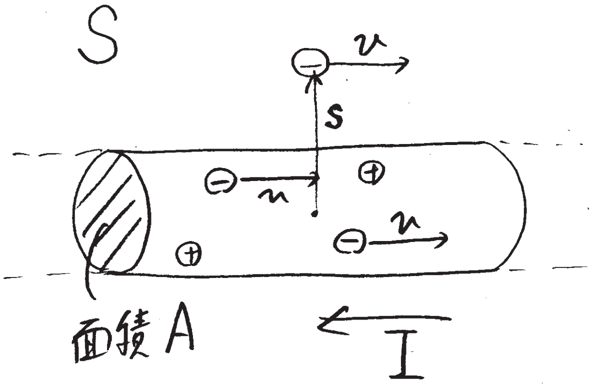
例1−1 電流の流れる電線とその外の電子（ファインマン）

※ページはグリフィスの教科書

S



電線の外にいる電子は電線の中の電子と同じ速度をもつ、とした。

⊕はうごかない。

電流Iによる磁場の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (\text{P.217})$$

外の電子がうける力（電線方向）の大きさは

$$F = ev\frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

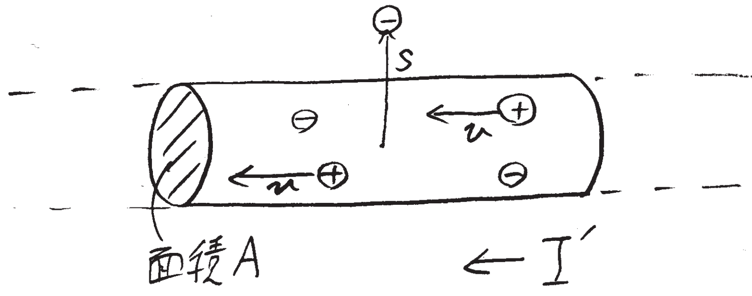
ここで、電線は中性と考えているので、正負電荷密度は等しく、$\rho_+ = -\rho_-$ (1.1)

$I = \rho_- v A$, $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ なので、

$$F = ev\frac{1}{2\pi s}\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\rho_- vA$$

$$F = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- A}{s}\frac{v^2}{c^2} \quad (1.2)$$

S′（電子とともに動く）



∵電荷は動いても変わらない。

長さは(0.2)および(0.3)のように見えるから、電荷密度が変わる。 $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\rho'_+ = \gamma\rho_+ ,\quad \rho'_- = \frac{\rho_-}{\gamma}$$

よって

$$\rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_-}{\gamma} + \gamma\rho_+ \overset{(1.1)}{=} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\rho_+$$

$$= \gamma\rho_+ v^2/c^2 \quad (1.3)$$

電線は+に帯電する。

電線（帯電した線）の電場の大きさは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{s}$$

$(\rho'_+ + \rho'_-)A$
(P.63)

外の電子がうける力（電線方向）の大きさは

$$F' = eE = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{s}\gamma\rho_+ A\frac{v^2}{c^2}$$

$$F' = \gamma\left(\frac{e}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_+ A}{s}\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (1.4)$$

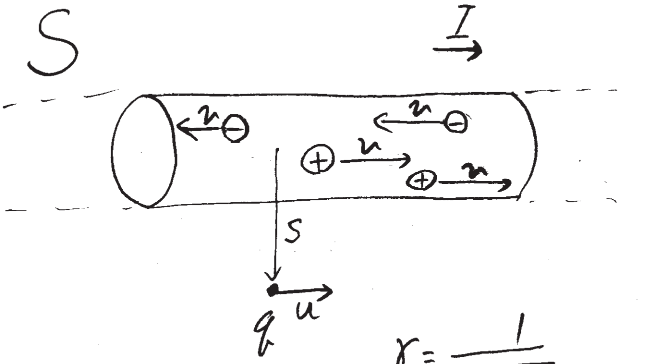
○ Sでは外にいる電子が磁場Bのみによって、S′では電場Eのみによって力をうける。（ファインマンの教科書では“電気力と磁気力とは粒子の電磁相互作用という唯一つの物理現象の部分である”という表現がある。）

○ F(1.2)とF′(1.4)の比較から、(0.5)の関係が成り立っていることがわかる。（この例1−1ではS′で粒子（外の電子）が静止していることに注意）

例1-2 電流の流れる電線とその外の電子(グリフィス)　pp.522-524

※ここでは線密度λ および S′(ダッシュ,プライム)ではなく $\bar{S}$ (バー)を使った。

S



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

電線は帯電していないので、
正負の線電荷密度は

$$\lambda_+ = -\lambda_- = \gamma\lambda_0 \quad (1.5)$$

動いてないとき

流れる電流をIとすると、
外の電荷qが受ける力は $\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\ (p.217)}$ から

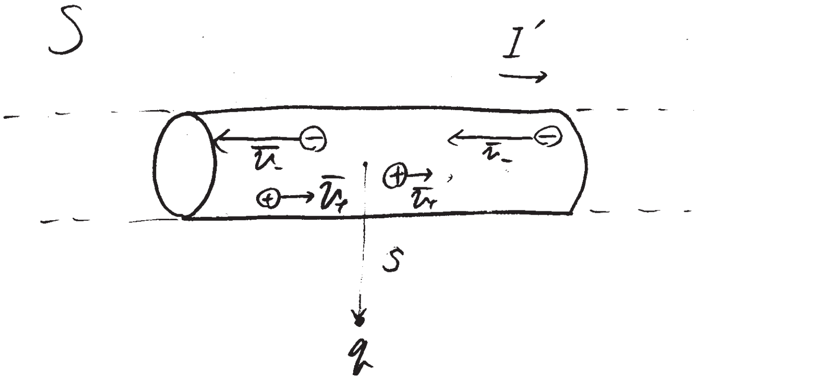
$$F = -qu\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right) \quad (1.6)$$

負(qが正)…電線に向かう方向
正(qが負)…電線の外に向かう方向

また、$I = v\lambda_+ + (-v)\lambda_- = 2v\lambda_+$
$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ を使って書きなおすと、

$$F = -\frac{\lambda_+ v}{\pi\varepsilon_0 c^2 s}\, qu \quad (1.7)$$

$\bar{S}$



(0.3)によると、$\bar{v}_+ = \frac{v-u}{1-uv/c^2}$, $\bar{v}_- = \frac{v+u}{1+uv/c^2}$ (1.8)

$$\bar{\lambda}_+ = \gamma_+\lambda_0 \quad , \quad \bar{\lambda}_- = \gamma_-\lambda_0 \quad (1.9)$$

ただし、$\gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{v}_\pm^2/c^2}}$

⇓ p.524、および(1.5)から

$$\gamma_\pm = \gamma\frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ なので、

$$\bar\lambda_+ + \bar\lambda_- \overset{(1.9)}{=} (\gamma_+ + \gamma_-)\lambda_0 = \frac{-2\lambda_+ uv}{c^2\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

(負に)帯電した線の電場は

$$E = \frac{\bar\lambda_+ + \bar\lambda_-}{2\pi\varepsilon_0 s} = -\frac{\lambda_+ v}{\pi\varepsilon_0 c^2 s}\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

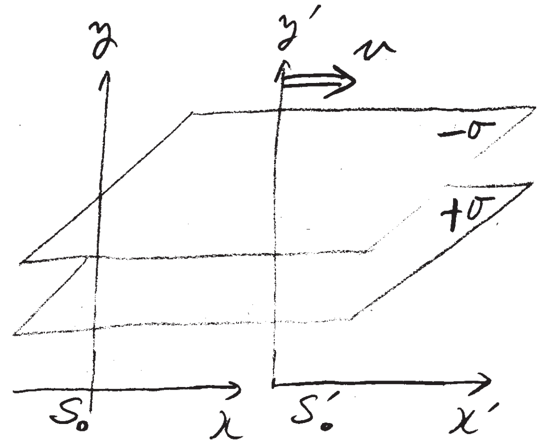
$$\bar{F} = -\frac{\lambda_+ v}{\pi\varepsilon_0 c^2 s}\frac{qu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (1.10)$$

負(qが正)…電線に向かう方向
正(qが負)…電線の外に向かう方向

◦外にいる電荷qは Sでは磁場Bのみによって、$\bar{S}$では電場Eのみによって力をうける。

例2　動くコンデンサー(異なる座標系での電場)

{グリフィス pp.525－
パーセル pp.224－



S_0ではコンデンサーは静止しているので、コンデンサー間の電場は

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} \quad (\text{pp.}73\sim74)$$

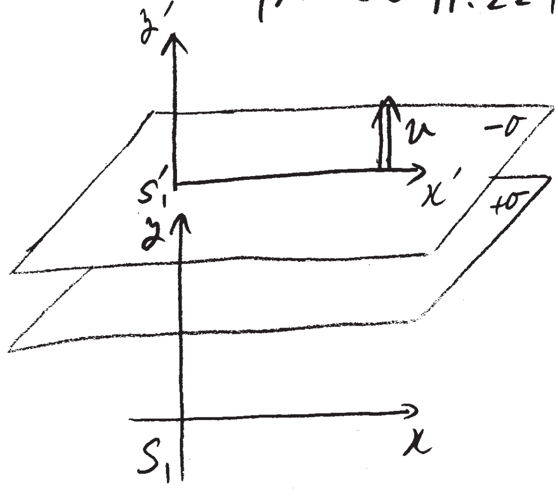
次にS_0に対し、x軸方向にvで動くS_0'から見ると、

面電荷密度が $\sigma' = \gamma\sigma$

$$\left(\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

となるので、

$$\vec{E}' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma\vec{E} \quad (2.1)$$



S_1ではコンデンサーは静止しているのでコンデンサー間の電場は

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

次にS_1に対し、z軸方向にvで動くS_1'から見ても(コンデンサー間の距離は変わるが、)面電荷密度は変わらないので、

$$\vec{E}' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \vec{E} \quad (2.2)$$

- (2.1), (2.2)から、(S'はSに対し速度$\vec{v}$で動いている。)

  電場がSにおいて静止している電荷から生じている時

  Sの任意の点での$\vec{E}$の$\vec{v}$に平行な縦方向成分$E^{\parallel}$、$\vec{v}$に垂直な横方向成分$E^{\perp}$と

  S'の同一点での$\vec{E}'$の$\vec{v}$に平行な縦方向成分$E^{\parallel\prime}$, $\vec{v}$に垂直な横方向成分$E^{\perp\prime}$の

  関係は

$$E^{\parallel\prime} = E^{\parallel} \qquad (2.3)$$

$$E^{\perp\prime} = \gamma E^{\perp} \qquad (2.4)$$

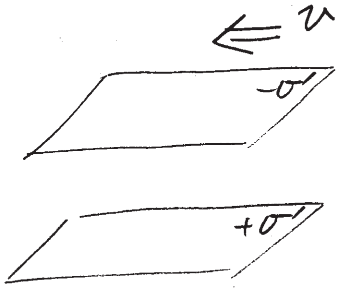
$$\left(\vec{E}^{\perp\prime} = \gamma \vec{E}^{\perp} \qquad (2.4)' \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$ である。

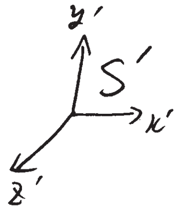
- 一定の速度で動く点電荷の場、電磁場の変換法則(p.531 式(12.108))への準備。

例2.1 動くコンデンサー②

(2.1)式の導出

（例2を考えている時、注意深い人は S_0'（コンデンサーが動く系）では、面電流によって $-\hat{z}$ 方向に磁場ができるはずだということに気付くだろう。）





$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$\sigma' = \gamma\sigma$ であったから、面電流 $|K| = \sigma' v \hat{x}' = \gamma\sigma\hat{x}'$

$$\vec{B_z'} = 2\cdot\frac{\mu_0}{2}|K|(-\hat{z}')$$

$$= -\mu_0\gamma\sigma v\hat{z}'$$

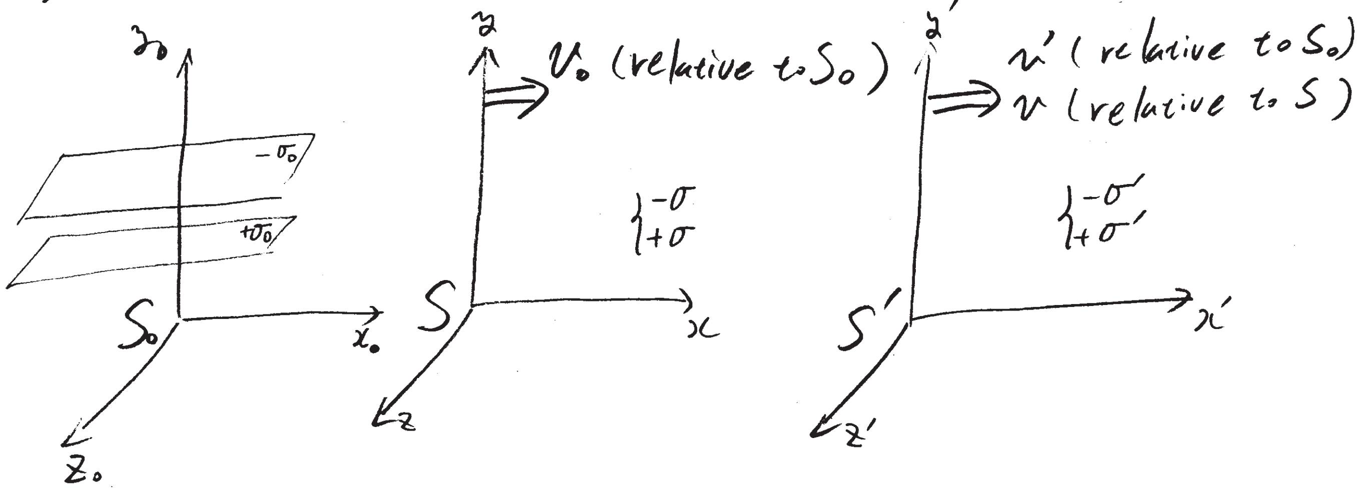
$$= -\gamma\frac{v}{c^2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{z}' \qquad (2.5)$$

$$\left(= -\gamma\frac{v}{c^2}E_y\hat{z}' \qquad (2.6)\right)$$

それではある系Sで電場も磁場もある時にはどうなるか、という事が次の疑問としてうかぶ。

例3 場はどの様に変換するか (グリフィス)

以下のようにある系S_0から見てv_0で動くS、v'で動くS' (Sから見てvで動く)がある。



〈準備〉 $\gamma_0 \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$, $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ とする。

(10.2)から

$$v' = \frac{v_0+v}{1+v_0 v/c^2}$$

$\gamma' \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$ とする。

このとき

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \sqrt{\frac{1-v_0^2/c^2}{1-v'^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1-v_0^2/c^2}{1-\left(\frac{v_0+v}{1+v_0v/c^2}\right)^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1-v_0^2/c^2}{1-\frac{(v_0^2+v^2+2v_0v)/c^2}{(1+v_0v/c^2)}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-v_0^2/c^2}{\frac{1+\cancel{\frac{2v_0v}{c^2}}+\frac{v_0^2v^2}{c^4}-\frac{v_0^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}-\cancel{\frac{2v_0v}{c^2}}}{(1+v_0v/c^2)^2}}} = (1+v_0v/c^2)^2\sqrt{\frac{\cancel{1-v_0^2/c^2}}{(\cancel{1-v_0^2/c^2})(1-v^2/c^2)}}$$

$$= \gamma\left(1+\frac{v_0v}{c^2}\right) \qquad (3.1)$$

また、

今、コンデンサーがS_0に対して静止しているとすると、S_0, S, S'から見た面電荷密度をそれぞれ$\sigma_0, \sigma, \sigma'$として、

$$\sigma' = \gamma'\sigma_0 \quad , \quad \sigma = \gamma_0\sigma_0$$ であるから

$$\sigma' = \frac{\gamma}{\gamma_0}\sigma \qquad (3.2)$$

〈参考：例2〉

(例3のつづき)

また、

S, S'でのz方向の磁場を B_z, B_z' とすると、

$$B_z = -\mu_0 \sigma v_0$$
$$= -\frac{\sigma v_0}{c^2 \varepsilon_0} \quad (3.3)$$

〈参考 例2.1〉

〈本題〉

$$E_y' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \overset{(3.2)}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \overset{(3.1)}{=} \gamma\left(1+\frac{v_0 v}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

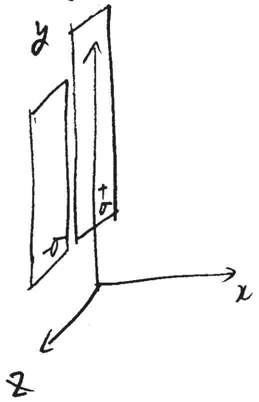
$$= \gamma\left\{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma v_0}{c^2\varepsilon_0}\right)v\right\} \overset{(3.3)}{=} \gamma(E_y - B_z v) \quad (3.4)$$

$$B_z' = -\mu_0 \sigma' v' = -\frac{\sigma' v'}{c^2\varepsilon_0} \overset{(3.2)}{=} \frac{-\sigma}{c^2\varepsilon_0}\left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right)\left(\frac{v_0+v}{1+v_0 v/c^2}\right)$$

$$\overset{(3.1)}{=} \frac{-\sigma}{c^2\varepsilon_0}\gamma(v_0+v) = \gamma\left\{-\frac{\sigma v_0}{c^2\varepsilon_0} - \frac{v}{c^2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right\} \overset{(3.3)}{=} \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \quad (3.5)$$

今度はコンデンサーを次のようにおいて考えると、(コンデンサーの面上全)

(※これは E_y を E_z と、B_z を $-B_y$ とよめばいいだけのことであるが…)



$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad B_y = \mu_0 \sigma v_0$$

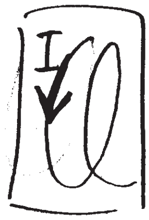
$$E_z' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma\left\{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \mu_0 \sigma v_0 v\right\} = \gamma(E_z + vB_y) \quad (3.6)$$

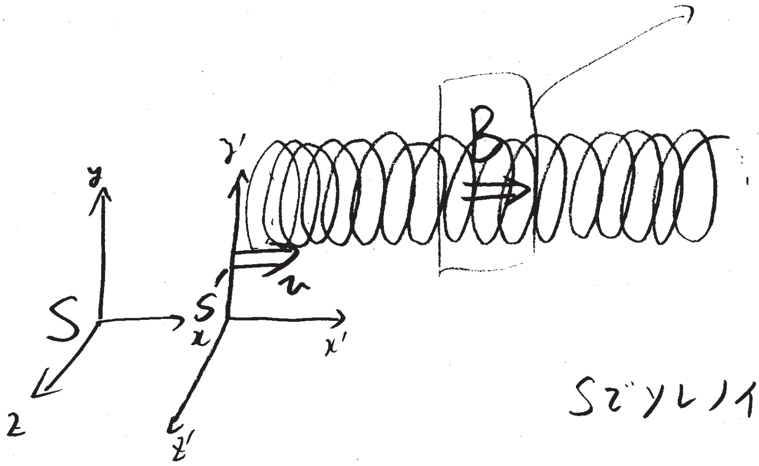
$$B_y' = \mu_0 \sigma' v' = \gamma\left\{\mu_0 \sigma v_0 + \frac{v}{c^2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right\} = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \quad (3.7)$$

上述のどちらかの例か、あるいは例2によってでもいいが、明らかに

$$E_x' = E_x \quad (3.8)$$

例4　動くソレノイド　(グリフィス)





Sでソレノイドが静止していたとすると、

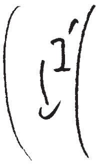
$$B_x = \mu_0 n I$$

Memo

$$n \ni \frac{1}{l}$$

$$n' \ni \frac{1}{l'} = \frac{\gamma}{l} = \gamma n$$

$I = qv$



$I' = qv' = \frac{v}{\gamma} q = \frac{I}{\gamma}$

S′では $n' = \gamma n$

$$I' = \frac{I}{\gamma}$$

$$B'_x = \mu_0 n' I' = \mu_0 n I = B_x \qquad (4.1)$$