17/5/2005 Y1

Vector potential の表式 $\mathbb{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}d\tau'$ について (a) $\nabla\cdot\mathbb{A}=0$ (b) $\nabla\times\mathbb{A}=$ ビオサバールの表式 をcheckする

電流部を全て含む空間について

(a)

$$\nabla\cdot\mathbb{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left(\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

$\mathbf{r}$ についての微分なので

$$\frac{1}{\mathscr{r}}\underbrace{(\nabla\cdot\mathbb{J}(\mathbf{r}'))}_{=0}+\mathbb{J}\cdot\underbrace{\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)}_{-\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)}\Rightarrow-\mathbb{J}(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$$

Note

$$\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{\mathbb{J}}{\mathscr{r}}\right)=\frac{1}{\mathscr{r}}\underbrace{(\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbb{J})}_{=0}+\mathbb{J}\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$$

定常電流なので

よって $\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{\mathbb{J}}{\mathscr{r}}\right)=\mathbb{J}\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$

$$-\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left(\frac{\mathbb{J}}{\mathscr{r}}\right)$$

ここまでの変形は $\mathbf{r}'$ についての divergence の表式を引き出すため

よって
$$\nabla\cdot\mathbb{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left(\frac{\mathbb{J}}{\mathscr{r}}\right)d\tau'\overset{\text{発散定理により}}{=}-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\mathbb{J}}{\mathscr{r}}\cdot d\mathbf{a}'$$

よって $\mathbb{J}(\mathbf{r}')$ on $S=0$ なので

$$=0$$

(b)
$$\nabla\times\mathbb{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\left(\frac{\mathbb{J}}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

$\mathbf{r}$ についての微分なので

$$\frac{1}{\mathscr{r}}\underbrace{(\nabla\times\mathbb{J}(\mathbf{r}'))}_{=0}-\mathbb{J}\times\underbrace{\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)}_{-\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathbb{J}\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}d\tau'\Rightarrow\text{ビオサバールの表式.}$$