① 項の計算の前に

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \right\} = \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)} + \frac{1}{\mathscr{r}} \{ \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}_{0} \}$$

${\mathbf{r}}$についての微分

Note P224 foot Note ⑨

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{\mathscr{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{\mathscr{r}}$$

$$-\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\right) = \frac{1}{\mathscr{r}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$$

$$= -\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\right) + \frac{1}{\mathscr{r}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

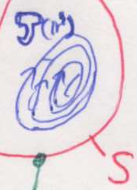
よって ① 項は

$$-\int \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\right) d\tau' + \int \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} d\tau'$$ となり

発散定理より

$$-\oint_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \cdot d\mathbf{a}'$$

$\Downarrow$ 0



S → $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$の分布は有限であれば，それを包む領域（$\mathbf{J}(\mathbf{r}')=0$ on the boundary）についての表面積分はzeroになる

これは生き残って

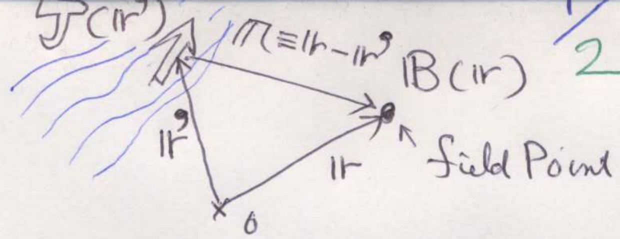
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left\{ \underbrace{\int \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} d\tau'} \right\}$$ を得る

これはどうなるか？

↓

次回の授業 6/12（火）で説明

2007 電磁気学 補足メモ



1

$$\mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,d\tau'$$

についてそのDivergence，Rotationを計算する前に書き換えを行うと流れがスムーズになる

$$\nabla\times\left(\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\right) = \underbrace{\left(\nabla\frac{1}{\mathscr{r}}\right)}_{-\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}}\times\mathbb{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{\mathscr{r}}\,\nabla\times\mathbb{J}(\mathbf{r}') \Rightarrow 0$$

$$-\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\times\mathbb{J}(\mathbf{r}')$$

rについての微分

$$\mathbb{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla\times\left(\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

$$= \nabla\times\left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,d\tau'\right\}$$ と変形できる

この部分をベクトル場 $\mathbb{A}(\mathbf{r})$ と名前を付けておく

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

2

1の準備が終ったので $\mathbb{B}(\mathbf{r})$ の Divergence，Rotationを計算しよう

Divergenceについては

Recall ベクトル解析

$$\nabla\cdot\mathbb{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) \Rightarrow 0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\nabla\cdot\mathbb{B} = 0}$$ を得る

Rotationについては

$$\nabla\times\mathbb{B} = \nabla\times(\nabla\times\mathbb{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{A}) - \nabla^2\mathbb{A}$$ なので

※ ベクトル場に対する ここでのラプラシアンは直交座標系で

$$\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)\hat{i} + \left(\qquad\right)\hat{j} + \cdots$$

と解して用いること

$$\nabla\times\mathbb{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left\{\nabla\cdot\left[\int\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,d\tau'\right]\right\} - \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\left[\int\frac{\mathbb{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,d\tau'\right]$$

rについての微分！

①項とおく

次ページへ

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathbb{J}(\mathbf{r}')\,\nabla^2\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -4\pi\delta(\mathscr{r})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\mu_0\mathbb{J}(\mathbf{r})}$$