

非線形シュレディンガー方程式の基底状態の安定性¹

太田 雅人（東京理科大学 理学部数学科）

§1. はじめに

非線形シュレディンガー方程式 (Nonlinear Schrödinger equation)

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

について考える．ここで， i は虚数単位， $p > 1$ であり， $u = u(t, x)$ は複素数値の未知関数である．また，

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

まず，1979 年の Ginibre and Velo の有名な論文 [4] の Introduction から，非線形シュレディンガー方程式の物理的背景について説明している部分を引用しよう．

Equations of the type

$$i \frac{du}{dt} = -\Delta u + mu + f(u) \tag{0.1}$$

are interesting for various reasons. They are widely used in several domains of applied physics. In the special case where $f(u) = \lambda|u|^2u$, the equation (0.1) can be considered as the classical approximation to the field equation for a quantum mechanical nonrelativistic many body system with a two body δ -function interaction. It is also used in the Landau-Ginzburg theory of superconductivity. For $f(u) = -|u|^2u$, in one-dimensional space, the equation (0.1) exhibits solitary wave solutions, and can furthermore be solved exactly by the inverse scattering method.

さて， $N = 1$ のとき，(NLS) は $u(t, x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ という形の特殊解をもつ．ここで， $\omega > 0$ はパラメータであり，

$$\phi_\omega(x) = \left\{ \frac{(p+1)\omega}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{(p-1)\sqrt{\omega}}{2} x \right) \right\}^{1/(p-1)}$$

¹集中講義：大阪市立大学，2020 年 10 月 26 日-30 日．

は次の方程式の一意的な正值偶関数解である.

$$-\phi'' + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

さらに,

$$2^* = \begin{cases} 2N/(N-2) & (N \geq 3) \\ \infty & (N = 1, 2) \end{cases}$$

と定めると, $N \geq 2$ の場合も, $1 < p < 2^* - 1$ のとき, 任意の $\omega > 0$ に対して, 定常問題 (stationary problem)

$$(SP) \quad -\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の正值球対称解 $\phi_\omega(x)$ が一意的に存在する.

このとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は (NLS) の解となるが, これを定在波解という. この講義では, 初期データ $u_0(x)$ が $\phi_\omega(x)$ に十分近いとき, 初期条件 $u(0, x) = u_0(x)$ を満たす (NLS) の解 $u(t, x)$ が時間の経過とともにどのように変化していくかという問題について考える.

以下, $1 \leq q < \infty$ に対して, Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^N)$ のノルムを

$$\|u\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

とし, $L^2(\mathbb{R}^N)$ 及び Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ はそれぞれ, 内積

$$(u, v)_{L^2} = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

を備えた実 Hilbert 空間とする. Sobolev の埋込定理により, $1 < p < 2^* - 1$ のとき, $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ.

ここで, 汎関数の微分について簡単に復習する.

定義 X は実 Banach 空間とする.

- (1) $f \in X^*$ とする. すなわち, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ線形とする. このとき, f に $v \in X$ を代入した値を $f(v)$ の代わりに $\langle f, v \rangle$ とかく.
- (2) $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $\phi \in X$ に対して, 次を満たす $f \in X^*$ が存在するとき, F は ϕ において微分可能であるといい, f を $F'(\phi)$ とかく:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

$$v \in X, \|v\| < \delta \text{ ならば } |F(\phi + v) - F(\phi) - \langle f, v \rangle| \leq \varepsilon \|v\|.$$

(3) $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級であるとは, F が X のすべての点で微分可能であり, $F' : X \rightarrow X^*$ が連続であることである.

例 (1) $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $F_1(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2$ と定める.

このとき, $\phi, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$F_1(\phi + v) = F_1(\phi) + (\nabla \phi, \nabla v)_{L^2} + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2$$

だから, $F_1 : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり,

$$\langle F_1'(\phi), v \rangle = (\nabla \phi, \nabla v)_{L^2} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} D_j \phi(x) \overline{D_j v(x)} dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

これを $F_1'(\phi) = -\Delta \phi$ とかく.

(2) $1 \leq p < 2^* - 1$ とする. $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $F_2(u) = \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ と定める. このとき, $F_2 : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり,

$$\langle F_2'(\phi), v \rangle = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^{p-1} \phi(x) \overline{v(x)} dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

これを $F_2'(\phi) = |\phi|^{p-1} \phi$ とかく.

(NLS) に関する基本的な結果をまとめておこう. エネルギーを

$$E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める. エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ における (NLS) の初期値問題の適切性に関して次が知られている.

定理 1 $1 < p < 2^* - 1$ とする. 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, 最大存在時間 $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (0, \infty]$ と初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u \in C([0, T_{\max}), H^1(\mathbb{R}^N))$ が一意的に存在する. また, エネルギー及び L^2 ノルムの保存則が成り立つ:

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \text{ for all } t \in [0, T_{\max}).$$

さらに, $T_{\max} < \infty$ ならば, $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$ (blowup alternative). $\square$

定理 1 を含む一般的な定理が Ginibre and Velo [4], Kato [6] などによって証明されている.

定理 2 $1 < p < 1 + 4/N$ のとき, すべての $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $T_{\max}(u_0) = \infty$.

証明 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解とすると, エネルギーの保存則より, $t \in [0, T_{\max})$ に対して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = 2E(u_0) + \frac{2}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

ここで, Gagliardo-Nirenberg の不等式より, $C = C(N, p) > 0$ が存在し,

$$\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C \|v\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla v\|_{L^2}^\alpha, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ. 但し, $\alpha = \frac{N}{2}(p-1)$ とおいた.

よって, L^2 ノルムの保存則より, $t \in [0, T_{\max})$ に対して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_0) + C_1 \|u_0\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^\alpha.$$

ここで, $1 < p < 1 + 4/N$ より, $0 < \alpha < 2$ だから, $\beta = \frac{2(p+1-\alpha)}{2-\alpha}$ とおくと, Young の不等式により,

$$C_1 \|u_0\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^\alpha \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + C_2 \|u_0\|_{L^2}^\beta.$$

よって, $t \in [0, T_{\max})$ に対して, $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 4E(u_0) + 2C_2 \|u_0\|_{L^2}^\beta$ であり, blowup alternative により, $T_{\max} = \infty$ を得る. $\square$

注意 3 次が成り立つ.

(1) $p = 1 + 4/N$ のとき, $\delta_1 > 0$ が存在し, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|u_0\|_{L^2} < \delta_1$ ならば, $T_{\max}(u_0) = \infty$.

(2) $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ のとき, $\delta_2 > 0$ が存在し, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|u_0\|_{H^1} < \delta_2$ ならば, $T_{\max}(u_0) = \infty$. $\square$

$1 + 4/N \leq p < 2^* - 1$ のときは, 有限時間で爆発する解が存在することが知られている.

§2. 定常問題

この節では, $\omega > 0, 1 < p < 2^* - 1$ とし, 定常問題

$$(SP) \quad -\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

について考える. (SP) に対応する作用汎関数 $S_\omega : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$S_\omega(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める. このとき, $S_\omega : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり, $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$(SP) \iff S'_\omega(\phi) = 0.$$

定義 (SP) の非自明解 (nontrivial solutions) 全体の集合を

$$\mathcal{N}_\omega = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : S'_\omega(v) = 0\}$$

とおく. さらに,

$$\mathcal{G}_\omega = \{\phi \in \mathcal{N}_\omega : S_\omega(\phi) \leq S_\omega(v) \text{ for all } v \in \mathcal{N}_\omega\}$$

と定める. $\mathcal{G}_\omega$ の元を (SP) の基底状態 (ground state) という. また, $\mathcal{N}_\omega \setminus \mathcal{G}_\omega$ の元, すなわち, (SP) の非自明解で基底状態でないものを (SP) の励起状態という.

注意 $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $\tau_y v(x) = v(x-y)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) と定める. このとき, $\theta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $S_\omega(e^{i\theta}\tau_y v) = S_\omega(v)$.

以下, (SP) の基底状態の存在を証明しよう. まず,

$$K_\omega(v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$$\mathcal{K}_\omega = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : K_\omega(v) = 0\}$$

と定める. ここで, $\lambda > 0, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$S_\omega(\lambda v) = \frac{\lambda^2}{2}(\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2) - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

だから, $K_\omega(v) = \partial_\lambda S_\omega(\lambda v)|_{\lambda=1} = \langle S'_\omega(v), v \rangle$ であり, $\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$.

また,

$$d(\omega) = \inf\{S_\omega(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\}, \quad \mathcal{M}_\omega = \{v \in \mathcal{K}_\omega : S_\omega(v) = d(\omega)\}$$

と定める.

補題 1 $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$.

証明 $\phi \in \mathcal{M}_\omega$ とする. このとき, $\langle K'_\omega(\phi), \phi \rangle = \partial_\lambda K_\omega(\lambda\phi)|_{\lambda=1} \neq 0$ だから, Lagrange の未定乗数法により, $S'_\omega(\phi) = \mu K'_\omega(\phi)$ を満たす $\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

このとき, $0 = K_\omega(\phi) = \langle S'_\omega(\phi), \phi \rangle = \mu \langle K'_\omega(\phi), \phi \rangle$ だから, $\mu = 0$. よって, $S'_\omega(\phi) = 0$ であり, $\phi \in \mathcal{N}_\omega$.

さらに, $\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから, 任意の $v \in \mathcal{N}_\omega$ に対して, $S_\omega(\phi) = d(\omega) \leq S_\omega(v)$ が成り立つ. よって, $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ であり, $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$ が示された. $\square$

補題 2 $\mathcal{M}_\omega$ が空集合でないならば, $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{M}_\omega$.

証明 $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ を示せばよい. $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ を任意にとる. $\mathcal{M}_\omega$ は空でないから, $v \in \mathcal{M}_\omega$ を1つとる. このとき, 補題 1 より, $v \in \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega$ であり, $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ だから, $S_\omega(\phi) \leq S_\omega(v) = d(\omega)$.

一方, $\phi \in \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから, $d(\omega)$ の定義より, $d(\omega) \leq S_\omega(\phi)$ が成り立ち, $S_\omega(\phi) = d(\omega)$. よって, $\phi \in \mathcal{M}_\omega$ だから, $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ が示された. $\square$

補題 2 より, $\mathcal{M}_\omega$ が空でないことを示せばよいが, より強い主張を示そう.

定理 3 $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ は $K_\omega(u_n) \rightarrow 0, S_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ を満たすとする. このとき, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 (n_j) と $v \in \mathcal{M}_\omega$ が存在して, $\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightarrow v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

定理 3 を証明するための鍵となるのは, 次の 2 つの基本的な定理である.

Brezis-Lieb の補題 ([1]) $1 < q < \infty$ とする. (u_n) は $L^q(\mathbb{R}^N)$ の有界列で, $u_n \rightarrow u$ a.e. in $\mathbb{R}^N$ とする. このとき, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_{L^q}^q - \|u_n - u\|_{L^q}^q) = \|u\|_{L^q}^q.$$

注意 $2 \leq q < 2^*$ のとき, (u_n) が $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列ならば, 部分列をとることにより, Brezis-Lieb の補題の仮定は満たされる.

また, X が Hilbert 空間のとき, $u_n \rightharpoonup u$ weakly in X ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_X^2 - \|u_n - u\|_X^2) = \|u\|_X^2$$

が成り立つことは容易に分かる.

Lieb のコンパクト性定理 ([8]) (u_n) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列であり, ある $q \in (2, 2^*)$ に対して, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} > 0$ とする. このとき, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 $(n_j), v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ が存在し, $\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Brezis-Lieb の補題の証明は原論文 [1] を参照せよ．また，Lieb のコンパクト性定理の証明はこの節の最後に与える．

$H^1(\mathbb{R}^N)$ 上の汎関数

$$J_\omega(v) = \frac{p-1}{2(p+1)} (\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2), \quad G(v) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

を定める．このとき，

$$S_\omega(v) = J_\omega(v) + \frac{1}{p+1} K_\omega(v) = G(v) + \frac{1}{2} K_\omega(v),$$

$$d(\omega) = \inf\{J_\omega(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\} = \inf\{G(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\}$$

であり， $d(\omega) \geq 0$ に注意する．

補題 4 $d(\omega) > 0$.

証明 $v \in \mathcal{K}_\omega$ を任意にとる．このとき， $K_\omega(v) = 0$ と Sobolev の不等式より，正定数 C_1, C_2, C_3 が存在し，

$$C_1 J_\omega(v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C_2 \|v\|_{H^1}^{p+1} \leq C_3 J_\omega(v)^{(p+1)/2}.$$

$$\text{ここで， } v \neq 0 \text{ より， } J_\omega(v)^{(p-1)/2} \geq \frac{C_1}{C_3} \text{ だから， } d(\omega) \geq \left(\frac{C_1}{C_3}\right)^{2/(p-1)}. \quad \square$$

補題 5 $K_\omega(v) < 0$ ならば， $J_\omega(v) > d(\omega)$ ， $G(v) > d(\omega)$.

証明 $\lambda \mapsto K_\omega(\lambda v)$ のグラフより， $K_\omega(\lambda_0 v) = 0$ を満たす $\lambda_0 \in (0, 1)$ が存在する．

また， $v \neq 0$ より， $\lambda_0 v \in \mathcal{K}_\omega$ だから，

$$d(\omega) \leq J_\omega(\lambda_0 v) = \lambda_0^2 J_\omega(v) < J_\omega(v), \quad d(\omega) \leq G(\lambda_0 v) = \lambda_0^{p+1} G(v) < G(v)$$

が成り立つ． □

以上の準備のもとで，定理 3 を証明しよう．

定理 3 の証明

Step 1 まず， $S_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ ， $K_\omega(u_n) \rightarrow 0$ より， $J_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ だから， (u_n) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列である．また，補題 4 より， $G(u_n) \rightarrow d(\omega) > 0$ だから， $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^{p+1}} > 0$ としてよい．よって，Lieb のコンパクト性定理より， $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ ，部分列（以下，部分列を同じ記号で書く）， $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ が存在し， $v_n := \tau_{y_n} u_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

さらに, Brezis-Lieb の補題より

$$J_\omega(v_n) - J_\omega(v_n - v) \rightarrow J_\omega(v), \quad (1)$$

$$K_\omega(v_n) - K_\omega(v_n - v) \rightarrow K_\omega(v). \quad (2)$$

Step 2 $K_\omega(v) = 0$ であることを背理法で示そう.

まず, $K_\omega(v) > 0$ と仮定すると, $K_\omega(v_n) = K_\omega(u_n) \rightarrow 0$ だから, (2) より, $K_\omega(v_n - v) \rightarrow -K_\omega(v) < 0$. よって, 十分大きな n に対して, $K_\omega(v_n - v) < 0$ だから, 補題 5 より, $J_\omega(v_n - v) > d(\omega)$. このとき, $J_\omega(v_n) = J_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ だから, (1) より, $J_\omega(v) \leq 0$ となるが, これは $v \neq 0$ であることに矛盾する.

また, $K_\omega(v) < 0$ と仮定すると, 補題 5 より, $J_\omega(v) > d(\omega)$ となる. 一方, $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ より, $J_\omega(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\omega(v_n) = d(\omega)$ だから, これも矛盾である.

故に, $K_\omega(v) = 0$ であり, $v \in \mathcal{K}_\omega$.

Step 3 $d(\omega)$ の定義と $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ より,

$$d(\omega) \leq S_\omega(v) = J_\omega(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\omega(v_n) = d(\omega).$$

これから, $S_\omega(v) = d(\omega)$ だから, $v \in \mathcal{M}_\omega$.

さらに, (1) により, $J_\omega(v_n - v) \rightarrow 0$ だから, $v_n \rightarrow v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. □

最後に, Lieb のコンパクト性定理を証明しよう.

Lieb のコンパクト性定理の証明 はじめに,

$$C_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2, \quad C_2 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q, \quad C_3 = \frac{C_1 + 1}{C_2}$$

とおく. また, $Q_0 = (0, 1)^N$ とし, $y \in \mathbb{Z}^N$ に対して,

$$Q_y = \{x \in \mathbb{R}^N : x - y \in Q_0\}$$

と定める. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $y_n \in \mathbb{Z}^N$ が存在し,

$$\|u_n\|_{H^1(Q_{y_n})}^2 < C_3 \|u_n\|_{L^q(Q_{y_n})}^q. \quad (1)$$

実際, これが成り立たないと仮定すると, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\|u_{n_0}\|_{H^1(Q_y)}^2 \geq C_3 \|u_{n_0}\|_{L^q(Q_y)}^q \quad \forall y \in \mathbb{Z}^N.$$

このとき,

$$\begin{aligned} C_1 &\geq \|u_{n_0}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|_{H^1(Q_y)}^2 \\ &\geq C_3 \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|_{L^q(Q_y)}^q = C_3 \|u_{n_0}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \geq C_3 C_2 = C_1 + 1 \end{aligned}$$

となり, 矛盾である. 故に, (1) を満たす点列 $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ が存在する.

この点列 (y_n) に対して, $v_n := \tau_{-y_n} u_n$ とおくと,

$$\|v_n\|_{H^1(Q_0)}^2 < C_3 \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

特に, $\|v_n\|_{L^q(Q_0)} > 0$. さらに, Sobolev の埋蔵定理より, N と q のみに依存する定数 $C_4 > 0$ が存在し, $C_4 \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^2 \leq \|v_n\|_{H^1(Q_0)}^2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) だから,

$$0 < C_4/C_3 \leq \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^{q-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

ここで, (v_n) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列だから, ある部分列 (n_j) と $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在し, $v_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$. 埋め込み $H^1(Q_0) \hookrightarrow L^q(Q_0)$ はコンパクトだから, (2) より, $\|v\|_{L^q(Q_0)}^{q-2} \geq C_4/C_3 > 0$ となり, $v \neq 0$ を得る. $\square$

§3. 定在波解の安定性

非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (\text{NLS})$$

について考える．ここで， $1 < p < 2^* - 1$ とする．

汎関数 $E, Q : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad Q(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2$$

と定める． E, Q は (NLS) の保存量である．

さらに， $\omega > 0$ とし， $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ を

$$-\Delta \phi + \omega \phi - |\phi|^{p-1} \phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{SP})$$

の非自明解とする．このとき， $e^{i\omega t} \phi(x)$ は (NLS) の解であるが，これを定在波解という．また， $S_\omega(u) = E(u) + \omega Q(u)$ とおくと， $S'_\omega(\phi) = 0$ である．

定義 1 $(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ に対して，

$$T(\theta, y)u(x) = e^{i\theta} u(x + y), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

と定める．また，

$$\mathcal{O}(\phi) = \{T(\theta, y)\phi : (\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\},$$

$$\text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi)) = \inf \{\|u - T(\theta, y)\phi\|_{H^1} : (\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\},$$

$$U_r(\phi) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi)) < r\}$$

と定める．

定義 2 (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t} \phi(x)$ が安定であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して， $\delta > 0$ が存在し， $u_0 \in U_\delta(\phi)$ ならば， $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u(t)$ は，すべての $t \in [0, \infty)$ に対して存在し， $u(t) \in U_\varepsilon(\phi)$ が成り立つことである．

定理 3

— 仮定 (A) —

正定数 r, C_0 が存在し，

$$E(v) - E(\phi) \geq C_0 \text{dist}(v, \mathcal{O}(\phi))^2$$

for all $v \in U_r(\phi)$ satisfying $Q(v) = Q(\phi)$.

このとき、(NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi(x)$ は安定である.

証明 背理法で示す. $e^{i\omega t}\phi(x)$ が安定でないと仮定すると、定数 $\varepsilon_0 \in (0, r/2)$, (NLS) の解の列 (u_n) , 時刻の列 $(t_n) \subset (0, \infty)$ が存在し、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\text{dist}(u_n(0), \mathcal{O}(\phi)) < \frac{\varepsilon_0}{n}, \quad (1)$$

$$u_n(t) \in U_{\varepsilon_0}(\phi) \text{ for all } t \in [0, t_n], \quad (2)$$

$$\text{dist}(u_n(t_n), \mathcal{O}(\phi)) = \varepsilon_0. \quad (3)$$

このとき、保存則と (1) により、

$$E(u_n(t_n)) = E(u_n(0)) \rightarrow E(\phi), \quad (4)$$

$$Q(u_n(t_n)) = Q(u_n(0)) \rightarrow Q(\phi). \quad (5)$$

ここで、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lambda_n = \frac{Q(\phi)}{Q(u_n(0))}, \quad v_n = \lambda_n^{1/2} u_n(t_n) \quad (6)$$

とおくと、 $Q(v_n) = Q(\phi)$. また、(5) により、 $\lambda_n \rightarrow 1$ だから、(4) により、

$$E(v_n) \rightarrow E(\phi). \quad (7)$$

さらに、(3) と $0 < \varepsilon_0 < r/2$ より、 $u_n(t_n) \in U_{r/2}(\phi)$ だから、十分大きな n に対して、 $v_n \in U_r(\phi)$. よって、仮定 (A) と (7) により、

$$C_0 \text{dist}(v_n, \mathcal{O}(\phi))^2 \leq E(v_n) - E(\phi) \rightarrow 0$$

だから、 $\text{dist}(u_n(t_n), \mathcal{O}(\phi)) \rightarrow 0$ となるが、これは (3) と矛盾する.

故に、 $e^{i\omega t}\phi(x)$ は安定である. □

次の節で、 $S_\omega : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ の ϕ における 2 階微分 $S''_\omega(\phi)$ を用いて、仮定 (A) が成り立つための十分条件を与える. ここで、 ϕ が実数値関数の場合、

$$S''_\omega(\phi)v = -\Delta v + \omega v - \frac{p+1}{2}\phi(x)^{p-1}v - \frac{p-1}{2}\phi(x)^{p-1}\bar{v}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

である. $S''_\omega(\phi) : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)^*$ は実線形作用素であり (複素線形でないことに注意)、 ϕ における線形化作用素と呼ばれる.

§4. 仮定 (A) の十分条件

汎関数 $S, Q : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級であり, 任意の $(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$S(T(\theta, y)u) = S(u), \quad Q(T(\theta, y)u) = Q(u)$$

とする. また, $\phi \in H^2(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ であり, $S'(\phi) = 0, Q'(\phi) \neq 0$ とする.

定理 1

仮定 (B)

定数 $C_1 > 0$ が存在し,

$$\langle S''(\phi)w, w \rangle \geq C_1 \|w\|_{H^1}^2$$

for all $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfying

$$\langle Q'(\phi), w \rangle = 0, \quad (i\phi, w)_{H^1} = 0, \quad (\partial_j \phi, w)_{H^1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

このとき, 正定数 r, C_0 が存在し,

$$S(u) - S(\phi) \geq C_0 \text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi))^2$$

for all $u \in U_r(\phi)$ satisfying $Q(u) = Q(\phi)$.

以下, 定理 1 を証明していく.

命題 2 $\phi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ とし, $0 < r < \|\phi\|_{H^1}$ とする.

このとき, 任意の $u \in U_r(\phi)$ に対して,

$$\text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi)) = \|u - T(s(u))\phi\|_{H^1}$$

を満たす $s(u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ が存在する.

さらに, $u \in U_r(\phi)$ に対して, $M(u) = T(-s(u))u$ とおくと,

$$(M(u), i\phi)_{H^1} = 0, \quad (M(u), \partial_j \phi)_{H^1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

証明 前半の $s(u)$ の存在については省略し, 後半のみ示す.

$$f(\theta, y) = \|u - T(\theta, y)\phi\|_{H^1}^2, \quad (\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

とおくと, $f(s(u)) = \min\{f(\theta, y) : (\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\}$ だから,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial \theta}(s(u)) = -2(u, T(s(u))i\phi)_{H^1} = -2(M(u), i\phi)_{H^1}, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(s(u)) = -2(u, T(s(u))\partial_j \phi)_{H^1} = -2(M(u), \partial_j \phi)_{H^1} \end{aligned}$$

であり, $(M(u), i\phi)_{H^1} = 0, (M(u), \partial_j \phi)_{H^1} = 0$ ($j = 1, \dots, N$). $\square$

命題 3 $\langle Q'(\phi), i\phi \rangle = 0, \langle Q'(\phi), \partial_j \phi \rangle = 0$ ($j = 1, \dots, N$).

証明 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $Q(e^{i\theta}\phi) = Q(\phi)$ だから, $\theta = 0$ において微分すれば, $\langle Q'(\phi), i\phi \rangle = 0$ を得る.

また, $\partial_j \phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に注意すると, 同様に, $Q(\phi(\cdot + y)) = Q(\phi)$ を $y = 0$ において y_j で微分すれば, $\langle Q'(\phi), \partial_j \phi \rangle = 0$ を得る. $\square$

定理 1 の証明 $0 < r < \|\phi\|_{H^1}$ とし, $u \in U_r(\phi)$, $Q(u) = Q(\phi)$ とする.

(Step 1) 命題 2 より,

$$\text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi)) = \|u - T(s(u))\phi\|_{H^1}$$

を満たす $s(u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ が存在する.

$$M(u) = T(-s(u))u, \quad v = M(u) - \phi$$

とおくと, $\|v\|_{H^1} = \text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi)) < r$ であり,

$$(i\phi, M(u))_{H^1} = 0, \quad (\partial_j \phi, M(u))_{H^1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

さらに, ϕ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ において $\{i\phi, \partial_1 \phi, \dots, \partial_N \phi\}$ と直交するから,

$$(i\phi, v)_{H^1} = 0, \quad (\partial_j \phi, v)_{H^1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

(Step 2) $Q'(\phi) \in H^1(\mathbb{R}^N)^* \setminus \{0\}$ だから,

$$\langle Q'(\phi), z \rangle = (\psi, z)_{H^1}, \quad z \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

を満たす $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ が存在する. ここで,

$$a = \frac{(\psi, v)_{H^1}}{\|\psi\|_{H^1}^2}, \quad w = v - a\psi$$

とおくと, $(\psi, w)_{H^1} = 0$.

さらに、命題 3 と Step 1 より、 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ は直交条件

$$\langle Q'(\phi), w \rangle = 0, \quad (i\phi, w)_{H^1} = 0, \quad (\partial_j \phi, w)_{H^1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N) \quad (1)$$

を満たす。

(Step 3) Taylor 展開により、

$$S(u) = S(M(u)) = S(\phi + v) = S(\phi) + \langle S'(\phi), v \rangle + \frac{1}{2} \langle S''(\phi)v, v \rangle + o(\|v\|_{H^1}^2)$$

であり、 $S'(\phi) = 0$ だから、

$$S(u) - S(\phi) = \frac{1}{2} \langle S''(\phi)v, v \rangle + o(\|v\|_{H^1}^2). \quad (2)$$

また、

$$Q(\phi) = Q(u) = Q(M(u)) = Q(\phi + v) = Q(\phi) + \langle Q'(\phi), v \rangle + O(\|v\|_{H^1}^2)$$

より、 $(\psi, v)_{H^1} = \langle Q'(\phi), v \rangle = O(\|v\|_{H^1}^2)$ だから、 $a = O(\|v\|_{H^1}^2)$ 。

さらに、 $v = a\psi + w$, $(\psi, w)_{H^1} = 0$ より、 $\|v\|_{H^1}^2 = |a|^2 \|\psi\|_{H^1}^2 + \|w\|_{H^1}^2$ だから、

$$\|w\|_{H^1}^2 = \|v\|_{H^1}^2 + O(\|v\|_{H^1}^4). \quad (3)$$

このとき、

$$\begin{aligned} \langle S''(\phi)v, v \rangle &= \langle S''(\phi)(a\psi + w), a\psi + w \rangle \\ &= a^2 \langle S''(\phi)\psi, \psi \rangle + 2a \langle S''(\phi)\psi, w \rangle + \langle S''(\phi)w, w \rangle \\ &= \langle S''(\phi)w, w \rangle + O(\|v\|_{H^1}^3) \end{aligned}$$

であり、 w は直交条件 (1) を満たすので、仮定により、

$$\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq C_1 \|w\|_{H^1}^2 + O(\|v\|_{H^1}^3). \quad (4)$$

よって、(2), (3), (4) により、

$$S(u) - S(\phi) \geq \frac{C_1}{2} \|v\|_{H^1}^2 + o(\|v\|_{H^1}^2).$$

ここで、 $\|v\|_{H^1} = \text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi)) < r$ だから、必要があれば $r > 0$ を小さく取り直すことにより、 $Q(u) = Q(\phi)$ を満たすすべての $u \in U_r(\phi)$ に対して、

$$S(u) - S(\phi) \geq \frac{C_1}{3} \text{dist}(u, \mathcal{O}(\phi))^2$$

が成り立つ。 □

§5. 制約条件つき最小化問題と線形化作用素の正値性

以下, X は実 Banach 空間とし, U は X の空でない開集合とする.

また, $S, K : X \rightarrow \mathbb{R}$ とし,

$$\mathcal{K} = \{u \in U : K(u) = 0\}$$

とおく. さらに, $\phi \in \mathcal{K}$ は

$$S(\phi) = \min\{S(u) : u \in \mathcal{K}\}$$

を満たすとする.

命題 1 $S, K : X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級とし, $K'(\phi) \neq 0$ と仮定する.

このとき, $S'(\phi) = \mu K'(\phi)$ を満たす $\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

証明 この後の命題 3 の証明を参考に証明せよ. □

仮定 (A1)

$$\langle S'(\phi), \psi_1 \rangle = 0, \quad \langle K'(\phi), \psi_1 \rangle \neq 0$$

を満たす $\psi_1 \in X$ が存在する.

命題 2 $S, K : X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級とし, (A1) を仮定する. このとき, $S'(\phi) = 0$.

証明 命題 1 より, $S'(\phi) = \mu K'(\phi)$ を満たす $\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

このとき, $0 = \langle S'(\phi), \psi_1 \rangle = \mu \langle K'(\phi), \psi_1 \rangle$ であり, $\langle K'(\phi), \psi_1 \rangle \neq 0$ だから, $\mu = 0$ を得る. よって, $S'(\phi) = 0$. □

C^2 級の汎関数 $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 有界線形作用素 $S''(\phi) : X \rightarrow X^*$ を ϕ における S' の線形化作用素という. 以下, 線形化作用素 $S''(\phi)$ から定まる 2 次形式 $X \times X \ni (u, v) \mapsto \langle S''(\phi)u, v \rangle \in \mathbb{R}$ の正値性について考える.

命題 3 $S, K : X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級とし, (A1) を仮定する.

このとき, $v \in X, \langle K'(\phi), v \rangle = 0$ ならば, $\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq 0$.

証明 $v \in X, \langle K'(\phi), v \rangle = 0$ とする. $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ の適当な開近傍 Ω において,

$$f(s, t) = S(\phi + sv + t\psi_1), \quad g(s, t) = K(\phi + sv + t\psi_1), \quad (s, t) \in \Omega$$

と定める. このとき, $f, g \in C^2(\Omega)$ であり,

$$g(0, 0) = K(\phi) = 0, \quad \partial_t g(0, 0) = \langle K'(\phi), \psi_1 \rangle \neq 0$$

だから、陰関数定理により、 C^2 級関数 $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ で、

$$\gamma(0) = 0, \quad g(s, \gamma(s)) = 0, \quad s \in (-\delta, \delta)$$

を満たすものが存在する。また、 $\partial_s g(0, 0) + \partial_t g(0, 0) \gamma'(0) = 0$ だから、

$$\gamma'(0) = -\frac{\partial_s g(0, 0)}{\partial_t g(0, 0)} = -\frac{\langle K'(\phi), v \rangle}{\langle K'(\phi), \psi_1 \rangle} = 0.$$

さらに、 $s \in (-\delta, \delta)$ に対して、 $\phi + sw + \gamma(s)\psi_1 \in \mathcal{K}$ だから、 $h(s) := f(s, \gamma(s))$ は $s = 0$ で極小値をとる。よって、

$$\begin{aligned} 0 \leq h''(0) &= \partial_s^2 f(0, 0) + 2\partial_s \partial_t f(0, 0) \gamma'(0) + \partial_t^2 f(0, 0) \gamma'(0)^2 + \partial_t f(0, 0) \gamma''(0) \\ &= \partial_s^2 f(0, 0) + \partial_t f(0, 0) \gamma''(0) = \langle S''(\phi)v, v \rangle + \gamma''(0) \langle S'(\phi), \psi_1 \rangle \end{aligned}$$

であり、 $\langle S'(\phi), \psi_1 \rangle = 0$ だから、 $\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq 0$ を得る。 $\square$

仮定 (A2) $q \in X^*$ とし、

$$S''(\phi)\psi_2 = -q, \quad \langle K'(\phi), \psi_2 \rangle \neq 0, \quad \langle q, \psi_2 \rangle > 0$$

を満たす $\psi_2 \in X$ が存在する。

命題 4 $S, K : X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級とし、(A1), (A2) を仮定する。

このとき、 $v \in X$, $\langle q, v \rangle = 0$ ならば、 $\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq 0$ 。

証明² $v \in X$, $\langle q, v \rangle = 0$ とする。

$$\alpha = -\frac{\langle K'(\phi), v \rangle}{\langle K'(\phi), \psi_2 \rangle}$$

とおくと、 $\langle K'(\phi), v + \alpha\psi_2 \rangle = 0$ だから、命題 3 より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle S''(\phi)(v + \alpha\psi_2), v + \alpha\psi_2 \rangle \\ &= \langle S''(\phi)v, v \rangle + 2\alpha \langle S''(\phi)\psi_2, v \rangle + \alpha^2 \langle S''(\phi)\psi_2, \psi_2 \rangle \\ &= \langle S''(\phi)v, v \rangle - 2\alpha \langle q, v \rangle - \alpha^2 \langle q, \psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

ここで、 $\langle q, v \rangle = 0$, $\langle q, \psi_2 \rangle \geq 0$ だから³、 $\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq 0$ を得る。 $\square$

²深谷法良による。

³命題 4 の証明では、(A2) の 3 番目の条件は $\langle q, \psi_2 \rangle \geq 0$ でよいが、定理 5 の証明で、 $\langle q, \psi_2 \rangle \neq 0$ が必要になる。

最後に、定理 5 を示すために仮定を追加する.

仮定 (A3) $X \ni u \mapsto \langle S''(\phi)u, u \rangle \in \mathbb{R}$ は弱下半連続である.

仮定 (A4) $(u_n) \subset X$, $\|u_n\|_X = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $u_n \rightharpoonup u$ weakly in X かつ $u \in X \setminus U$ ならば,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle S''(\phi)u_n, u_n \rangle > 0.$$

仮定 (A5) $\langle q, u \rangle = 0$ for all $u \in \ker S''(\phi)$.

ここで, $\ker S''(\phi) = \{u \in X : S''(\phi)u = 0\}$.

定理 5 X は実 Hilbert 空間, $S, K : X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級とし, (A1)–(A5) を仮定する. また, W は X の閉部分空間であり, $W \cap \ker S''(\phi) \subset X \setminus U$ を満たすとする.

このとき, 定数 $c > 0$ が存在し,

$$\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq c\|v\|_X^2$$

for all $v \in W$ satisfying $\langle q, v \rangle = 0$.

証明 背理法で示す. 結論が成り立たないと仮定すると, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|v_n\|_X = 1, \quad v_n \in W, \quad \langle q, v_n \rangle = 0, \quad \langle S''(\phi)v_n, v_n \rangle < \frac{1}{n} \quad (1)$$

を満たす $v_n \in X$ が存在する. (1) の k 番目の条件を (1.k) と表す.

(1.1) より, (v_n) は Hilbert 空間 X の有界列だから, 部分列をとることにより (部分列を同じ記号で表す), $v_n \rightharpoonup v$ weakly in X .

また, (1.2), (1.3) より (W は弱収束に関しても閉じていることに注意), $v \in W$, $\langle q, v \rangle = 0$ であり,

$$0 \leq \langle S''(\phi)v, v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle S''(\phi)v_n, v_n \rangle \leq 0.$$

ここで, 1 番目の不等号は $\langle q, v \rangle = 0$ と命題 4 による. また, 2 番目の不等号は仮定 (A3) により, 3 番目の不等号は (1.4) による.

さらに, 仮定 (A4) より, $v \in U$ である. よって,

$$\langle S''(\phi)v, v \rangle = 0 = \min\{\langle S''(\phi)u, u \rangle : u \in U, \langle q, u \rangle = 0\}$$

だから, 命題 1 により, $S''(\phi)v = \mu q$ を満たす $\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

ここで, 仮定 (A2) より, $S''(\phi)\psi_2 = -q$ だから, $v + \mu\psi_2 \in \ker S''(\phi)$, すなわち, $v = -\mu\psi_2 + w$ を満たす $w \in \ker S''(\phi)$ が存在する.

仮定 (A2) より, $\langle q, \psi_2 \rangle \neq 0$ であり, さらに, 仮定 (A5) により,

$$0 = \langle q, v \rangle = -\mu \langle q, \psi_2 \rangle + \langle q, w \rangle = -\mu \langle q, \psi_2 \rangle$$

だから, $\mu = 0$. よって, $v = w \in \ker S''(\phi)$.

さらに, $v \in W$ であり, $W \cap \ker S''(\phi) \subset X \setminus U$ だから, $v \in X \setminus U$ となり, すでに示した $v \in U$ と矛盾が生じる. 以上により, 定理 5 が証明された. $\square$

§6. 例（非線形シュレディンガー方程式）

§5 では次の定理を証明した.

定理 0 X は実 Hilbert 空間とし, $S, K, Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級とする.

また, $\phi \in X \setminus \{0\}$ は $K(\phi) = 0$,

$$S(\phi) = \min\{S(u) : u \in X \setminus \{0\}, K(u) = 0\}$$

を満たすとし, 次の (A1)–(A5) を仮定する.

(A1) $\exists \psi_1 \in X$ s.t.

$$\langle S'(\phi), \psi_1 \rangle = 0, \quad \langle K'(\phi), \psi_1 \rangle \neq 0.$$

(A2) $\exists \psi_2 \in X$ s.t.

$$S''(\phi)\psi_2 = -Q'(\phi), \quad \langle K'(\phi), \psi_2 \rangle \neq 0, \quad \langle Q'(\phi), \psi_2 \rangle > 0.$$

(A3) $X \ni u \mapsto \langle S''(\phi)u, u \rangle \in \mathbb{R}$ は弱下半連続である.

(A4) $(u_n) \subset X$, $\|u_n\|_X = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $u_n \rightharpoonup 0$ weakly in X ならば,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle S''(\phi)u_n, u_n \rangle > 0.$$

(A5) $\langle Q'(\phi), u \rangle = 0$ for all $u \in \ker S''(\phi)$.

さらに, W は X の閉部分空間であり, $W \cap \ker S''(\phi) = \{0\}$ とする.

このとき, 定数 $C > 0$ が存在し,

$$\langle S''(\phi)v, v \rangle \geq C\|v\|_X^2$$

for all $v \in W$ satisfying $\langle Q'(\phi), v \rangle = 0$. □

この節では, この定理に関する具体例について考える.

以下, $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$(u, v)_{L^2} = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{v(x)} dx$$

と定める. $\omega > 0$ とし, $X_\omega = H^1(\mathbb{R}^N)$ の内積を

$$(u, v)_{X_\omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + \omega(u, v)_{L^2}$$

と定める． $1 < p < 2^* - 1$ とし， $u \in X_\omega$ に対して，

$$S_\omega(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$$K_\omega(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega \|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad Q(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

と定めると， $S_\omega, K_\omega, Q : X_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級であり，

$$S'_\omega(u) = -\Delta u + \omega u - |u|^{p-1}u,$$

$$S''_\omega(u)v = -\Delta v + \omega v - \frac{p+1}{2} |u|^{p-1}v - \frac{p-1}{2} |u|^{p-3}u^2\bar{v}.$$

さらに， ϕ_ω を

$$-\Delta \phi + \omega \phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{SP})$$

の基底状態とする． このとき， $\phi_\omega \in X_\omega \setminus \{0\}$ ， $K_\omega(\phi_\omega) = 0$ であり，

$$S_\omega(\phi_\omega) = \min\{S_\omega(u) : u \in X_\omega \setminus \{0\}, K_\omega(u) = 0\}$$

を満たす． また， ϕ_ω は正値球対称であるとしてよい．

以下， 仮定 (A1)–(A5) を確かめていく． まず，

$$\langle S'_\omega(\phi_\omega), \phi_\omega \rangle = K_\omega(\phi_\omega) = 0, \quad \langle K'_\omega(\phi_\omega), \phi_\omega \rangle = \partial_\lambda K_\omega(\lambda \phi_\omega)|_{\lambda=1} < 0$$

だから， $\psi_1 = \phi_\omega$ ととれば， (A1) が成り立つ．

次に， (A2) について考える．

$$\langle Q'(\phi_\omega), u \rangle = (\phi_\omega, u)_{L^2}, \quad u \in X_\omega,$$

$$S'_\omega(\phi_\omega) = -\Delta \phi_\omega + \omega \phi_\omega - \phi_\omega^p = 0, \quad (1)$$

$$S''_\omega(\phi_\omega)v = -\Delta v + \omega v - \frac{p+1}{2} \phi_\omega^{p-1}v - \frac{p-1}{2} \phi_\omega^{p-1}\bar{v}$$

に注意する． (SP) の正値球対称解の一意性により， $\alpha = \frac{1}{p-1}$ とおくと，

$$\phi_\omega(x) = \omega^\alpha \phi_1(\sqrt{\omega}x)$$

が成り立つ． また， (1) を ω に関して微分すると，

$$S''_\omega(\phi_\omega)(\partial_\omega \phi_\omega) = -Q'(\phi_\omega).$$

ここで，

$$\partial_\omega \phi_\omega(x) = \alpha \omega^{\alpha-1} \phi_1(\sqrt{\omega}x) + \frac{\omega^{\alpha-1/2}}{2} x \cdot \nabla \phi_1(\sqrt{\omega}x)$$

であり、楕円型方程式 (1) の解の正則性により、 $\partial_\omega \phi_\omega \in X_\omega$ に注意する.

また、 $\omega > 0$ に対して、 $K_\omega(\phi_\omega) = 0$ だから、

$$0 = \partial_\omega K_\omega(\phi_\omega) = \langle K'_\omega(\phi_\omega), \partial_\omega \phi_\omega \rangle + \|\phi_\omega\|_{L^2}^2$$

であり、 $\langle K'_\omega(\phi_\omega), \partial_\omega \phi_\omega \rangle = -\|\phi_\omega\|_{L^2}^2 \neq 0$.

さらに、

$$\langle Q'(\phi_\omega), \partial_\omega \phi_\omega \rangle = \partial_\omega Q(\phi_\omega), \quad Q(\phi_\omega) = \frac{1}{2} \|\phi_\omega\|_{L^2}^2 = \omega^{2\alpha-N/2} Q(\phi_1).$$

よって、 $1 < p < 1 + 4/N$ のとき、 $\langle Q'(\phi_\omega), \partial_\omega \phi_\omega \rangle > 0$ だから、 $\psi_2 = \partial_\omega \phi_\omega$ ととることにより、(A2) が成り立つことが分かる.

次に、(A3) と (A4) について考える.

まず、 $\|u\|_{X_\omega}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega \|u\|_{L^2}^2$ に注意すると、

$$\begin{aligned} & \langle S''_\omega(\phi_\omega)u, u \rangle \\ &= \|u\|_{X_\omega}^2 - \frac{p+1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} |u(x)|^2 dx - \frac{p-1}{2} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} \overline{u(x)}^2 dx. \end{aligned}$$

ここで、 $u_n \rightharpoonup u$ weakly in X_ω ならば、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} |u_n(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} |u(x)|^2 dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} \overline{u_n(x)}^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} \overline{u(x)}^2 dx \end{aligned}$$

が成り立つこととノルムの弱下半連続性により、 $X_\omega \ni u \mapsto \langle S''_\omega(\phi_\omega)u, u \rangle \in \mathbb{R}$ は弱下半連続である. すなわち、(A3) が成り立つ.

また、 $(u_n) \subset X_\omega$, $\|u_n\|_{X_\omega} = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $u_n \rightharpoonup 0$ weakly in X_ω ならば、

$$\begin{aligned} & \langle S''_\omega(\phi_\omega)u_n, u_n \rangle \\ &= 1 - \frac{p+1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} |u_n(x)|^2 dx - \frac{p-1}{2} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\omega(x)^{p-1} \overline{u_n(x)}^2 dx \rightarrow 1 \end{aligned}$$

だから、(A4) が成り立つ.

最後に、(A5) について考える. そのために、 $\ker S''_\omega(\phi_\omega)$ を具体的に求める必要がある. ゲージ対称性および並進対称性により、 $(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ に対して、

$$S'_\omega(e^{i\theta} \phi_\omega(\cdot + y)) = 0.$$

これを θ, y で微分することにより,

$$i\phi_\omega, \partial_1\phi_\omega, \dots, \partial_N\phi_\omega \in \ker S''_\omega(\phi_\omega)$$

であり, $\text{span}\{i\phi_\omega, \partial_1\phi_\omega, \dots, \partial_N\phi_\omega\} \subset \ker S''_\omega(\phi_\omega)$.

逆向きの包含関係も成り立つが, その証明は簡単ではない.

命題 6 $1 < p < 2^* - 1$ とする. このとき,

$$\ker S''_\omega(\phi_\omega) = \text{span}\{i\phi_\omega, \partial_1\phi_\omega, \dots, \partial_N\phi_\omega\}.$$

証明 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $u_1 = \text{Re } u, u_2 = \text{Im } u$ とおくと, ϕ_ω は正値だから,

$$S''_\omega(\phi_\omega)u = L_+u_1 + iL_-u_2,$$

$$L_+v = -\Delta v + \omega v - p\phi_\omega(x)^{p-1}v,$$

$$L_-v = -\Delta v + \omega v - \phi_\omega(x)^{p-1}v.$$

ここで, $L_-\phi_\omega = S'_\omega(\phi_\omega) = 0$ であり, ϕ_ω が正値であることから, $\ker L_- = \text{span}\{\phi_\omega\}$ が分かる.

次に, $\ker L_+ = \text{span}\{\partial_1\phi_\omega, \dots, \partial_N\phi_\omega\}$ の証明は球面調和関数展開などを用いると,

$$u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ が球対称かつ } L_+u = 0 \text{ ならば, } u = 0 \quad (2)$$

を示すことに帰着される. (2) は (SP) の正値球対称解の一意性とも関係が深い. 詳しくは, M. K. Kwong [7], Ni-Takagi [9], さらに, Chang, Gustafson, Nakanishi and Tsai [3] の §2.1 を参照のこと. $\square$

(A5) を確かめよう. まず, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $Q(e^{i\theta}\phi_\omega) = Q(\phi_\omega)$ だから,

$$\langle Q'(\phi_\omega), i\phi_\omega \rangle = \partial_\theta Q(e^{i\theta}\phi_\omega)|_{\theta=0} = 0.$$

また, $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $Q(\phi_\omega(\cdot + y)) = Q(\phi_\omega)$ だから,

$$\langle Q'(\phi_\omega), \partial_j\phi_\omega \rangle = \partial_{y_j} Q(\phi_\omega(\cdot + y))|_{y=0} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

よって, 命題 6 により, (A5) が成り立つことが示された.

以上により, 仮定 (A1)–(A5) が確かめられた.

最後に,

$$W = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : (i\phi_\omega, u)_{H^1} = 0, (\partial_j\phi_\omega, u)_{H^1} = 0 \ (j = 1, \dots, N)\}$$

と定めると、命題 6 により、

$$W = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : (u, w)_{H^1} = 0 \text{ for all } w \in \ker S''_\omega(\phi_\omega)\}$$

だから、 W は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の閉部分空間であり、 $W \cap \ker S''_\omega(\phi_\omega) = \{0\}$ である。

よって、定理 0 を適用することにより、次の定理 7 を得る。

定理 7 $1 < p < 1 + 4/N$ とする。また、 $\omega > 0$ とし、 ϕ_ω を (SP) の基底状態とする。このとき、正定数 $C > 0$ が存在し、

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, v \rangle \geq C\|v\|_{H^1}^2$$

for all $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfying

$$(\phi_\omega, v)_{L^2} = 0, \quad (i\phi_\omega, v)_{H^1} = 0, \quad (\partial_j \phi_\omega, v)_{H^1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

参考文献

- [1] H. Brezis and E. H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486–490.
- [2] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, Amer. Math. Soc., 2003.
- [3] S.-M. Chang, S. Gustafson, K. Nakanishi and T.-P. Tsai, *Spectra of linearized operators for NLS solitary waves*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007), 1070–1111.
- [4] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32.
- [5] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), 160–197.
- [6] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **46** (1987), 113–129.
- [7] M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$* , Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), 243–266.
- [8] E. H. Lieb, On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains, Invent. Math. **74** (1983), 441–448.
- [9] W. M. Ni and I. Takagi, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J. **70** (1992), 247–281.
- [10] M. I. Weinstein, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 51–67.