，出てきた答えが解空間の次元と合っていないような答案がしばしば見受けられる．解答を書き終えた後は必ず，**次元の確認**，及び**検算**を忘れないようにしてほしい．

7.2 連立一次方程式の解法（一般の場合）

本講では，一般の実数係数連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \cdots ① \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \cdots ② \\ \qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \cdots ⓜ \end{cases} \tag{5}$$

を解くことを考える．斉一次方程式の場合と同様に，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと，連立一次方程式 (5) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わされる．この連立一次方程式を解くために，次の $(m, n+1)$ 行列

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

を利用する．この行列 $(A, \boldsymbol{b})$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**拡大係数行列**という．

さて，斉一次方程式の場合と同様に，(5) に (I), (II), (III) の変形を施しても解の集合は変わらない．この操作は，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $(A, \boldsymbol{b})$ に行基本変形を施すことに対応している．そこで，行基本変形により $(A, \boldsymbol{b})$ が階段行列 $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n+1)$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix} \end{array}$$

の形に変形されたとする．

Case 1　$j_r = n+1$ となる場合．このとき対応する r 番目の方程式は

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$$

となり，これは矛盾．従って，(5) は**解を持たない**．

Case 2　$j_r \leq n$ の場合．このとき，行に関する基本変形を続けて，j_r 列，j_{r-1} 列，$\ldots$，j_1 列をそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \ldots, \boldsymbol{e}_1$ に変形したものを $(A', \boldsymbol{b}')$ とおく．ここで，$\boldsymbol{b}'$ は第 $n+1$ 列べ

クトルを表し，

$$\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を

$$x_j = \begin{cases} b'_k, & \text{ある } k \text{ が存在して } j = j_k,\ (1 \le k \le r), \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定めると，$A'\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}'$ であり，(5) に解が存在することが分かる．従って，次の定理が得られる．

定理 7.7

$$(5) \text{ に解が存在する} \iff j_r \le n \iff \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(A, \boldsymbol{b})$$

さて，$\boldsymbol{x}'$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解とすると，

$$A(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x}' - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

であるから，

$$\boldsymbol{x}' \text{が } (5) \text{ の解} \iff \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0 \in W(A)$$

となる．ゆえに，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ とするとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

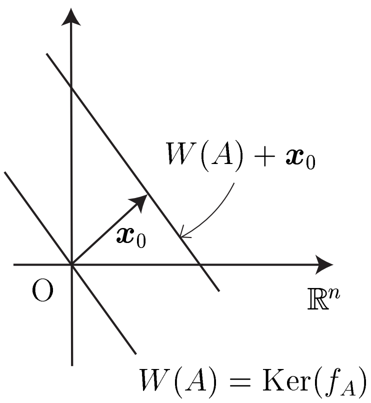
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}, \quad c_1, \ldots, c_{n-r} \in K$$

で与えられる．

このうように，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は，対応する連立斉一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を利用して求めることができることが分かる．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に**同伴する斉次方程式**という．また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一つの解 $\boldsymbol{x}_0$ を取り上げたとき，これを $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**特殊解**という．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解集合の幾何学的な形

上述の結果より，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は，一つの特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ と，同伴する斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の和で表される．これは，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解集合である $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W(A)$ を，特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ の分だけ平行移動したものであることを意味している．



例題 7.8 実数係数行列

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\3&3&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を一組求めよ．

(2) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解け．

解答 (1) A は行基本変形により

$$A'=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

に変形される．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の 1 つの基本解となる．

(2) まず，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解を 1 つ見つける．そのために $(A,\boldsymbol{b})$ を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{x}_0$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の 1 つの解となる．よって，(1) の結果より，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の任意の解は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+c\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{R}$$

と書ける．

7.3 Cramer の公式

連立一次方程式 (5) において，$n = m$ かつ A が正則（$|A| \neq 0$）な場合を考えよう．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}\boldsymbol{b}.$$

ここで，A_j を A の j 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列とし，$|A_j|$ の j 列についての展開を考えると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

が得られる．これを Cramer の公式という．一般に，計算の煩雑さから，この公式を実際の方程式を解くのに使うことは稀で，飽くまで理論的な公式である．

7.4 部分空間の基底と次元

連立方程式の基本解を求める方法を利用して，ベクトル空間の部分空間の基底と次元を求めてみよう．と言っても，行うことは本質的に基本解を求める操作と同じである．

例題 7.9 $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = x_2 = x_3 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = x_2 + x_3 \right\}$$

の基底と次元を求めよ．

解答　V は連立斉一次方程式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

の解空間である．そこで,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおいて，A に行基本変形を施すと,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$r = 2$, $A'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -A'' \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める基本解である．従って，$\boldsymbol{x}_1$ が V の基底で，$\dim(V) = 1$ を得る．

一方，W は（連立）斉一次方程式

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

の解空間である．そこで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$r = 1$, $A'' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める基本解である．従って，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が W の基底で，$\dim(W) = 2$. □

例題 7.10 線型写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ の基底と次元を求めよ．

解答 (1) $\mathrm{Ker}(f)$ は連立斉一次方程式

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ x & = 0 \\ x - y & = 0 \end{cases}$$

の解空間である．そこで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおいて，A に行基本変形を施すと，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$r = 2$ となり，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 - 2 = 0$. 即ち，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ である．

(2) 次に，$\mathrm{Im}(f)$ について考えよう．次元公式より，

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 - 0 = 2$$

である．一方，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f)$ に対して，ある $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ が存在して，

$$\boldsymbol{x} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と書ける．従って，$\mathrm{Im}(f)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される．特にこれらは一次独立ゆえ，$\mathrm{Im}(f)$ の基底になる．□

7.5 いろいろな概念と連立一次方程式

$V = \mathbb{R}^n$ をベクトル空間とし，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

を V のベクトルとする．また，(n, m) 行列 $A = (a_{ij})$ 及び，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & b_2 \\ \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & b_n \end{cases} \tag{6}$$

なる連立方程式を考える．以下，よく使う事実を連立方程式の言葉で言い換えたものを表にまとめておくので適宜活用して欲しい．

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の連立方程式 (6) が自明な解しか持たない．
$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の連立方程式 (6) が非自明な解を持つ．
$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合	連立方程式 (6) が解を持つ．
$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が基底	任意の $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式 (6) はただ一つの解を持つ．
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$	$(x_1, \ldots, x_m)$ が，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の連立方程式 (6) の解．
$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(f_A)$	連立方程式 (6) が解を持つ．
$\mathrm{rank}\, A = m$（f_A は単射）	任意の $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式 (6) の解は高々1 個．
$\mathrm{rank}\, A = n$（f_A は全射）	任意の $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式 (6) が解を持つ．

7.6 演習問題

問題 7.1 実係数連立斉一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

の基本解を求めよ.

問題 7.2 実係数連立斉一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 6x_2 + 12x_3 & = 0 \end{cases}$$

について基本解を求めよ.

問題 7.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を一組求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.

問題 7.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を一組求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.

問題 7.5 $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 = 2x_2 + 3x_3 \right\}$$

の基底と次元を求めよ.

8 計量ベクトル空間

本講の目標

- $\mathbb{R}^n$ 及び，$\mathbb{C}^n$ の**標準内積**の性質を理解する．
- **Schmidt の直交化法**を用いて与えられたベクトルたちを**正規直交化**する．
- **直交補空間**の正規直交基底を求め，**直交射影**を計算する．
- **直交行列**及び，**ユニタリー行列**の性質を理解する．

8.1 標準内積

$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して，実数値

$${}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**といい，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と表す．任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を対応させる写像

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

を $\mathbb{R}^n$ の**標準内積**という．$\mathbb{R}^n$ の標準内積は以下の性質を持つ．

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$

(iii) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}), \qquad k$ は実数

(iv) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0$．特に，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$

次に複素ベクトル空間の標準内積について考えよう．$\mathbb{C}^n$ の二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 複素数値

$${}^t\boldsymbol{a}\,\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**（実ベクトル空間の内積と区別する場合は**エルミート内積**とも呼ばれる.）といい，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と表す．任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を対応させる写像

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

を $\mathbb{C}^n$ の**標準内積**または，**エルミート内積**という．$\mathbb{C}^n$ の標準内積は以下の性質を持つ．

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overline{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}$

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$

(iii) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=\overline{k}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$ 　k は複素数

(iv) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ は実数で，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$．特に，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}=0$

以下, 特に断りがない限り, $\mathbb{R}^n$ 及び，$\mathbb{C}^n$ の内積と言えば，上で定義した標準内積を考えることにする．また，内積を考えたベクトル空間を**計量ベクトル空間**という．$K=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とするとき，K^n の任意の部分空間は標準内積により計量ベクトル空間となる．

計量ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$ であった. 従って $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ が一意的に定まる. これを $\boldsymbol{a}$ の**長さ**といい,

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

と表す．ベクトルの長さに関して，以下の基本的な性質が成り立つ.

(i) $\|\boldsymbol{a}\|\geq 0,$ 　等号成立は $\boldsymbol{a}=0$ のときに限る.

(ii) $\|k\boldsymbol{a}\|=|k|\ \|\boldsymbol{a}\|, \quad k\in K$

また, 最も重要な公式として以下のものがある：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| &\leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \quad (\textbf{Schwarz の不等式}),\\ \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| &\leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \quad (\textbf{三角不等式}).\end{aligned}$$

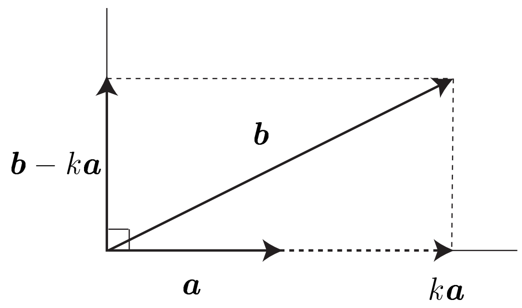
計量ベクトル空間 V の二つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ について $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**といい, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ で表す.

注意 8.1 $\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{0}$ のときは明らかに $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ である．即ち，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ はすべてのベクトルに直交すると考える.

例 8.2 $\mathbb{R}^n$ 及び，$\mathbb{C}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ たちは互いに直交している.

以上で定義した，長さや直交の概念は, 平面 $\mathbb{R}^2$ や空間 $\mathbb{R}^3$ において考えると, いわゆる普通の意味での長さ及び直交の概念と一致する.

内積の幾何学的な意味



$\mathbb{R}^2$ における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の標準内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を考えてみよう．下図のように $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ 方向の成分と，$\boldsymbol{a}$ に直交する成分とに分解する．

このとき，

$$k=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2},\quad \|k\boldsymbol{a}\|=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

である．従って，$\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向成分 $k\boldsymbol{a}$ の長さと，$\boldsymbol{a}$ の長さ $\|\boldsymbol{a}\|$ を掛けたものが $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ である．

8.2 正規直交基底

計量ベクトル空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ が各 $i\neq j$ に対して

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=0$$

満たすとき，$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ は**直交系**をなしているという．さらに，これらが

$$\|\boldsymbol{a}_i\|=1,\quad 1\leq i\leq k$$

を満たすとき，**正規直交系**であるという．

例 8.3 $\mathbb{R}^n$ 及び，$\mathbb{C}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ は正規直交系．

例 8.4 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

は直交系であり，

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

は正規直交系である．

$\boxed{\text{ポイント}}$ 一般に，直交系をなしているベクトルたちは一次独立である．

計量ベクトル空間 V に属するベクトルの組が正規直交系であり，かつ V の基底をなすとき, それらを**正規直交基底**という.

例 8.5 $\mathbb{R}^n$ 及び，$\mathbb{C}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は正規直交基底である.

例 8.6 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は正規直交基底である.

$\boxed{\text{ポイント}}$ $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を計量ベクトル空間 V 正規直交基底とする．$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は基底であるから，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，K の元の組 $c_1, \dots, c_n$ が存在して $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

と書ける．このとき，各 $1 \le i \le n$ に対して

$$c_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_i$$

が成り立つ．即ち，$\boldsymbol{x}$ の正規直交基底に関する各係数は内積を用いて表すことができる.

計量ベクトル空間 V の，任意の一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ から正規直交系を構成することを考えよう．まず一般に，$\mathbf{0}$ でない V のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して,

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\|\, \boldsymbol{a} \,\|}\boldsymbol{a}$$

とおく. ($V = \mathbb{R}^n$ の場合には，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで長さが 1 のベクトルである.) このように，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の**単位ベクトル化**という. 任意の直交系は，単位ベクトル化を行うことにより正規直交系になる．従って，一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ から直交系を構成することを考えればよい.

そこで，$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ に対して, 以下のようにしてベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ を順に定める : まず,

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$$

とおく．次に,

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{b}_1$$

とおく．同様にして順に $\boldsymbol{b}_3, \dots, \boldsymbol{b}_k$ を

$$\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j - \frac{\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{b}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2}\boldsymbol{b}_2 \cdots - \frac{\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_{j-1}}{\boldsymbol{b}_{j-1} \cdot \boldsymbol{b}_{j-1}}\boldsymbol{b}_{j-1}$$

によって定める．すると，作り方から $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が張る部分空間と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が張る部分ベクトル空間は一致する．即ち

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle$$

が成り立ち，さらに，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ は直交系となることが分かる．このようにして，与えられた一次独立なベクトルの組から直交系を構成する方法を **Schmidt の直交化法**という.

例題 8.7 $\mathbb{R}^3$ の一次独立な三つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を *Schmidt* の直交化法を用いて, これらを正規直交化せよ.

解答　Schmidt の直交化法により,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なるベクトルを得る．そこで，これらに単位ベクトル化を行うことにより,

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が求める正規直交基底である．□

8.3　直交補空間

計量ベクトル空間 V の部分集合 S に対して,

$$S^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, \text{すべての } \boldsymbol{y} \in S \text{ について}, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0\}$$

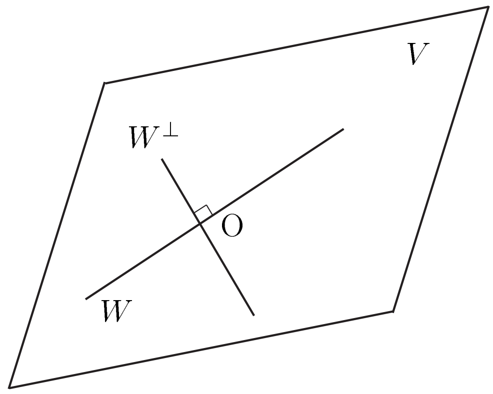
は V の部分ベクトル空間となる. これを S の**直交補空間**と呼ぶ.

特に S 自身が V の部分ベクトル空間 W であるとき, 以下が成り立つ：

定理 8.8 計量ベクトル空間 V，及びその部分空間 W に対して

$$V = W \oplus W^{\perp}, \quad (W^{\perp})^{\perp} = W$$

が成り立つ.



ポイント　直交補空間の正規直交基底の求め方.

V を計量ベクトル空間, W をその部分空間とする. W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めてみよう. まず, W の基底を $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ とする. このとき, V のベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を追加して V の基底 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を作ることができる. これを Schmidt の直交化法により直交化し, 単位ベクトル化を行えば, V の正規直交基底

$$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{b}_n$$

が得られる. このとき,

$$W = \{c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r \,|\, c_1, \dots, c_r \in K\}$$
$$W^\perp = \{c_{r+1}\boldsymbol{b}_{r+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n \,|\, c_{r+1}, \dots, c_n \in K\}$$

である. 従って, $\boldsymbol{b}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{b}_n$ が求める $W^\perp$ の正規直交基底である.

注意 8.9 一般に, W の基底 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ に, ベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を付け足して V の基底を作るとき, $\boldsymbol{a}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n \in W^\perp$ とは限らないことに注意する. 即ち, $\boldsymbol{a}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ たちは $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ に直交するとは限らない.

例題 8.10 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x = y \right\}$$

の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

解答　勘のいい人であれば, すぐに答えが分かるかもしれないが, ここでは上の方法を適用してみよう. まず, W は 1 次元の部分空間で,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

はその基底である．そこで,

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．これらは正規直交基底ではないので，Schmidt の直交化法を用いて正規直交基底を求めよう．すると，まず直交化を行い,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

を得る．これらを単位ベクトル化して $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底

$$\boldsymbol{b}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る．このとき,

$$\boldsymbol{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が $W^\perp$ の正規直交基底である．□

V を計量ベクトル空間，W を V の部分空間とする．$V = W \oplus W^\perp$ より，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は一意的に,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}', \quad \boldsymbol{w} \in W, \quad \boldsymbol{w}' \in W^\perp$$

と書ける．このとき，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{w}$ を対応させる写像 $p_W : V \to V$ を W への**直交射影**という．同様に，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{w}'$ を対応させる写像 $p_{W^\perp} : V \to V$ を $W^\perp$ への直交射影という．即ち，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = p_W(\boldsymbol{x}) + p_{W^\perp}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

ポイント　直交射影の求め方.

V を計量ベクトル空間，W を V の部分空間とする．まず，W 及び，$W^\perp$ の正規直交基底を求めておく.（正規直交基底の求め方は上述の議論を参照.）ここでは，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を W の正規直交基底とし，$\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を $W^\perp$ の正規直交基底とする．すると、

$$p_W(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{a}_r$$
$$p_{W^\perp}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_{r+1})\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{a}_n$$

が成り立つ.

例題 8.11 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x = y \right\}$$

を考える．このとき，$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ に対して，それらの W 及び，$W^\perp$ への直交射影 $p_W(\boldsymbol{e}_i)$, $p_{W^\perp}(\boldsymbol{e}_i)$ を計算せよ．

解答 まず，W 及び，$W^\perp$ の正規直交基底を求めるところから始める．ここでは，前節の結果を利用しよう．W の正規直交基底として，$\boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が，$W^\perp$ の正規直交基底として，$\boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって，各 $\boldsymbol{e}_i$ と c_j の内積を計算すると，

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c}_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c}_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} p_W(\boldsymbol{e}_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_1, \quad p_{W^\perp}(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_2 \\ p_W(\boldsymbol{e}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_2, \quad p_{W^\perp}(\boldsymbol{e}_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_2 \end{aligned}$$

を得る．□

注意 8.12 稀に，与えられたベクトルと，計算した正規直交基底との内積だけ計算して解答が終わっている答案があるが，ベクトルの直交射影を求めよと問われたら，射影先のベクトルを答えることに注意してほしい．

8.4 直交行列とユニタリー行列

この小節では，重要な行列である直交行列とユニタリー行列について考える．まず，転置行列に関して簡単な復習から始めよう．

実係数 n 次正方行列 A に対して，A の転置行列を ${}^tA$ で表す．すると，

$$\begin{aligned} {}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \\ {}^t(cA) = c\ {}^tA, \quad {}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA. \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$c \in \mathbb{R}$ である．また，

(i) A が**対称行列** $\iff$ ${}^tA = A$

(ii) A が**交代行列** $\iff$ ${}^tA = -A$

であった．

A を実 n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとするとき，$\mathbb{R}^n$ の標準内積に関して，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot ({}^t A\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．実際，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x}\ {}^tA)\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\ ({}^tA\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot ({}^tA\boldsymbol{y})$$

である．

さて，実 n 次正方行列 A で，

$${}^tAA = E_n \quad ({}^tA = A^{-1})$$

を満たすものを**直交行列**という．すると，以下が成り立つ．

定理 8.13 実 n 次正方行列 A に対して，以下の 5 条件は同値である．

(i) A は直交行列．

(ii) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である．

(iii) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である．

(iv) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\| A\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$.

(v) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

例 8.14 二次正方行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は直交行列である．

次に，複素行列を考えよう．複素係数 n 次正方行列 A に対して，A の転置行列 ${}^tA$ の各成分に複素共役を施した行列

$$\overline{{}^tA}$$

を A の**随伴行列**といい，A^* で表す．すると，

$$(A^*)^* = A, \quad (A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(cA)^* = \overline{c}A^*, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

が成り立つ．ここで，$c \in \mathbb{C}$ である．また，

(i) A が**エルミート行列** $\Longleftrightarrow$ $A^* = A$.

(ii) A が**歪エルミート行列** $\Longleftrightarrow$ $A^* = -A$.

であった.

A を複素 n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を $\mathbb{C}^n$ のベクトルとするとき，$\mathbb{C}^n$ の標準内積に関して，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (A^*\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．実際，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^*(A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}^*A)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^*A^{**}) = (A^*\boldsymbol{y})^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot (A^*\boldsymbol{y})$$

である.

さて，複素 n 次正方行列 A で，

$$A^*A = E_n \quad (A^* = A^{-1})$$

を満たすものを**ユニタリー行列**という．すると，以下が成り立つ.

定理 8.15 複素 n 次正方行列 A に対して，以下の 5 条件は同値である.

(i) A はユニタリー行列.

(ii) A の列ベクトル全体は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底である.

(iii) A の行ベクトル全体は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底である.

(iv) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\| A\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$.

(v) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

8.5 演習問題

問題 8.1 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底になることを示せ.

問題 8.2 $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を $Schmidt$ の直交化法を用いて正規直交化せよ.

問題 8.3 $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x = y = z \right\}$$

の直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底を求めよ．ここで,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が一次独立であることは証明なしに用いて良い.

9 固有値と固有ベクトル

<u>本講の目標</u>

- 行列の**固有多項式**，**固有値**，**固有ベクトル**及び，**固有空間**を求める．
- 対角化可能な行列を**対角化**し，対角化不可能な行列に対しては**上三角化**を行う．
- **正規行列**の固有値，固有ベクトル，固有空間を求める．

9.1 固有値と固有ベクトル

以下，ベクトル空間 V といえば $\mathbb{C}^n$ 及び，その部分空間を考えることにする．

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V 上の線型変換（一次変換）$f : V \to V$ について，**零ベクトルでない** V のベクトル $\boldsymbol{a}$ と，ある $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{a}) = \alpha \boldsymbol{a}$$

となるとき，α を f の**固有値**といい，$\boldsymbol{a}$ を固有値 α に属する**固有ベクトル**という．また，α を f の固有値とするとき，α に属する固有ベクトルたちの集合

$$W_\alpha = \{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) = \alpha \boldsymbol{a}\}$$

は，V の $\{\boldsymbol{0}\}$ でない部分ベクトル空間になる．これを，固有値 α に属する**固有空間**という．

n 次正方行列 A は，$\mathbb{C}^n$ 上の線型変換 $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n;\ f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を定める．そこで，f_A の固有値 α，及び α に属する固有空間を，それぞれ A の**固有値**，**固有空間**という．行列の固有値を求めるためには次の定理を利用する．

定理 9.1 A を n 次正方行列とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\alpha \in \mathbb{C}$ が A の固有値．$\iff \det(\alpha E_n - A) = 0.$

(2) $\alpha \in \mathbb{C}$ が A の固有値のとき，$\dim W_\alpha = n - \operatorname{rank}(\alpha E_n - A).$

ここで，E_n は n 次単位行列を表す．

一般に，n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，x の一変数多項式

$$\det(xE_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

を A の**固有多項式**といい $F_A(x)$ と表す．上の定理より，次を得る．

$\boxed{\text{ポイント}}$ A の固有値全体は A の固有多項式の解全体であり，A の固有値を求めるには $F_A(x)=0$ を x について解けば良い．

注意 9.2 稀に，$\det(A-xE_n)$ を固有多項式としている答案があるが，通常，**固有多項式の最高次の係数は** 1 **とするのが慣例**であるので注意してほしい．また，**固有多項式は多項式でるので，あたかも方程式のように** $\det(xE_n-A)=0$ **と書かれても,（気持ちは分かるが）不正解**である．細かいところではあるが注意してほしい．

一方，複素係数の行列を考えているので，固有多項式は複素係数の 1 変数多項式である．従って，**その根（固有値）は重複度も込めて丁度** n **個存在する**ことにも注意されたい．

α を A の固有値とするとき，

$$\boldsymbol{a} \text{ が } \alpha \text{ に属する固有ベクトル} \iff (A-\alpha E_n)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

である．即ち，W_α は $(A-\alpha E_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 $W(A-\alpha E_n)$ に外ならない．従って，次を得る．

$\boxed{\text{ポイント}}$ α に属する固有空間の基底を求めるには，$(A-\alpha E_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を求めればよい．

例題 9.3 正方行列

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

に対して，それぞれ固有値と各固有値に属する固有空間を求めよ．

解答 A の固有多項式は $F_A(x)=(x-2)(x+2)$ となるので，固有値は ± 2 となる．これらの固有値に属する固有空間を求めると，それぞれ

$$W_2=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{C}\right\},\quad W_{-2}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

となる．

同様に，B の固有多項式は $F_B(x)=x(x-1)(x-2)$ となるので，固有値は $0,\,1,\,2$ となる．これらの固有値に属する固有空間は，それぞれ

$$W_0=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{C}\right\},\quad W_1=\left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{C}\right\},\quad W_2=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

となる．□

以下，固有値，固有ベクトルに関する性質をまとめておく．まず，次の基本的なことに注意する．

命題 9.4 A の相異なる固有値に属する固有ベクトルは一次独立である．

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の対角成分の和

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

を A の**トレース**といい，$\operatorname{tr} A$ と表す．以下のように，行列 A の固有値と A のトレース，及び行列式の間には以下のような関係がある．

定理 9.5 n 次正方行列 A の固有多項式 $F_A(x)$ の根を（重複度も込めて）$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする．このとき，

(1) $\operatorname{tr} A = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

(2) $\det A = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$.

また，n 次正方行列 A と B が相似であるとする．すなわち，ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ と書けるとする．すると，

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \det(xE_n - B) = \det(xE_n - P^{-1}AP) = \det P^{-1}(xE_n - A)P \\ &= \left(\det P^{-1}\right) \det\left(xE_n - A\right) \left(\det P\right) = \det\left(xE_n - A\right) = F_A(x) \end{aligned}$$

であるから，A と B の固有多項式は一致する．したがって以下の定理を得る．

定理 9.6 A と B を相似な行列とすると，以下が成り立つ．

(1) A と B の固有値は（重複度も込めて）一致する．

(2) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

9.2 行列の対角化

対角成分以外はすべて 0 であるような正方行列

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & O \\ O & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を**対角行列**という．正方行列 A がある対角行列に相似となるとき，A は**対角化可能**であるという．一般に，すべての行列が対角化可能となるわけではないが，次のことが知られている．

定理 9.7 n 次正方行列 A に対して以下の 4 条件は互いに同値である．

(1) A は対角化可能.

(2) A の固有ベクトル（属する固有値は一定でなくて良い.）の中から n 個の一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がとれる．即ち，A の固有ベクトルだけで構成される $\mathbb{C}^n$ の基底が存在する.

(3) A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ とするとき，各 α_i に属する固有空間 W_{α_i} たちの直和が $\mathbb{C}^n$ に一致する:

$$W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s} = \mathbb{C}^n.$$

(4) A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ とし，各 α_i の重複度を k_i とする．このとき，

$$k_i = \dim W_{\alpha_i}, \quad (1 \leq i \leq s).$$

系 9.8 n 次正方行列 A が相異なる n 個の固有値を持てば，A は対角化可能である.

ポイント　対角化可能かどうかの判定法.

n 次正方行列 A が具体的に与えられたとき，A が対角化可能かどうかを判定するには以下の手順に従えばよい.

手順 1 A の固有多項式 $F_A(x)$ は**重根をもつか**?

Yes $\Longrightarrow$ 手順 2 へ.　　No $\Longrightarrow$ 対角化可能.

手順 2 A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，$A$ の固有多項式を

$$F_A(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s}$$

とするとき，各 α_i に対して $(A - \alpha_i E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解が** k_i **個の元から構成されているか**? 即ち，$k_i = \dim W_{\alpha_i}$ となっているか?

Yes $\Longrightarrow$ 対角化可能.　　No $\Longrightarrow$ 対角化不可能.

この手順により対角化不可能となった場合，対角化は諦めるしかない.

次に，A を対角化可能な n 次正方行列とするとき，A を対角行列に変形させるために必要な正則行列 P を構成してみよう．そのためには，A の一次独立な n 個の**固有ベクトルを並べてできる行列**を P とすればよい．具体的には以下のようになる．まず，A の固有多項式を $F_A(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s}$ とする．各 α_i に対して

$$\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \boldsymbol{p}_2^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{k_i}^{(i)}$$

を $(A-\alpha_i E_n)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の基本解の 1 組とする．このとき，(n,k_i) 行列 P_i を

$$P_i=(\boldsymbol{p}_1^{(i)},\boldsymbol{p}_2^{(i)},\ldots,\boldsymbol{p}_{k_i}^{(i)})$$

で定め，n 次正方行列 P を

$$P=(P_1,P_2,\cdots,P_s)$$

で定める．(A は対角化可能なので，一次独立な A の固有ベクトルが n 個とれることに注意する.）すると，P は正則行列であり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} D_1 & & & O \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & D_s \end{pmatrix}$$

となる．ここで，各 D_i は対角成分が全て α_i であるような k_i 次対角行列である．

注意 9.9 上で考えた対角化は，あくまで P の構成によることに注意する．即ち，P_i たちの順序を変えて同様の議論を行った場合，対角化は出来るがその際に対角成分に現れる A の**固有値の順序が変わる**ことに注意する．

例題 9.10 3 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ．

解答　A の固有多項式は

$$F_A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$$

となるので，A は相異なる 3 つの固有値 $\pm1,\ 2$ を持つ．従って，A は対角化可能．固有値 $1,\ -1,\ 2$ に属する固有ベクトルとして，それぞれ

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．そこで，

$$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．□

注意 9.11 対角化できない行列の例として

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などがある．実際，もし A がある正則行列 P を用いて対角化可能であるとすると，A の固有値は 0 のみであるから，$P^{-1}AP = O$ となる．すると，$A = O$ となり矛盾．同様に，B の固有値は 1 のみであるから，ある正則行列 P を用いて $P^{-1}BP = E_n$ となったとすると，$B = E_n$ となり矛盾．

行列の冪乗計算への応用

行列の対角化は，行列の冪を計算することに応用できる．一般に，n 次正方行列 A と P に対して，

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP, \quad k \geq 0 \tag{7}$$

が成り立つ．そこで，A を対角化可能な n 次正方行列とし，P を n 次正則行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となるものとする．このとき，$k \geq 0$ なる任意の整数 k に対して，(7) より，

$$A^k = P\left(P^{-1}AP\right)^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & & O \\ & \alpha_2^k & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

を得る．従って，上式右辺を計算することで A^k が計算できることがわかる．

例題 9.12 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，A^n, $(n \geq 1)$ を計算せよ．

解答　A の固有多項式は

$$F_A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

となるので，A は相異なる 2 つの固有値 $-1, 3$ を持つ．従って，A は対角化可能．固有値 -1 に属する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

固有値 3 に属する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．そこで，

$$P = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned} A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．□

9.3 行列の上三角化

これまでに，行列の対角化は常にはできないことを見た．しかしながら，任意の行列を上三角行列に変形することは**常に可能**である．即ち，

定理 9.13 任意の n 次正方行列 A に対して，ある正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ O & \alpha_2 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる．特に，P として**ユニタリー行列**をとることも可能である．

このように，行列 A を上三角行列に変形することを A の**上三角化**という．一般に，行列の上三角化には**ジョルダン標準形**と呼ばれる標準的な上三角化が存在することが知られており，その意味で上の定理は中間的な定理といえる．

ここで，与えられた行列を上三角化する具体的な方法について考えよう．A を n 次正方行列とし，A の固有値全体を（重複度も込めて）$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とする．まず，α_1 に属する A の固有ベクトルを 1 つとりそれを $\boldsymbol{q}_1$ とする．すると，$\boldsymbol{q}_1$ に適当なベクトル $\boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ を付け加えて $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になるように出来る．このとき，$Q_1 = (\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$ とおくと Q_1 は正則で，ある $n-1$ 次正方行列 A_1 に対して

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$$

となる．

さて，A_1 の固有値は（重複度も込めて）$\alpha_2, \dots, \alpha_n$ である．そこで，α_2 に属する A_1 の固有ベクトルを1つとりそれを $\boldsymbol{q}'_1$ とする．すると，$\boldsymbol{q}'_1$ に適当なベクトル $\boldsymbol{q}'_2, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1}$ を付け加えて $\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1}$ が $\mathbb{C}^{n-1}$ の基底になるように出来る．このとき，$Q_2 = (\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1})$ とおくと Q_2 は $n-1$ 次正則行列で，ある $n-2$ 次正方行列 A_2 に対して

$$Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

となる．以下，この操作を繰り返して，各 $1 \le i \le n-1$ に対して $n-i+1$ 次正則行列 Q_i を構成し，

$$P = Q_1 \begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E_{n-2} & O \\ O & Q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

とおくと，

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ O & \alpha_2 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる．P としてユニタリー行列をとりたい場合は，各 Q_i を構成するベクトルたちにシュミットの直交化法を適用して正規直交化しておけばよい．即ち，上の議論においては，$\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$ を正規直交化したものを Q_1 とおく．次に，$\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1}$ を正規直交化したものを Q_2 とし，以下同様の議論を行って Q_i, $(1 \le i \le n-1)$ を作る．すると，各 Q_i はユニタリー行列であり，従って P もユニタリー行列となる．

例題 9.14 2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

を上三角化せよ．

解答　A の固有多項式は $F_A(x) = (x-4)^2$ となるので，固有値は4のみ．固有値4に属する固有ベクトルを求めると，

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる．そこで，

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ は $\mathbb{C}^2$ の基底であり，$Q_1 = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ とおくと，

$$Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．□

一般に，x の複素係数多項式

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots a_{m-1}x + a_m, \quad a_m \neq 0$$

と n 次正方行列 A に対して，n 次正方行列

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots a_{m-1}A + a_mE_n$$

を，$f(x)$ に A を**代入**して得られた行列という．行列の上三角化の議論を用いることにより，以下の重要な定理を得る．

定理 9.15 (ケイリー・ハミルトンの定理) n 次正方行列 A に対して，$F_A(A) = O$.

定理 9.16 (フロベニウスの定理) A の固有値全体を（重複度も込めて）$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とするとき，$f(A)$ の固有値は（重複度も込めて）

$$f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$$

となる．

9.4 正規行列

ここでは，特に A が正規行列（$AA^* = A^*A$ を満たす行列）である場合の固有値，固有ベクトル及び対角化について考えてみよう．まず，実正規行列（各成分が実数で，${}^tAA = A{}^tA$ を満たす行列.）の場合を考える．

定理 9.17 A が実正規行列のとき，

(i) A は対称行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて実数.

(ii) A は交代行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて純虚数.

(iii) A は直交行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数.

また，以下が成り立つ.

定理 9.18 n 次正方行列 A に対して，以下の 3 条件は互いに同値である.

(i) A は対称行列.

(ii) A の固有値はすべて実数で，$\mathbb{R}^n$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底をもつ.

(iii) A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ とすると，これらはすべて実数であり，各 α_i に属する固有空間を W_{α_i} とするとき，

$$\mathbb{R}^n = W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s}, \quad W_{\alpha_i} \perp W_{\alpha_j} \quad (i \neq j).$$

つまり，対称行列の**相異なる固有値**に属する固有ベクトルは互いに**直交する**ことがわかる．また，この定理は A が**対称行列**である場合は，A は**直交行列を用いて対角化できる**ことを示している．一般には，その逆も成り立つ．即ち，

定理 9.19 n 次実正方行列 A に対して，

$$A \text{ は対称行列} \iff \text{ある直交行列 } P \text{ が存在して，} P^{-1}AP \text{ が対角行列になる}.$$

例題 9.20 3 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を直交行列を用いて対角化せよ．

解答 $F_A(x) = (x+1)(x-1)^2$ となるので，A の固有値は ± 1．固有値 1 に属する固有空間は $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，基本解の一組として

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる．また，固有値 -1 に属する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる．これらは既に直交系であるから，それぞれ単位ベクトル化を行い，

$$\boldsymbol{p}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対して $P = (\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3')$ とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．□

次に，複素正規行列の場合を考えよう．

定理 9.21 A が正規行列のとき，

(1) A はエルミート行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて実数.

(2) A は歪エルミート行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて純虚数.

(3) A はユニタリー行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数.

また，以下が成り立つ.

定理 9.22 n 次正方行列 A に対して，以下の 3 条件は互いに同値である.

(1) A は正規行列.

(2) $\mathbb{C}^n$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底をもつ.

(3) A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ とし，各 α_i に属する固有空間を W_{α_i} とするとき，

$$\mathbb{C}^n = W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s}, \quad W_{\alpha_i} \perp W_{\alpha_j} \quad (i \neq j).$$

つまり，正規行列の**相異なる固有値**に属する固有ベクトルは互いに**直交する**．この定理は，A が**正規行列**のときは常に対角化可能で，特に A は**ユニタリー行列を用いて対角化できる**ことを示している．一般には，その逆も成り立つ．即ち，

定理 9.23 n 次正方行列 A に対して，

A は正規行列 $\Longleftrightarrow$ あるユニタリー行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が対角行列になる.

例題 9.24 3 次正規行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

をユニタリー行列で対角化せよ.

解答　A の固有多項式は $F_A(x) = (x-1)(x^2-2x-1)$ となるので，固有値は $1, 1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ となる．これらの固有値に属する固有ベクトルとして，それぞれ

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる．これらは既に直交系を成しているので，単位ベクトル化を行うことで$\mathbb{C}^3$ の正規直交基底

$$\boldsymbol{p}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る．そこで，$P = (\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}'_3)$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる．□

9.5 演習問題

問題 9.1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式，固有値及び，各固有値に属する固有空間の基底を求めよ．

問題 9.2 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) 固有多項式，固有値及び，各固有値に属する固有空間の基底を求めよ．

(2) A を対角化せよ．

問題 9.3 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) 固有多項式，固有値及び，各固有値に属する固有空間の基底を求めよ．

(2) A を対角化せよ．