

非線形シュレディンガー方程式 の定在波解の安定性と不安定性¹

太田 雅人 (東京理科大学 理学部数学科)

§1. はじめに

非線形シュレディンガー方程式 (nonlinear Schrödinger equation)

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

について考える. ここで, i は虚数単位, $p > 1$ であり, $u = u(t, x)$ は複素数値の未知関数である. また,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

まず, 1979 年の Ginibre and Velo の有名な論文 [5] の Introduction から, 非線形シュレディンガー方程式の物理的背景について説明している部分を引用しよう.

Equations of the type

$$i \frac{du}{dt} = -\Delta u + mu + f(u) \quad (0.1)$$

are interesting for various reasons. They are widely used in several domains of applied physics. In the special case where $f(u) = \lambda|u|^2u$, the equation (0.1) can be considered as the classical approximation to the field equation for a quantum mechanical nonrelativistic many body system with a two body δ -function interaction. It is also used in the Landau-Ginzburg theory of superconductivity. For $f(u) = -|u|^2u$, in one-dimensional space, the equation (0.1) exhibits solitary wave solutions, and can furthermore be solved exactly by the inverse scattering method.

さて, $N = 1$ のとき, (NLS) は $u(t, x) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ という形の特殊解をもつ. ここで, $\omega > 0$ はパラメータであり,

$$\phi_\omega(x) = \left\{ \frac{(p+1)\omega}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{(p-1)\sqrt{\omega}}{2} x \right) \right\}^{1/(p-1)}$$

¹集中講義：首都大学東京, 2019 年 10 月.

は次の方程式の一意的な正值偶関数解である.

$$-\phi'' + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

さらに,

$$2^* = \begin{cases} 2N/(N-2) & (N \geq 3) \\ \infty & (N = 1, 2) \end{cases}$$

と定めると, $N \geq 2$ の場合も, $1 < p < 2^* - 1$ のとき, 任意の $\omega > 0$ に対して, 定常問題 (stationary problem)

$$(SP) \quad -\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の正值球対称解 $\phi_\omega(x)$ が一意的に存在する. このとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は (NLS) の解となるが, これを定在波解という. この講義では, 初期データ $u_0(x)$ が $\phi_\omega(x)$ に十分近いとき, 初期条件 $u(0, x) = u_0(x)$ を満たす (NLS) の解 $u(t, x)$ が時間の経過とともにどのように変化していくかという問題について考える.

以下, $1 \leq q < \infty$ に対して, Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^N)$ のノルムを

$$\|u\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

とし, $L^2(\mathbb{R}^N)$ 及び Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ はそれぞれ, 内積

$$(u, v)_{L^2} = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

を備えた実 Hilbert 空間とする. Sobolev の埋込定理により, $1 < p < 2^* - 1$ のとき, $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ.

(NLS) に関する基本的な結果をまとめておこう. エネルギーを

$$E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める. エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ における (NLS) の初期値問題の適切性に関して次が知られている.

定理 1 $1 < p < 2^* - 1$ とする. 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, 最大存在時間 $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (0, \infty]$ と初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u \in C([0, T_{\max}), H^1(\mathbb{R}^N))$ が一意的に存在する. また, エネルギー及び L^2 ノルムの保存則が成り立つ:

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \text{ for all } t \in [0, T_{\max}).$$

さらに, $T_{\max} < \infty$ ならば, $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$ (blowup alternative). $\square$

定理 1 を含む一般的な定理が Ginibre and Velo [5], Kato [6] などによって証明されている.

定理 2 $1 < p < 1 + 4/N$ のとき, すべての $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $T_{\max}(u_0) = \infty$.

証明 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解とすると, エネルギーの保存則より, $t \in [0, T_{\max})$ に対して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = 2E(u_0) + \frac{2}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

ここで, Gagliardo-Nirenberg の不等式より, $C = C(N, p) > 0$ が存在し,

$$\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C \|v\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla v\|_{L^2}^\alpha, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ. 但し, $\alpha = \frac{N}{2}(p-1)$ とおいた.

よって, L^2 ノルムの保存則より, $t \in [0, T_{\max})$ に対して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_0) + C_1 \|u_0\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^\alpha.$$

ここで, $1 < p < 1 + 4/N$ より, $0 < \alpha < 2$ だから, $\beta = \frac{2(p+1-\alpha)}{2-\alpha}$ とおくと, Young の不等式により,

$$C_1 \|u_0\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^\alpha \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + C_2 \|u_0\|_{L^2}^\beta.$$

よって, $t \in [0, T_{\max})$ に対して, $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 4E(u_0) + 2C_2 \|u_0\|_{L^2}^\beta$ であり, blowup alternative により, $T_{\max} = \infty$ を得る. $\square$

注意 3 次が成り立つ.

(1) $p = 1 + 4/N$ のとき, $\delta_1 > 0$ が存在し, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|u_0\|_{L^2} < \delta_1$ ならば, $T_{\max}(u_0) = \infty$.

(2) $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ のとき, $\delta_2 > 0$ が存在し, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|u_0\|_{H^1} < \delta_2$ ならば, $T_{\max}(u_0) = \infty$. $\square$

$1 + 4/N \leq p < 2^* - 1$ のとき, 有限時間で爆発する解が存在するが, これについては §4 で述べることにする.

§2. 定常問題

この節では, $\omega > 0, 1 < p < 2^* - 1$ とし, 定常問題

$$(SP) \quad -\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

について考える. (SP) に対応する作用汎関数 $S_\omega : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$S_\omega(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める. このとき, $S_\omega : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり, $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $(SP) \iff S'_\omega(\phi) = 0$.

ここで, 汎関数の微分について簡単に復習する.

定義 X は実 Banach 空間とする.

- (1) $f \in X^*$ とする. すなわち, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ線形とする. このとき, f に $v \in X$ を代入した値を $f(v)$ の代わりに $\langle f, v \rangle$ とかく.
- (2) $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $\phi \in X$ に対して, 次を満たす $f \in X^*$ が存在するとき, F は ϕ において微分可能であるといい, f を $F'(\phi)$ とかく:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

$$v \in X, \|v\| < \delta \text{ ならば } |F(\phi + v) - F(\phi) - \langle f, v \rangle| \leq \varepsilon \|v\|.$$

- (3) $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級であるとは, F が X のすべての点で微分可能であり, $F' : X \rightarrow X^*$ が連続であることである.

例 (1) $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $F_1(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2$ と定める.

このとき, $\phi, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $F_1(\phi + v) = F_1(\phi) + (\nabla\phi, \nabla v)_{L^2} + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2$ だから, $F_1 : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり,

$$\langle F'_1(\phi), v \rangle = (\nabla\phi, \nabla v)_{L^2} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} D_j\phi(x) \overline{D_j v(x)} dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

これを $F'_1(\phi) = -\Delta\phi$ とかく.

- (2) $1 \leq p < 2^* - 1$ とする. $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $F_2(u) = \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ と定める. このとき, $F_2 : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり,

$$\langle F'_2(\phi), v \rangle = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^{p-1}\phi(x) \overline{v(x)} dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

これを $F'_2(\phi) = |\phi|^{p-1}\phi$ とかく.

定義 $\mathcal{N}_\omega = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : S'_\omega(v) = 0\}$ とおく. これは (SP) の非自明解全体の集合である. さらに,

$$\mathcal{G}_\omega = \{\phi \in \mathcal{N}_\omega : S_\omega(\phi) \leq S_\omega(v) \text{ for all } v \in \mathcal{N}_\omega\}$$

と定める. $\mathcal{G}_\omega$ の元を (SP) の基底状態 (ground state) という. また, $\mathcal{N}_\omega \setminus \mathcal{G}_\omega$ の元, すなわち, (SP) の非自明解で基底状態でないものを (SP) の励起状態という.

注意 $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $\tau_y v(x) = v(x - y)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) と定める.

このとき, $\theta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $S_\omega(e^{i\theta} \tau_y v) = S_\omega(v)$.

また, $\phi \in \mathcal{N}_\omega$ ならば $e^{i\theta} \tau_y \phi \in \mathcal{N}_\omega$. さらに, $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ ならば $e^{i\theta} \tau_y \phi \in \mathcal{G}_\omega$.

以下, (SP) の基底状態の存在を証明しよう. まず,

$$\begin{aligned} K_\omega(v) &= \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\ \mathcal{K}_\omega &= \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : K_\omega(v) = 0\} \end{aligned}$$

と定める. ここで, $\lambda > 0$, $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$S_\omega(\lambda v) = \frac{\lambda^2}{2} (\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2) - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

だから, $K_\omega(v) = \partial_\lambda S_\omega(\lambda v)|_{\lambda=1} = \langle S'_\omega(v), v \rangle$ であり, $\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$.

また,

$$d(\omega) = \inf\{S_\omega(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\}, \quad \mathcal{M}_\omega = \{v \in \mathcal{K}_\omega : S_\omega(v) = d(\omega)\}$$

と定める.

補題 1 $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$.

証明 $\phi \in \mathcal{M}_\omega$ とする. このとき, $\langle K'_\omega(\phi), \phi \rangle = \partial_\lambda K_\omega(\lambda \phi)|_{\lambda=1} \neq 0$ だから, Lagrange の未定乗数法により, $S'_\omega(\phi) = \mu K'_\omega(\phi)$ を満たす $\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

このとき, $0 = K_\omega(\phi) = \langle S'_\omega(\phi), \phi \rangle = \mu \langle K'_\omega(\phi), \phi \rangle$ だから, $\mu = 0$. よって, $S'_\omega(\phi) = 0$ であり, $\phi \in \mathcal{N}_\omega$.

さらに, $\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから, 任意の $v \in \mathcal{N}_\omega$ に対して, $S_\omega(\phi) = d(\omega) \leq S_\omega(v)$ が成り立つ. よって, $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ であり, $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$ が示された. $\square$

補題 2 $\mathcal{M}_\omega$ が空集合でないならば, $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{M}_\omega$.

証明 $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ を示せばよい. $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ を任意にとる. $\mathcal{M}_\omega$ は空でないから, $v \in \mathcal{M}_\omega$ を1つとる. このとき, 補題1より, $v \in \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega$ であり, $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ だから, $S_\omega(\phi) \leq S_\omega(v) = d(\omega)$.

一方, $\phi \in \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから, $d(\omega)$ の定義より, $d(\omega) \leq S_\omega(\phi)$ が成り立ち, $S_\omega(\phi) = d(\omega)$. よって, $\phi \in \mathcal{M}_\omega$ だから, $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ が示された. $\square$

補題2より, $\mathcal{M}_\omega$ が空でないことを示せばよいが, より強い主張を示そう.

定理3 $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ は $K_\omega(u_n) \rightarrow 0$, $S_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ を満たすとする. このとき, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 (n_j) と $v \in \mathcal{M}_\omega$ が存在して, $\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightarrow v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

定理3を証明するための鍵となるのは, 次の2つの基本定理である.

Brezis-Lieb の補題 ([2]) $1 < q < \infty$ とする. (u_n) は $L^q(\mathbb{R}^N)$ の有界列で, $u_n \rightarrow u$ a.e. in $\mathbb{R}^N$ とする. このとき, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_{L^q}^q - \|u_n - u\|_{L^q}^q) = \|u\|_{L^q}^q.$$

注意 $2 \leq q < 2^*$ のとき, (u_n) が $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列ならば, 部分列をとることにより, Brezis-Lieb の補題の仮定は満たされる.

また, X が Hilbert 空間のとき, $u_n \rightharpoonup u$ weakly in X ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_X^2 - \|u_n - u\|_X^2) = \|u\|_X^2$$

が成り立つことは容易に分かる. $\square$

Lieb のコンパクト性定理 ([7]) (u_n) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列であり, ある $q \in (2, 2^*)$ に対して, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} > 0$ とする. このとき, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 (n_j) , $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ が存在し, $\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

証明 はじめに,

$$C_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2, \quad C_2 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q, \quad C_3 = \frac{C_1 + 1}{C_2}$$

とおく. また, $Q_0 = (0, 1)^N$ とし, $y \in \mathbb{Z}^N$ に対して,

$$Q_y = \{x \in \mathbb{R}^N : x - y \in Q_0\}$$

と定める. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $y_n \in \mathbb{Z}^N$ が存在し,

$$\|u_n\|_{H^1(Q_{y_n})}^2 < C_3 \|u_n\|_{L^q(Q_{y_n})}^q. \quad (1)$$

実際、これが成り立たないと仮定すると、 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$\|u_{n_0}\|_{H^1(Q_y)}^2 \geq C_3 \|u_{n_0}\|_{L^q(Q_y)}^q \quad \forall y \in \mathbb{Z}^N.$$

このとき、

$$\begin{aligned} C_1 &\geq \|u_{n_0}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|_{H^1(Q_y)}^2 \\ &\geq C_3 \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|_{L^q(Q_y)}^q = C_3 \|u_{n_0}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \geq C_3 C_2 = C_1 + 1 \end{aligned}$$

となり、矛盾である。故に、(1) を満たす点列 $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ が存在する。

この点列 (y_n) に対して、 $v_n := \tau_{-y_n} u_n$ とおくと、

$$\|v_n\|_{H^1(Q_0)}^2 < C_3 \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

特に、 $\|v_n\|_{L^q(Q_0)} > 0$ 。さらに、Sobolev の埋蔵定理より、 N と q のみに依存する定数 $C_4 > 0$ が存在し、 $C_4 \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^2 \leq \|v_n\|_{H^1(Q_0)}^2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) だから、

$$0 < C_4/C_3 \leq \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^{q-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

ここで、 (v_n) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列だから、ある部分列 (n_j) と $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在し、 $v_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ 。埋め込み $H^1(Q_0) \hookrightarrow L^q(Q_0)$ はコンパクトだから、(2) より、 $\|v\|_{L^q(Q_0)}^{q-2} \geq C_4/C_3 > 0$ となり、 $v \neq 0$ を得る。□

$H^1(\mathbb{R}^N)$ 上の汎関数

$$J_\omega(v) = \frac{p-1}{2(p+1)} (\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2), \quad G(v) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

を定める。このとき、

$$\begin{aligned} S_\omega(v) &= J_\omega(v) + \frac{1}{p+1} K_\omega(v) = G(v) + \frac{1}{2} K_\omega(v), \\ d(\omega) &= \inf\{J_\omega(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\} = \inf\{G(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\} \end{aligned}$$

であり、 $d(\omega) \geq 0$ に注意する。

補題 4 $d(\omega) > 0$.

証明 $v \in \mathcal{K}_\omega$ を任意にとる。このとき、 $K_\omega(v) = 0$ と Sobolev の不等式より、正定数 C_1, C_2, C_3 が存在し、

$$C_1 J_\omega(v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C_2 \|v\|_{H^1}^{p+1} \leq C_3 J_\omega(v)^{(p+1)/2}.$$

ここで, $v \neq 0$ より, $J_\omega(v)^{(p-1)/2} \geq \frac{C_1}{C_3}$ だから, $d(\omega) \geq \left(\frac{C_1}{C_3}\right)^{2/(p-1)}$. $\square$

補題 5 $K_\omega(v) < 0$ ならば, $J_\omega(v) > d(\omega)$, $G(v) > d(\omega)$.

証明 $\lambda \mapsto K_\omega(\lambda v)$ のグラフより, $K_\omega(\lambda_0 v) = 0$ を満たす $\lambda_0 \in (0, 1)$ が存在する.

また, $v \neq 0$ より, $\lambda_0 v \in \mathcal{K}_\omega$ だから,

$$d(\omega) \leq J_\omega(\lambda_0 v) = \lambda_0^2 J_\omega(v) < J_\omega(v), \quad d(\omega) \leq G(\lambda_0 v) = \lambda_0^{p+1} G(v) < G(v)$$

が成り立つ. $\square$

以上の準備のもとで, 定理 3 を証明しよう.

定理 3 の証明

Step 1 まず, $S_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$, $K_\omega(u_n) \rightarrow 0$ より, $J_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ だから, (u_n) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列である. また, 補題 4 より, $G(u_n) \rightarrow d(\omega) > 0$ だから, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^{p+1}} > 0$ としてよい. よって, Lieb のコンパクト性定理より, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 (以下, 部分列を同じ記号で書く), $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ が存在し, $v_n := \tau_{y_n} u_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

さらに, Brezis-Lieb の補題より

$$J_\omega(v_n) - J_\omega(v_n - v) \rightarrow J_\omega(v), \quad (1)$$

$$K_\omega(v_n) - K_\omega(v_n - v) \rightarrow K_\omega(v). \quad (2)$$

Step 2 $K_\omega(v) = 0$ であることを背理法で示そう.

まず, $K_\omega(v) > 0$ と仮定すると, $K_\omega(v_n) = K_\omega(u_n) \rightarrow 0$ だから, (2) より, $K_\omega(v_n - v) \rightarrow -K_\omega(v) < 0$. よって, 十分大きな n に対して, $K_\omega(v_n - v) < 0$ だから, 補題 5 より, $J_\omega(v_n - v) > d(\omega)$. このとき, $J_\omega(v_n) = J_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ だから, (1) より, $J_\omega(v) \leq 0$ となるが, これは $v \neq 0$ であることに矛盾する.

また, $K_\omega(v) < 0$ と仮定すると, 補題 5 より, $J_\omega(v) > d(\omega)$ となる. 一方, $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ より, $J_\omega(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\omega(v_n) = d(\omega)$ だから, これも矛盾である.

故に, $K_\omega(v) = 0$ であり, $v \in \mathcal{K}_\omega$.

Step 3 $d(\omega)$ の定義と $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ より,

$$d(\omega) \leq S_\omega(v) = J_\omega(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\omega(v_n) = d(\omega).$$

これから, $S_\omega(v) = d(\omega)$ だから, $v \in \mathcal{M}_\omega$. さらに, $\|v_n\|_{H^1} \rightarrow \|v\|_{H^1}$ だから, $v_n \rightarrow v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ が分かる. $\square$

以上により, (SP) の基底状態の存在が証明された.

さて, $v \in \mathcal{N}_\omega$ とすると, 楕円型方程式に対する正則性理論により, $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ であり, v は (SP) の古典解になる. (SP) の解の性質をもう少し調べよう.

命題 6 (Pohozaev の等式) $v \in \mathcal{N}_\omega$ とする. このとき,

$$\frac{N-2}{2N} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} = 0.$$

$\lambda > 0$ とし, 関数 $v(x)$ のスケール変換 $v(x/\lambda)$ を考えると,

$$S_\omega(v(\cdot/\lambda)) = \frac{\lambda^{N-2}}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \lambda^N \left(\frac{\omega}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \right).$$

よって, $v \in \mathcal{N}_\omega$ に対して, 形式的には,

$$0 = \frac{1}{N} \partial_\lambda S_\omega(v(\cdot/\lambda))|_{\lambda=1} = \frac{N-2}{2N} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

命題 6 の証明は §A 補足で述べる.

$v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\omega > 0$ に対して, $\sigma_\omega v(x) = \omega^{1/(p-1)} v(\sqrt{\omega} x)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) と定める. また,

$$\kappa = 1 + \frac{2}{p-1} - \frac{N}{2} = \frac{(N+2) - (N-2)p}{2(p-1)}$$

とおくと,

$$\|\nabla \sigma_\omega v\|_{L^2}^2 = \omega^\kappa \|\nabla v\|_{L^2}^2, \quad \|\sigma_\omega v\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \omega^\kappa \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad \|\sigma_\omega v\|_{L^2}^2 = \omega^{\kappa-1} \|v\|_{L^2}^2.$$

さらに, $\mathcal{N}_\omega = \{\sigma_\omega \phi : \phi \in \mathcal{N}_1\}$, $\mathcal{G}_\omega = \{\sigma_\omega \phi : \phi \in \mathcal{G}_1\}$.

命題 7 $\omega > 0$ に対して, $d(\omega) = \omega^\kappa d(1)$.

証明 $\phi \in \mathcal{G}_1$ とすると, $\sigma_\omega \phi \in \mathcal{G}_\omega$ だから, $d(\omega) = S_\omega(\sigma_\omega \phi) = \omega^\kappa S_1(\phi) = \omega^\kappa d(1)$ となる. $\square$

命題 8 任意の $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ に対して, $d'(\omega) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{L^2}^2$.

証明 まず, 命題 7 より, $\omega d'(\omega) = \kappa \omega^\kappa d(1) = \kappa d(\omega)$. また, $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ とすると, 命題 6 と $K_\omega(\phi) = 0$ より,

$$d(\omega) = \frac{1}{N} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 = \frac{\omega}{2\kappa} \|\phi\|_{L^2}^2$$

となり, $d'(\omega) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{L^2}^2$ を得る. $\square$

§3. 基底状態の安定性

この節では、非線形シュレディンガー方程式

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

の定在波解 $u(t, x) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ の安定性について考える.

ここで, $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$ とし, $\phi_\omega(x)$ は定常問題

$$(SP) \quad -\Delta \phi + \omega \phi - |\phi|^{p-1} \phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の基底状態とする. $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{A} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\text{dist}(v, \mathcal{A}) = \inf \{ \|v - \phi\|_{H^1} : \phi \in \mathcal{A} \}$$

と定める. このとき, 次が成り立つ.

定理 1 $1 < p < 1 + 4/N$ とする. 任意の $\omega > 0$ に対して, (SP) の基底状態全体の集合 $\mathcal{G}_\omega$ は次の意味で安定である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ かつ $\text{dist}(u_0, \mathcal{G}_\omega) < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し, すべての $t \in [0, \infty)$ に対して, $\text{dist}(u(t), \mathcal{G}_\omega) < \varepsilon$.

以下, Shatah [8] に従って, 定理 1 を証明しよう. Cazenave and Lions [4] も参照のこと. まず, $\omega > 0$ に対して,

$$\mathcal{A}_\omega = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : S_\omega(v) < d(\omega)\}$$

と定める.

補題 2 $v \in \mathcal{A}_\omega$ ならば $G(v) \neq d(\omega)$.

証明 対偶を示す. $G(v) = d(\omega)$ とすると, §2 補題 5 より, $K_\omega(v) \geq 0$ だから,

$$S_\omega(v) = G(v) + \frac{1}{2}K_\omega(v) \geq d(\omega)$$

となり, $v \notin \mathcal{A}_\omega$ を得る. □

これから,

$$\mathcal{A}_\omega^+ = \{v \in \mathcal{A}_\omega : G(v) > d(\omega)\}, \quad \mathcal{A}_\omega^- = \{v \in \mathcal{A}_\omega : G(v) < d(\omega)\}$$

と定めると, $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega^+ \cup \mathcal{A}_\omega^-$ (直和) となる.

定義 $\mathcal{A} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ とする. $\mathcal{A}$ が (NLS) の流れに関して不変であるとは, $u_0 \in \mathcal{A}$ ならば, $u(t)$ を $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解とすると, すべての $t \in [0, T_{\max}(u_0))$ に対して, $u(t) \in \mathcal{A}$ が成り立つことである.

命題 3 $\mathcal{A}_\omega^+, \mathcal{A}_\omega^-$ は (NLS) の流れに関して不変である.

証明 まず, S_ω は (NLS) の保存量だから, $\mathcal{A}_\omega$ は (NLS) の流れに関して不変である. さらに, (NLS) の解 $u(t)$ に対して, $t \mapsto G(u(t))$ は連続だから, 補題 2 により, $\mathcal{A}_\omega^+$ と $\mathcal{A}_\omega^-$ が (NLS) の流れに関して不変であることが分かる. $\square$

命題 4 任意の $\omega_0 > 0$ に対して, $\varepsilon_1 > 0$ が存在し,

$$\mathcal{G}_{\omega_0} \subset \bigcap_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)} (\mathcal{A}_{\omega_0 - \varepsilon}^+ \cap \mathcal{A}_{\omega_0 + \varepsilon}^-).$$

証明 まず, §2 命題 7 より, $d(\omega) = \omega^\kappa d(1) > 0$, $\kappa = 1 + \frac{2}{p-1} - \frac{N}{2} > 1$ だから, $d'(\omega_0) > 0$, $d''(\omega_0) > 0$. よって, $\varepsilon_1 > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対して,

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < d(\omega_0) < d(\omega_0 + \varepsilon), \quad d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon).$$

また, 任意の $\phi \in \mathcal{G}_{\omega_0}$ に対して, §2 命題 8 より,

$$d(\omega_0) = S_{\omega_0}(\phi) = G(\phi), \quad d'(\omega_0) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{L^2}^2$$

だから, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対して,

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < G(\phi) < d(\omega_0 + \varepsilon), \quad S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(\phi) = S_{\omega_0}(\phi) \pm \frac{\varepsilon}{2} \|\phi\|_{L^2}^2 < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$$

となり, $\phi \in \mathcal{A}_{\omega_0 - \varepsilon}^+ \cap \mathcal{A}_{\omega_0 + \varepsilon}^-$ を得る. $\square$

命題 5 ω_0, ε_1 を命題 4 の定数とする. 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $\text{dist}(u_0, \mathcal{G}_{\omega_0}) < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u(t)$ に対して,

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < G(u(t)) < d(\omega_0 + \varepsilon) \quad \forall t \in [0, \infty).$$

証明 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ とする. まず, 任意の $v \in \mathcal{G}_{\omega_0}$ に対して, $J_{\omega_0}(v) = d(\omega_0)$ だから, $\mathcal{G}_{\omega_0}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界集合である. そこで, $M = 1 + \sup\{\|v\|_{H^1} : v \in \mathcal{G}_{\omega_0}\}$ とおく. また, $B(M) = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \|v\|_{H^1} \leq M\}$ とおくと, $S_{\omega_0 \pm \varepsilon}, G : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ は $B(M)$ 上で Lipschitz 連続である. すなわち, $L = L(M) > 0$ が存在し,

$$|S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(v) - S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(w)| + |G(v) - G(w)| \leq L\|v - w\|_{H^1} \quad \forall v, w \in B(M).$$

よって, $\delta > 0$ が存在し, $\phi \in \mathcal{G}_{\omega_0}$, $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|\phi - v\|_{H^1} < \delta$ ならば,

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < G(v) < d(\omega_0 + \varepsilon), \quad S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(v) < d(\omega_0 \pm \varepsilon).$$

これから, $\text{dist}(u_0, \mathcal{G}_{\omega_0}) < \delta$ ならば, $u_0 \in \mathcal{A}_{\omega_0 - \varepsilon}^+ \cap \mathcal{A}_{\omega_0 + \varepsilon}^-$ となり, さらに, 命題 3 より結論を得る. $\square$

定理 1 の証明 背理法で示す. $\mathcal{G}_{\omega_0}$ が安定でないと仮定する.

このとき, $\varepsilon_0 > 0$, (NLS) の解の列 $(u_n(t))$ と列 $(t_n) \subset (0, \infty)$ が存在し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(u_n(0), \mathcal{G}_{\omega_0}) = 0, \quad (1)$$

$$\text{dist}(u_n(t_n), \mathcal{G}_{\omega_0}) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

ここで, $v_n := u_n(t_n)$ とおくと, 保存則と (1) より,

$$S_{\omega_0}(v_n) = S_{\omega_0}(u_n(0)) \rightarrow d(\omega_0).$$

また, 命題 5 より, 適当な部分列をとることにより, $G(v_n) \rightarrow d(\omega_0)$ となり,

$$K_{\omega_0}(v_n) = 2S_{\omega_0}(v_n) - 2G(v_n) \rightarrow 0.$$

よって, §2 定理 3 により, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $\phi \in \mathcal{G}_{\omega_0}$ が存在し, 部分列をとることにより, $\tau_{y_n} v_n \rightarrow \phi$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. このとき, $\tau_{-y_n} \phi \in \mathcal{G}_{\omega_0}$ だから,

$$\text{dist}(u_n(t_n), \mathcal{G}_{\omega_0}) \leq \|v_n - \tau_{-y_n} \phi\|_{H^1} = \|\tau_{y_n} v_n - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0$$

となるが, これは (2) と矛盾する. 故に, $\mathcal{G}_{\omega_0}$ は安定である. $\square$

注意 任意の $\omega > 0$ に対して, (SP) の正值球対称解 $\phi_\omega(x)$ が一意的に存在し,

$$\mathcal{G}_\omega = \{e^{i\theta} \tau_y \phi_\omega : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N\}$$

となることが知られている (例えば, [3] §8.1 を参照のこと).

この基底状態の一意性と定理 1 から次が成り立つ.

定理 6 $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$ とし, $\phi_\omega(x)$ を (SP) の正值球対称解とする. このとき, (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ は次の意味で安定である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ かつ $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し, すべての $t \in [0, \infty)$ に対して,

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N} \|u(t) - e^{i\theta} \tau_y \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon.$$

§4. 解の爆発と定在波解の不安定性

まず、非線形シュレディンガー方程式

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

の解の爆発に関する定理を紹介する.

$$\Sigma = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : |x|v \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

と定める. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ を急減少関数全体とすると, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \Sigma$ であり, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で稠密だから, Σ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で稠密である.

命題 1 $1 < p < 2^* - 1$ とする. $u_0 \in \Sigma$ とし, $u(t)$ を $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解とする. このとき, $u \in C([0, T_{\max}), \Sigma)$. さらに,

$$[0, T_{\max}) \ni t \mapsto \|xu(t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u(t, x)|^2 dx$$

は C^2 級であり, $t \in [0, T_{\max})$ に対して

$$\frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2}^2 = 8Q(u(t)) \quad (\text{virial identity})$$

が成り立つ. ここで,

$$Q(v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad \alpha = \frac{N}{2}(p-1).$$

命題 1 の証明については, [3] §6.5 を参照のこと.

注意 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ に対して, $v^\lambda(x) = \lambda^{N/2}v(\lambda x)$ と定める.

このとき,

$$\|v^\lambda\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^2}^2, \quad E(v^\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda^\alpha}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

これから, $Q(v) = \lambda \partial_\lambda E(v^\lambda)|_{\lambda=1}$.

注意 $\phi \in \mathcal{N}_\omega$ とすると, $K_\omega(\phi) = 0$ と Pohozaev の等式により, $Q(\phi) = 0$.

定理 2 $1 + 4/N \leq p < 2^* - 1$ とする. このとき, $u_0 \in \Sigma$ かつ $E(u_0) < 0$ ならば, $T_{\max}(u_0) < \infty$.

証明 $p \geq 1 + 4/N$ のとき, $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$E(v) - \frac{1}{2}Q(v) = \frac{\alpha - 2}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq 0.$$

よって、命題1とエネルギーの保存則により、 $t \in [0, T_{\max})$ に対して、

$$\frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2}^2 = 8Q(u(t)) \leq 16E(u(t)) = 16E(u_0) < 0.$$

これから、 $T_{\max} < \infty$ が従う。 $\square$

次に、(NLS) の定在波解の不安定性について考える。

定義 (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi(x)$ が強い意味で不安定であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\|\phi - u_0\|_{H^1} < \varepsilon$ かつ $T_{\max}(u_0) < \infty$ を満たす $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在することである。

定理3 $p = 1 + 4/N$, $\omega > 0$ とする。このとき、任意の $\phi \in \mathcal{N}_\omega$ に対して、(NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi(x)$ は強い意味で不安定である。

証明 まず、 $p = 1 + 4/N$ のとき、 $Q(v) = 2E(v)$ に注意する。

$\phi \in \mathcal{N}_\omega$ とし、 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。このとき、 $E(\phi) = \frac{1}{2}Q(\phi) = 0$ だから、 $\lambda > 1$ に対して、 $E(\lambda\phi) < 0$ である。よって、 $E(\lambda_1\phi) < 0$ かつ $\|\phi - \lambda_1\phi\|_{H^1} < \varepsilon/2$ を満たす $\lambda_1 \in (1, \infty)$ が存在する。

さらに、 Σ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で稠密だから、 $E(u_0) < 0$ かつ $\|\lambda_1\phi - u_0\|_{H^1} < \varepsilon/2$ を満たす $u_0 \in \Sigma$ が存在する。このとき、定理2により、 $T_{\max}(u_0) < \infty$ であり、 $\|\phi - u_0\|_{H^1} < \varepsilon$ だから、定理3が示された。 $\square$

定理4 $1 + 4/N < p < 2^* - 1$, $\omega > 0$ とする。このとき、任意の $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ に対して、(NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi(x)$ は強い意味で不安定である。

定理4は Berestycki and Cazenave [1] によるが、以下では、より簡易化された証明を与える。

以下、 $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ とする。このとき、 $\alpha = \frac{N}{2}(p-1) > 2$ に注意する。

命題5 $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, $Q(v) \leq 0$ ならば、

$$d(\omega) \leq S_\omega(v) - \frac{1}{2}Q(v).$$

証明 $v \neq 0$, $\alpha > 2$ に注意すると、関数

$$(0, \infty) \ni \lambda \mapsto K_\omega(v^\lambda) = \lambda^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 - \lambda^\alpha \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

のグラフより、 $K_\omega(v^{\lambda_0}) = 0$ を満たす $\lambda_0 \in (0, \infty)$ が存在することが分かる。

このとき、 $v^{\lambda_0} \in \mathcal{K}_\omega$ だから、 $d(\omega) \leq S_\omega(v^{\lambda_0})$. また、 $Q(v) \leq 0$, 及び、

$$(0, \infty) \ni \lambda \mapsto S_\omega(v^\lambda) - \frac{\lambda^2}{2} Q(v) = \frac{\alpha\lambda^2 - 2\lambda^\alpha}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{\omega}{2} \|v\|_{L^2}^2$$

は $\lambda = 1$ で最大値をとることから、

$$d(\omega) \leq S_\omega(v^{\lambda_0}) \leq S_\omega(v^{\lambda_0}) - \frac{\lambda_0^2}{2} Q(v) \leq S_\omega(v) - \frac{1}{2} Q(v)$$

を得る. □

定義 $\mathcal{B}_\omega = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : S_\omega(v) < d(\omega), Q(v) < 0\}$ と定める.

命題 6 $\mathcal{B}_\omega$ は (NLS) の流れに関して不変である.

証明 $u_0 \in \mathcal{B}_\omega$ とし、 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解とする.

まず、 S_ω は (NLS) の保存量だから、 $t \in [0, T_{\max})$ に対して、

$$S_\omega(u(t)) = S_\omega(u_0) < d(\omega).$$

次に、命題 5 より、 $t \in [0, T_{\max})$ に対して、 $Q(u(t)) \neq 0$ である.

さらに、 $Q(u_0) < 0$ であり、 $t \mapsto Q(u(t))$ は連続だから、すべての $t \in [0, T_{\max})$ に対して、 $Q(u(t)) < 0$ が成り立つ. □

定理 7 $u_0 \in \Sigma \cap \mathcal{B}_\omega$ ならば、 $T_{\max}(u_0) < \infty$.

証明 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解とする. このとき、命題 1, 命題 5, 命題 6 より、 $t \in [0, T_{\max}(u_0))$ に対して、

$$\frac{1}{16} \frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} Q(u(t)) \leq S_\omega(u_0) - d(\omega) < 0.$$

これから、 $T_{\max}(u_0) < \infty$ が従う. □

定理 4 の証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. まず、 $Q(\phi^\lambda) = \lambda \partial_\lambda S_\omega(\phi^\lambda)$ に注意すると、 $\lambda > 1$ に対して、 $\phi^\lambda \in \mathcal{B}_\omega$ が分かる. また、 $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \|\phi^\lambda - \phi\|_{H^1} = 0$ だから、 $\phi^{\lambda_1} \in \mathcal{B}_\omega$ かつ $\|\phi - \phi^{\lambda_1}\|_{H^1} < \varepsilon/2$ を満たす $\lambda_1 \in (1, \infty)$ が存在する.

さらに、 $\mathcal{B}_\omega$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の開集合であり、 Σ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で稠密だから、 $\|\phi^{\lambda_1} - u_0\|_{H^1} < \varepsilon/2$ を満たす $u_0 \in \Sigma \cap \mathcal{B}_\omega$ が存在する.

このとき、定理 7 より、 $T_{\max}(u_0) < \infty$ であり、 $\|\phi - u_0\|_{H^1} < \varepsilon$ だから、定理 4 が証明された. □

§A. 補足

この節では, §2 命題 6 を証明する. まず, 次の補題を示す.

補題 1 $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき,

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} R \int_{\partial B(0,R)} |f| dS = 0.$$

証明 $R > 0$ に対して,

$$m(R) = \inf \left\{ r \int_{\partial B(0,r)} |f| dS : r \in [R, \infty) \right\}$$

とおくと,

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx \geq \int_R^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} |f| dS \right) dr \geq \int_R^\infty \frac{m(r)}{r} dr$$

だから, $m(R) = 0$ となり, 結論を得る. $\square$

§2 命題 6 の証明 $R > 0$ とする. $j = 1, \dots, N$ に対して,

$$D_j(x_j |v|^{p+1}) = |v|^{p+1} + (p+1) \operatorname{Re}(x_j |v|^{p-1} v D_j \bar{v})$$

だから, Gauss-Green の定理により,

$$\frac{N}{p+1} \int_{B(0,R)} |v|^{p+1} dx + \operatorname{Re} \int_{B(0,R)} x \cdot \nabla \bar{v} |v|^{p-1} v dx = \frac{R}{p+1} \int_{\partial B(0,R)} |v|^{p+1} dS. \quad (1)$$

同様に,

$$\frac{N}{2} \int_{B(0,R)} |v|^2 dx + \operatorname{Re} \int_{B(0,R)} x \cdot \nabla \bar{v} v dx = \frac{R}{2} \int_{\partial B(0,R)} |v|^2 dS. \quad (2)$$

さらに, $j, k = 1, \dots, N$ に対して,

$$D_j(x_j |D_k v|^2) = |D_k v|^2 + 2 \operatorname{Re}(x_j D_j D_k \bar{v} D_k v)$$

だから, Gauss-Green の定理により,

$$N \int_{B(0,R)} |\nabla v|^2 dx + 2 \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^N \int_{B(0,R)} x_j D_j D_k \bar{v} D_k v dx = R \int_{\partial B(0,R)} |\nabla v|^2 dS.$$

また, $D_k(x_j D_j \bar{v} D_k v) = \delta_{jk} D_j \bar{v} D_k v + x_j D_j D_k \bar{v} D_k v + x_j D_j \bar{v} D_k^2 v$ より,

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,R)} |\nabla v|^2 dx + \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^N \int_{B(0,R)} x_j D_j D_k \bar{v} D_k v dx + \operatorname{Re} \int_{B(0,R)} x \cdot \nabla \bar{v} \Delta v dx \\ &= \frac{1}{R} \int_{\partial B(0,R)} |x \cdot \nabla v|^2 dS. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \int_{B(0,R)} |\nabla v|^2 dx - \operatorname{Re} \int_{B(0,R)} x \cdot \nabla \bar{v} \Delta v dx \\ &= \frac{R}{2} \int_{\partial B(0,R)} |\nabla v|^2 dS - \frac{1}{R} \int_{\partial B(0,R)} |x \cdot \nabla v|^2 dS. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで, v は (SP) の古典解だから, (1), (2), (3) より,

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \int_{B(0,R)} |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{2} \omega \int_{B(0,R)} |v|^2 dx - \frac{N}{p+1} \int_{B(0,R)} |v|^{p+1} dx \\ &= \frac{R}{2} \int_{\partial B(0,R)} |\nabla v|^2 dS - \frac{1}{R} \int_{\partial B(0,R)} |x \cdot \nabla v|^2 dS \\ & \quad + \frac{R}{2} \omega \int_{\partial B(0,R)} |v|^2 dS - \frac{R}{p+1} \int_{\partial B(0,R)} |v|^{p+1} dS. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{N-2}{2N} \int_{B(0,R)} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \omega \int_{B(0,R)} |v|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{B(0,R)} |v|^{p+1} dx \right| \\ & \leq \frac{R}{N} \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \frac{3}{2} |\nabla v|^2 + \frac{\omega}{2} |v|^2 + \frac{1}{p+1} |v|^{p+1} \right\} dS \end{aligned}$$

だから, 補題 1 により, 望みの等式を得る. □

参考文献

- [1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981), 489–492.
- [2] H. Brezis and E. H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486–490.
- [3] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, Amer. Math. Soc., 2003.
- [4] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.
- [5] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32.
- [6] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **46** (1987), 113–129.
- [7] E. H. Lieb, On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains, Invent. Math. **74** (1983), 441–448.
- [8] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 313–327.